Математическая физика, анализ, геометрия 1994, т. 1, № 3/4, с. 392–409

УДК 512.554.3+412.667.7

Сплетающие операторы и квантовые однородные пространства

Л. Л. Ваксман

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 24 января 1994 г.

В работе изучаются однородные пространства квантовых групп и алгебры интегральных операторов в связанных с ними пространствах функций. Получены явные формулы для степеней ядра Пуассона и ядра преобразования Радона. Даны приложения и указаны связи с теорией гипергеометрических функций.

У роботі вивчаються однорідні простори квантових груп та алгебри інтегральних операторів у асоційованих із ними просторах функцій. Одержуються явні формули для ступенів ядра Пуассона та ядра перетворення Радона. Вказано застосування та зв'язки з теорією гіпергеометрічних функцій.

Интегральные преобразования, сплетающие квазирегулярные представления групп, используются при решении задач теории представлений, гармонического анализа и математической физики. Ядра сплетающих интегральных операторов являются функциями на декартовом произведении G-пространств $X \times Y$, постоянными на орбитах группы G. Это могут быть обобщенные функции, как в случае преобразования Радона

$$K(x,y) = \delta(c - (x,y)) \tag{0.1}$$

и других операторов, связанных с интегральной геометрией.

Теория квантовых групп возникла в работах В. Г.Дринфельда и М.Дзимбо [1,2] в середине восьмидесятых годов под влиянием квантового метода обратной задачи рассеяния, развитого Л.Д. Фаддеевым и его учениками.

Наша цель — построение инвариантных ядер, аналогичных (0.1), и отвечающих им интегральных сплетающих операторов для одного класса квантовых групп и их однородных пространств. Попутно будут определены вещественные степени q-ядра Пуассона и указаны их связи с теорией q-специальных функций. (Здесь $q \in (0,1)$ — параметр, связанный с "постоянной Планка" h в [1] равенством $q = \exp(-h/2)$. Квантовые алгебры "функций" являются деформациями алгебр функций на пуассоновых многообразиях. Если X, Y — такие многообразия, то на декартовом произведении $X \times Y$ скобка Пуассона может быть определена равенством $\{\varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2\} = \{\varphi_1, \varphi_2\} \otimes \psi_1 \psi_2 - \varphi_1 \varphi_2 \otimes \{\psi_1, \varphi_2\}$, где $\varphi_i \in C^\infty(X)$, $\psi_i \in C^\infty(Y)$, $i = 1,2$. Знак "минус" существен, если X, Y — однородные пространства группы Пуассона–Ли G [1]. Благодаря ему, скобка Пуассона G-инвариантов из $C^\infty(X \times Y)$ оказывается G-инвариантом. Квантовый аналог этого простого наблюдения состоит в том, что сплетающие ядра образуют алгебру (см. § 1). В частности, полиномы от сплетающего ядра являются сплетающими ядрами. Как видно из равенства (0.1), нам мало полиномов, нам нужны обобщенные функции. Соответствующие построения приведены в § 3, § 4.

Наконец, важно отметить, что алгебры сплетающих ядер описываются необычайно простыми коммутационными соотношениями между образующими (см. § 5). Это объясняется сохранением при квантовании размерностей градуированных компонент пространств сплетающих операторов.

§1. Интегральные операторы и A-модульные алгебры

Рассмотрим алгебру Хопфа A над полем C. Напомним (см. [1]), что коумножение $A \underset{\Delta}{\to} A \otimes A$ является гомоморфизмом и позволяет ввести операцию тензорного произведения модулей над алгеброй A. Дуальный V модуль V^* вводится с помощью антипода S: $A \to A$ равенством

$$(av^*)(v) = v^*(S(a)v), \quad v \in V, \quad v^* \in V^*,$$

единичный модуль C — с помощью коединицы ε: $A \to$ C. Инвариантами модуля V называют такие векторы $v \in V$, что $av = \varepsilon(a)v$ при всех $a \in A$. Наконец, напомним, что антипод является антиизоморфизмом как алгебры, так и коалгебры A.

Важные примеры алгебр Хопфа — описанные в [1,2] квантовые универсальные обертывающие алгебры $U_q J$. Эти алгебры определяются списками образующих $\{ X_i^{\pm}, k_i^{\pm} \}_{i=1}^{n}$ и соотношений между ними. Приведем соотношения, общие для всех алгебр $U_q J$ и, тем самым, зафиксируем используемые обозначения:

$$k_i^{\pm} k_j^{\pm} = k_j^{\pm} k_i^{\pm}, \quad k_i^+ k_i^- = k_i^- k_i^+ = 1,$$

$$k_i^+ X_i^{\pm} = q^{\pm 1} X_i^{\pm} k_i^+, \quad k_j^- X_i^{\pm} = q^{\mp 1} X_i^{\pm} k_i^-,$$

$$[X_i^+ X_j^-] = \delta_{ij} (k_i^{+2} - k_i^{-2})/(q - q^{-1}),$$

$$\Delta(k_i^{\pm}) = k_i^{\pm} \otimes k_i^{\pm}, \quad \Delta(X_i^{\pm}) = k_i^+ \otimes X_i^{\pm} + X_i^{\pm} \otimes k_i^-,$$

$$\varepsilon(X_i^{\pm}) = 0, \quad \varepsilon(k_i^{\pm}) = 1, \quad S(k_i^{\pm}) = k_i^{\pm}, \quad S(X_i^{\pm}) = - q^{\mp 1} X_i^{\pm}. \tag{1.1}$$

Здесь $1 \le i,j \le n$.

Пусть A — алгебра Хопфа и F — алгебра, наделенная структурой A-модуля. Алгебру F называют A-модульной, если умножение

$$m: F \otimes F \to F, \quad m(f_1 \otimes f_2) = f_1 f_2$$

является морфизмом A-модулей. В случае $A = U_q J$ это условие в силу (1.1) означает, что

$$k_i^{\pm} (f_1 f_2) = k_i^{\pm} (f_1) k_i^{\pm} (f_2), \tag{1.2}$$

$$k_i^{\pm} (f_1 f_2) = X_i^{\pm} (f_1) k_i^- (f_2) + k_i^+ (f_1) X_i^{\pm} (f_2) \tag{1.3}$$

при всех $t = 1,2,\ldots,n$ $f_1, f_2 \in F$. Последнее равенство является аналогом формулы Лейбница.

Содержательные примеры A-модульных алгебр — алгебры "функций на квантовых однородных пространствах" приведены в работе Н. Ю. Решетихина, Л. А. Тахтаджяна, Л. Д. Фаддеева [3]. Еще один пример — тензорная алгебра T, порожденная A-модулями $V_1, V_1^*, V_2, V_2^*, \dots, V_k, V_k^*$. Алгебры в [3] строятся факторизацией тензорных алгебр по идеалам, определяемым с помощью решений квантового уравнения Янга-Бакстера.

Как и в предельном случае $q = 1$, морфизмы A-модулей можно получать с помощью операции свертки тензоров (например, $V_j^* \otimes V_j \to \mathbf{C}$), а инварианты — с помощью канонических вложений $\mathbf{C} \to V_j \otimes V_j^*$. Нам понадобятся следующие хорошо известные свойства A-модулей.

Предложение 1.1. *Пусть U, V — A-модули и $l: V \otimes U \to \mathbf{C}$— морфизм A-модулей. Тогда $l(av \otimes u) = l(v \otimes S(a)u)$ при всех $a \in A$, $u \in U$, $v \in V$.*

Доказательство. В частном случае $V = U^*$ предложение 1.1 следует из определения U^*. Общий случай сводится к этому частному, потому что определяемый l линейный оператор $V \to U^*$ является морфизмом A-модулей:

$$V \underset{\simeq}{\to} V \otimes \mathbf{C} \to V \otimes U \otimes U^* \underset{l \otimes id}{\to} \mathbf{C} \otimes U^* \underset{\simeq}{\to} U^*.$$

Следствие 1.2. *Пусть F — A-модульная алгебра и ν: $F \to \mathbf{C}$ — морфизм A-модулей (инвариантный интеграл: $\int f d\nu \overset{\text{def}}{=} \nu(f)$). При всех $a \in A$, $f_1, f_2 \in F$ справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int (af_1)f_2\, d\nu = \int f_1\, (S(a)f_2) d\nu. \tag{1.4}$$

Предложение 1.3. *Рассмотрим A-модули V_1, V_2 и образ $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$ при каноническом изоморфизме $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_1, V_2) \simeq V_2 \otimes V_1^*$.*

1) *Каждый инвариант принадлежит образу $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$.*

2) *Если u — элемент образа $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$, то при всех $a \in A$*

$$(a \otimes 1)u = (1 \otimes S^{-1})u. \tag{1.5}$$

3) *Если при всех $a \in A$ элемент u удовлетворяет предыдущему равенству, то u — инвариант.*

Доказательство. Если $u \in V_2 \otimes V_1^*$ — инвариант, то умножение на него $V_1 \to V_2 \otimes V_1^* \otimes V_1$ и последующая свертка тензоров $V_2 \otimes V_1^* \otimes V_1 \to V_2 \otimes \mathbf{C} \simeq V_2$ дают элемент $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$. Первое утверждение доказано, а второе и третье вытекают из определений.

Следствие 1.4. *Пространство инвариантов модуля $V_2 \otimes V_1^*$ выделяется условием (1.5) и канонически изоморфно $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$.*

Дадим определение алгебры сплетающих ядер. С каждой алгеброй F свяжем алгебру F^{op}, получаемую из F заменой умножения на противоположное: $m^{\mathrm{op}}(f_1 \otimes f_2) = f_2 \cdot f_1$. Имеет место следующее предложение.

Предложение 1.5. *Если F_1, F_2 — A-модульные алгебры, то инварианты в $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ образуют подалгебру.*

Доказательство. С помощью следствия 1.4 нетрудно получить систему уравнений, выделяющую инварианты

$$(a \otimes 1)f = (1 \otimes S^{-1})f. \tag{1.6}$$

Наделим алгебру $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ структурой $A \otimes A^{\mathrm{op}}$-модульной алгебры, полагая $(a_2 \otimes a_1) f_2 \otimes f_1 = a_2 f_2 \otimes S^{-1}(a_1) f_1$ при всех a_1, $a_2 \in A$, $f_2 \in F_2$, $f_1 \in F_1^{\mathrm{op}}$. Система уравнений (1.6) принимает вид $(a \otimes 1)f = (1 \otimes a)f$. Ее решения, очевидно, образуют подалгебру.

Определение. Подалгебру инвариантов $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ назовем алгеброй сплетающих ядер.

Если существует инвариантный интеграл $\nu : F_1 \to \mathbb{C}$, то отображение $i : F_1 \to F_1^*$, определяемое равенством $(if_1)(f_2) = \int f_1 f_2 \, d\nu$, является морфизмом A-модулей. Это позволяет сопоставить каждому сплетающему ядру K морфизм $F_1 \to F_2$. Другими словами, сплетающим ядрам отвечают интегральные операторы $f_1 \to id \otimes \nu(K(1 \otimes f_1))$ сплетающие представления алгебры A в F_1 и в F_2 (умножение подынтегральных функций производится в алгебре $F_2 \otimes F_1$, а не в $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$).

Отметим, что замена $F_1 \to F_1^{\mathrm{op}}$ ведет к изменению знаков коммутаторов и в пределе $q \to 1$ дает упоминавшееся выше изменение знака в формуле для скобки Пуассона на декартовом произведении. Алгебру $U_q sl_{n+1}$ наделим антилинейной инволюцией: $(k_i^{\pm})^* = k_i^{\pm}$, $i = 1,\ldots,n$,

$$(X_1^{\pm})^* = -X_1^{\mp}, \quad (X_j^{\pm})^* = X_j^{\mp}, \quad j = 2,3,\ldots,n.$$

Отметим, что она является антиавтоморфизмом алгебры и автоморфизмом коалгебры. Кроме того, $\left(S\left((S(a))^*\right)\right)^* \equiv a$, т.е. пара $U_q su(n,1) = (U_q sl_{n+1}, *)$ является $*$-алгеброй Хопфа. Обозначение $U_q su(n,1)$ оправдано потому, что в предельном случае $q = 1$ представления этой алгебры связаны с унитарными представлениями группы $SU(n,1)$.

Интеграл $F_1 \to \mathbb{C}$, при наличии инволюции в F_1, будем выбирать вещественным $\int f^* \, d\nu = \int \overline{f \, d\nu}$ и, более того, положительным: $\int f^* f \, d\nu > 0$, $f \neq 0$. Скалярное произведение введем стандартным образом $(f_1, f_2) = \int f_2^* f_1 \, d\nu$. В случае $*$-алгебр Хопфа в определение A-модульной алгебры будем включать требование согласованности инволюций

$$(af)^* = (S(a))^* f^*, \ a \in A, \ f \in F_1. \tag{1.7}$$

Это условие равносильно требованию, чтобы квазирегулярное представление $R(a)f = af$ алгебры A в пространстве F было ее *-представлением. В самом деле,

$$(af_1, f_2) = \int \left(S^{-1}(a) f_2^*\right) f_1 \, d\nu = \int (a^* f_2)^* f_1 \, d\nu = (f_1, a^* f_2).$$

Нетрудно доказать единственность такой инволюции в алгебре ядер, что при всех $a \in A, f \in F_1$.

$$\int K^*(1 \otimes f) \, d\nu = \left(\int K(1 \otimes f^*) \, d\nu\right)^*,$$

то есть, что вещественным $K = K^*$ ядрам отвечают вещественные интегральные операторы. Если K — сплетающее ядро, то при всех $a \in A, f \in F_1$

$$\int K^*(1 \otimes af) \, d\nu = \left(\int K\left(1 \otimes (af)^*\right) \, d\nu\right)^* = \left(\int K\left(1 \otimes (S(a))^* f^*\right) \, d\nu\right)^* =$$

$$= \left(\left(S(a)\right)^* \int K\left(1 \otimes f^*\right) \, d\nu\right)^* = a\left(\int K\left(1 \otimes f^*\right) \, d\nu\right)^* = a \int K^*(1 \otimes f) \, d\nu.$$

Значит, ядро K^* также является сплетающим.

Найти ядро K^* по заданному K можно, используя явные формулы для инвариантного интеграла. Если алгебра F_1 обладает точным неприводимым *-представлением π, то, как правило, удается предъявить такой неотрицательный элемент $Q \in F_1$ что $\int f \, d\nu = \operatorname{tr} \pi(fQ)$ при всех $f \in F_1$. В случае приводимого представления π обычный след заменяется следом на соответствующей алгебре фон–Неймана. (см. (2.8)). Имеем

$$K^* = (1 \otimes Q)^{-1} K^{* \otimes *}(1 \otimes Q). \tag{1.8}$$

(В рассмотренных в работе примерах элементы Q, Q^{-1} принадлежат не самой алгебре F_1 основных функций, а пространству обобщенных функций (см. § 2).) Следуя [3], опишем $U_q su(n,1)$-модульную алгебру $\mathbf{C}^{n+1}_{q,q-1}$ *, являющуюся квантовым аналогом алгебры функций на эрмитовом пространстве . Введем алгебру с инволюцией и с единицей, определяемую своими образующими $\{ z_j \}_{j=0}^{n}$ и соотношениями

$$z_i z_j = q z_j z_i, \ i < j, \ z_i z_j^* = q z_j^* z_i, \qquad i \neq j, \tag{1.9}$$

$$z_i z_i^* - z_i^* z_i = (q^{-2} - 1) \sum_{k > i} z_k z_k^*, \qquad i > 0, \tag{1.10}$$

$$z_0 z_0^* - z_0^* z_0 = -(q^{-2} - 1) \sum_{k > 0} z_k z_k^*. \tag{1.11}$$

* В [3] эта алгебра обозначалась $\mathbf{C}^{2(n+1)}_{q,q-1}$.

Действие $U_q su(n,1)$ на образующие z_j определим равенствами

$$X_i^+ z_j = \delta_{ij} z_{j-1}, \; j \neq 0, \; X_i^+ z_0 = 0, \tag{1.12}$$

$$X_i^- z_j = \delta_{i,j+1} z_{j+1}, \; j \neq n, \; X_i^- z_n = 0, \tag{1.13}$$

$$k_i^{\pm} z_j = (\delta_{j-1,j} q^{\pm 1/2} + \delta_{ij} q^{\mp 1/2}) z_j. \tag{1.14}$$

Продолжение на всю алгебру осуществим с помощью (1.2), (1.3), (1.7). Например, в силу (1.7)

$$X_i^+ z_j^* = -q^{-1} \delta_{i,j+1} z_{j+1}, \; j \neq 0, \; 0 < j < n, \tag{1.15}$$

$$X_i^- z_j^* = q \delta_{ij} z_{j-1}^*, \; j > 1, \tag{1.16}$$

$$k_i^{\pm} z_j^* = (\delta_{i-1,j} q^{\mp 1/2} + \delta_{ij} q^{\pm 1/2}) z_j^*. \tag{1.17}$$

Образующие алгебры $C_{q,q^{-1}}^{n+1} \otimes C_{q,q^{-1}}^{n+1}$ будем обозначать через $z_j \otimes 1$ и $1 \otimes \zeta_j$, а порой просто через z_j и ζ_j, $j = 0,\ldots,n$. Как векторные пространства, алгебры $C_{q,q-1}^{n+1} \otimes C_{q,q-1}^{n+1}$ и $C_{q,q-1}^{n+1} \otimes \left(C_{q,q-1}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}$ совпадают.

Введем ядра $t, \tau, K_1, K_2 \in C_{q,q-1}^{n+1} \otimes \left(C_{q,q-1}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}$

$$t = z_0 z_0^* - \sum_{j=1}^{n} z_j z_j^*, \; \tau = \zeta_0 \zeta_0^* - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \zeta_j^*,$$

$$K_1 = z_0 \zeta_0^* - \sum_{j=1}^{n} z_j \zeta_j^*, \; K_2 = z_0^* \zeta_0 - \sum_{j=1}^{n} q^{-2j} z_j^* \zeta_j.$$

Из определений следует

Предложение 1.6. *Элементы t, τ, K_1, K_2 являются сплетающими ядрами, причем элементы t, τ принадлежат центру алгебры $C_{q,q-1}^{n+1} \otimes \left(C_{q,q-1}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}$ и*

$$K_1 K_2 - q^2 K_2 K_1 - (1 - q^2) t \tau = 0. \tag{1.18}$$

Следствие 1.7. *Элемент $(K_1 K_2)^m$ является сплетающим ядром при всех $m \in \mathbb{Z}_+$.*

В теории представлений группы $SU(n,1)$ важную роль играют нецелые степени ядра $P = K_1 K_2$. Они будут определены в § 3.

§ 2. Обобщенные функции и сплетающие ядра

Напомним [4] определения алгебр регулярных функций на квантовом конусе $\mathbb{C}[C^{2n+1}]_q$ и квантовом гиперболоиде $\mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_q$. Это фактор-алгебры $\mathbb{C}_{q,q-1}^{n+1}$ по идеалам, порожденными элементами центра:

$$f_0 = z_0 z_0^* - \sum_{j>0}^{n} z_j z_j^*, \quad f_1 = f_0 - 1.$$

Так как элементы f_0, f_1 являются инвариантами, причем $f_0 = f_0^*$, то алгебры $\mathbb{C}[C^{2n+1}]_q$, $\mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_q$ наследуют структуру $U_q su(n,1)$-модульных алгебр. К сожалению, в алгебре $\mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_q \otimes \mathbb{C}[C^{2n+1}]_q^{\mathrm{op}}$ содержатся лишь полиномиальные сплетающие ядра.

Для того чтобы определить пространства обобщенных функций, получим следствия коммутационных соотношений (1.9)-(1.11).

Предложение 2.1. *Пусть* $x_i \in \mathbb{C}_{q,q-1}^{n+1}$,

$$x_0 = z_0 z_0^* - \sum_{k>0}^{n} z_k z_k^*, \; x_j = \sum_{k \geq j} z_k z_k^*, \; j > 0. \tag{2.1}$$

Тогда $x_i x_j = x_j x_i$,

$$z_i x_j = x_j z_i, \text{ при } i \geq j,$$

$$z_i x_j = q^2 x_j z_i \text{ при } i < j.$$

Следствие 2.2. *Если* $f \in \mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_q$, *либо* $f \in \mathbb{C}[C^{2n+1}]_q$ *то существует и единственно разложение*

$$f = \sum_{\{IJ \mid i_0 j_0 = \ldots = i_n j_n = 0\}} z^{*I} f_{IJ}(x_1, \ldots, x_n) z^J, \tag{2.2}$$

где

$$I = (i_0, \ldots, i_n). \quad J = (j_0, \ldots, j_n), \quad z^{*I} = z_0^{*i_0} z_1^{*i_1} \ldots z_n^{*i_n}, \quad z^J = z_0^{j_0} z_1^{j_1} \ldots z_n^{j_n}.$$

Разумеется, мы сохранили для образующих фактор-алгебр прежние обозначения, сумма (2.2) конечна и коэффициенты f_{IJ} являются многочленами.

Действие образующих $X_i^{\pm}$, $k_i^{\pm}$ на члены ряда (2.2) описывается разностными операторами, как следует из (1.2), (1.3) и следующего простого утверждения.

Предложение 2.3. *Для любого полинома* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *в алгебре* $\mathbb{C}_{q,q-1}^{n+1}$ *имеют место равенства*:

$$X_i^+ f = q^{3/2} z_i^* (B_i f)(x_1, \ldots, x_i, q^2 x_i, \ldots, q^2 x_n) z_{i-1}, \tag{2.3}$$

$$X_i^- f = -q^{3/2} z_{i-1}^* (B_i f)(x_1, \ldots, x_i, q^2 x_{i+1}, \ldots, q^2 x_n) z_i, \quad i \neq 1, \tag{2.4}$$

$$X_1^- f = q^{3/2} z_0^*(B_1 f)(x_1, q^2 x_2, \ldots, q^2 x_n) z_1, \tag{2.5}$$

$$k_i^{\pm} f = f, \tag{2.6}$$

где

$$B\colon f(t) \to \left(f(q^2 t) - f(t)\right) / (q^2 t - t),$$
$$B_i = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{i-1} \otimes B \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1.$$

Равенства (2.3) - (2.6) и коммутационные соотношения

$$z_i f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, q x_{i+1}, \ldots, q x_n) z_i,$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) z_i^* = z_i^* f(x_1, \ldots, x_i, q x_{i+1}, \ldots, q x_n)$$

позволяют расширить кольцо полиномов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, которому до сих пор принадлежали коэффициенты f_{IJ} ряда (2.2). Именно, пусть

$$M_\beta = \{ (q^{2m_1}, \ldots, q^{2m_n}) \in \mathbb{R}^n \mid (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n, m_1 < m_2 < \ldots < m_n \}.$$

Введем в рассмотрение алгебру D_β функций на $\mathbb{R}$, имеющих конечный носитель $\operatorname{cardsupp}(f) < \infty$ и таких, что $\operatorname{supp} f \subset M_\beta$. Основными функциями на квантовом гиперболоиде будем называть суммы вида (2.2), где $f_{IJ} \in D_\beta$. Точно так же определяются основные функции на квантовом конусе. Пространства основных функций обозначим $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$, $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$. Пусть $f^{(m)}$ — последовательность элементов алгебры $\mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_{q,\beta}$ и $f \in D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$. Будем говорить, что последовательность $f^{(m)}$ сходится к f если на множестве M_β поточечно $\lim\limits_{m \to \infty} f_{IJ}^{(m)} = f_{IJ}$ при всех I, J, причем

$$\operatorname{card} \bigcup_m \{ (I,J) \mid f_{IJ}^{(m)} \neq 0 \} < \infty .$$

Точно также определяется сходимость последовательности элементов $f^{(m)} \in \mathbb{C}[C^{2n+1}]_{q,\beta}$ к $f \in D(C^{2n+1})_{q,\beta}$. Наделим $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ и $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$ структурами $U_q\, su(n,1)$-модульных алгебр.

Предложение 2.4. 1) *Умножение и действие алгебры* $U_q\, su(n,1)$ *продолжаются по непрерывности с* $\mathbb{C}[C^{2n+1}]_{q,\beta}$ *на* $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ *и с* $\mathbb{C}[H_+^{2n+1}]_q$ *на* $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$.

2) *Равенство*

$$\int f\, d\nu_\beta = (1 - q^2)^n \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in M_\beta} f_{00}(x_1, \ldots, x_n) x_1, \ldots, x_n \tag{2.7}$$

определяет инвариантные интегралы на $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ *и на* $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$.

3) *Инволюция продолжается по непрерывности на* $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$, $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$ *и* $\int f^* f\, d\nu > 0$ *при* $f \neq 0$.

Доказательство. При проверке условий 1), 2) алгебру Хопфа $U_q sl_{n+1}$ можно заменить ее подалгебрами, изоморфными $U_q sl_2$ и порожденными элементами $\{X_i^{\pm}, k_i^{\pm}\}$ с фиксированным значением индекса i. Остается воспользоваться равенствами (1.12)-(1.17) и (2.3)-(2.6). Докажем 3). Инволюция продолжается очевидным образом. Положительность интеграла (2.7) будет следовать из тождества

$$\int f\,d\nu = (1-q^2)^n \frac{1}{2\pi} \int tr\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(fx_1,\dots,x_n), \tag{2.8}$$

где при $\varepsilon = 0$ $\pi_0^{(\beta,\varphi)}$ — $*$-представления алгебры $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$, а при $\varepsilon = 1$ $\pi_1^{(\beta,\varphi)}$ — $*$-представления алгебры $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$. Представления $\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}$ будут определены в пространстве функций ψ с конечным носителем cardsupp$(f) < \infty$ на декартовом произведении $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^{n-1}$. Скалярное произведение в этом пространстве вводится стандартным образом

$$(\psi_1,\psi_2) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)} \psi_1(j_1,\dots,j_n)\overline{\psi_2(j_1,\dots,j_n)},$$

а операторы $\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(z_k)$, $\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(f(x_1,\dots,x_n))$ — равенствами

$$\left(\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(z_n)\psi\right)(j_1,\dots,j_n) = e^{-i\varphi} q^{\beta+j_1+\dots+j_k}\psi_1(f_1,\dots,f_n),$$

$$\left(\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(z_k)\psi\right)(j_1,\dots,j_n) = e^{-i\varphi} q^{\beta+j_1+\dots+j_k}\left(1-q^{2j_{k+1}}\right)\cdot$$

$$\cdot\psi_1(f_1,\dots,j_k,j_{k+1}+1,j_{k+2},\dots,f_n),\ 0<k<n,$$

$$\left(\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(z_0)\psi\right)(j_1,\dots,j_n) = q^\beta(\varepsilon+q^{2j_1})\ \psi_1(j_1+1,j_2,\dots,f_n),$$

$$\left(\pi_\varepsilon^{(\beta,\varphi)}(f)\psi\right)(j_1,\dots,j_n) = \psi(j_1,\dots,j_n)\cdot f\left(q^{2(\beta+j_1)},\dots,q^{2(\beta+j_1+\ +j_n)}\right).$$

Положительность интеграла вытекает из точности представлений

$$\otimes\int\pi_0^{(\beta,\varphi)}\,d\varphi,\ \otimes\int\pi_1^{(\beta,\varphi)}\,d\varphi.$$

Замечания. 1) Алгебры $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ и $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$ будут играть роль алгебр F_1 и F_2 (см. § 1) соответственно.

2) Нетрудно получить полный список таких неприводимых $*$-представлений π алгебр $\mathbf{C}[C^{2n+1}]_q$, $\mathbf{C}[H_+^{2n+1}]_q$, для которых операторы $\pi(x_1),\dots,\pi(x_n)$ обладают хотя бы одним общим собственным вектором. Представления основной серии выделяются условием $\pi(x_n)\neq 0$, параметризуются точками двумерного тора (β,φ) и описываются приведенными выше формулами. Представления вырожденных серий либо одномерны, либо получаются из представлений для меньших размерностей n:

$$\mathbf{C}[C^{2n+1}]_q/(z_n = z_n^* = 0) \simeq \mathbf{C}[C^{2n-1}]_q,$$

$$\mathbf{C}[H_+^{2n+1}]_q/(z_n = z_n^* = 0) \simeq \mathbf{C}[H_+^{2n-1}]_q.$$

Предельный переход $q \to 1$ наделяет H_+^{2n+1} и $C^{2n+1} \setminus \{0\}$ структурой пуассоновых многообразий и устанавливает соответствие представлений основной серии и симплектических листов наибольшей размерности ($\arg z_n = \varphi$). Инвариантный интеграл в пределе дает меру Лиувилля, а представлениям вырожденных серий отвечают симплектические листы размерности $d < 2n$ (см. [4]). Параметр β, в отличие от φ, не имеет простого классического ($q \to 1$) аналога, поскольку β разделяет однородные компоненты квантовых $SU(n,1)$-пространств, а при $q = 1$ группа $SU(n,1)$ транзитивно действует на $C^{2n+1} \setminus \{0\}$ и на H_+^{2n+1}.

В заключение, определим пространства обобщенных функций и пространство ядер интегральных операторов.

Наделим алгебры $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ и $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$ слабейшими из топологий, в которых непрерывны линейные функционалы $f \to f_{IJ}(x_1,\ldots,x_n)$ при всех I, J, $(x_1,\ldots,x_n) \in M_\beta$.

Пополнения $D(C^{2n+1})'_{q,\beta}$ и $D(H_+^{2n+1})'_{q,\beta}$ будем называть пространствами обобщенных функций и по непрерывности наделять структурой $U_q sl_{n+1}$-модулей. Как следует из (1.4), спаривания

$$D(C^{2n+1})'_{q,\beta} \otimes D(C^{2n+1})_{q,\beta} \to \mathbf{C},$$

$$D(H_+^{2n+1})'_{q,\beta} \otimes D(H_+^{2n+1})_{q,\beta} \to \mathbf{C},$$

$$f \otimes \psi \to \int f\psi \, d\nu$$

доставляют канонические изоморфизмы модулей обобщенных функций и дуальных модулей к $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$ и $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$. По непрерывности определяются произведения основных функций на обобщенные, что позволяет наделить $D(H_+^{2n+1})'_{q,\beta}$ структурой бимодуля над $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$, а $D(C^{2n+1})'_{q,\beta}$ — бимодуля над $D(C^{2n+1})_{q,\beta}$. Структуры $U_q sl_{n+1}$-модуля и бимодуля над алгеброй основных функций согласованы (см. (1.2), (1.3)).

Обобщенные функции допускают разложения в ряды (2.2) и их можно отождествлять с формальными рядами (2.2), коэффициенты F_{IJ} которых являются функциями на множестве M_β. Топология совпадает с топологией поточечной сходимости коэффициентов $f_{IJ}(x_1,\ldots,x_n)$.

Для тензорного произведения алгебр $\mathbf{C}[H_+^{2n+1}]_q \otimes \mathbf{C}[C^{2n+1}]_q^{\mathrm{op}}$ разложение (2.2) принимает вид

$$f = \sum_{\{I,J \mid i_0 j_0 = \ldots = i_n j_n = 0\}} \sum_{\{I',J' \mid i'_0 j'_0 = \ldots = i'_n j'_n = 0\}} z^{*I} \zeta^{I'} f_{IJI'J'}(x_0,\ldots,x_n; \xi_0,\ldots,\xi_n) z^J \zeta^{*J'}, \quad (2.9)$$

где

$$\xi_0 = \zeta_0^* \zeta_0 - \sum_{j>0} \zeta_j^* \zeta_j, \ \xi_j = \sum_{k \ge j} \zeta_k^* \zeta_k, \ \zeta^{I'} = \zeta_0^{i'_0} \ldots \zeta_n^{i'_n}, \ \zeta^{*J'} = \zeta_0^{j'_0} \ldots \zeta_n^{j'_n}.$$

Переходя от конечных сумм к формальным рядам и от многочленов $f_{IJI'J'}$ к функциям на множестве $M_\beta \times M_\beta$, получаем пространство ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ интегральных операторов. Рассуждая так же, как прежде, мы наделяем пространство $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ согласованными между собой структурами $U_q sl_{n+1} \otimes U_q sl_{n+1}$-модуля и бимодуля над алгеброй $D(H_+^{2n+1})_{q,\beta} \otimes D(C^{2n+1})_{q,\beta}$. Сплетающими ядрами будем называть решения системы уравнений (1.6) в пространстве ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$. Как отмечалось в § 1, сплетающим ядрам отвечают сплетающие интегральные операторы $D(C^{2n+1})_{q,\beta} \to D(H_+^{2n+1})_{q,\beta}$.

§3. Нецелые степени ядра Пуассона

Как будет показано, степени P^λ ядра Пуассона при $\lambda \in \mathbb{N}$ разлагаются в q-биномиальные "ряды" с коэффициентами, рационально зависящими от $q^{2\lambda}$. Это позволяет совершить аналитическое продолжение по параметру λ. Сходимость полученных рядов в пространстве ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ устанавливается также, как следующее

Предложение 3.1. *Пусть* $K' = \sum\limits_{j=1}^{n-1} z_j \zeta_j^*, \quad K'' = \sum\limits_{j=1}^{n-1} q^{-2j} z_j \zeta_j^*.$

Тогда ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1+m_2=m} c_{m_1 m_2} K''^{m_2} K'^{m_1} \tag{3.1}$$

сходится в пространстве ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ ***при любых коэффициентах*** $c_{m_1 m_2} \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Выбрав точку $(x_0,\dots,x_n; \xi_0,\dots,\xi_n) \in M_\beta \times M_\beta$ и четверку мультииндексов I, J, I', J', приведем члены ряда (3.1) к "нормальной форме" (2.9) с помощью коммутационных соотношений (1.9)-(1.11). Достаточно показать, что при некоторм $M \in \mathbb{N}$ члены с номерами $m > M$ дают нулевой вклад в $f_{IJI'J'}(x_0,\dots,x_n; \xi_0,\dots,\xi_n)$. Но это следствие равенств

$$z_1^{*m_1} z_2^{*m_2} \dots z_{n-1}^{*m_{n-1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} =$$

$$= \mathrm{const}_1 (m_1,\dots,m_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_k} \left(x_k - q^{-2} x_{k+1}\right),$$

$$\zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \dots \zeta_{n-1}^{m_{n-1}} \zeta_1^{*m_1} \zeta_2^{*m_2} \dots \zeta_{n-1}^{*m_{n-1}} =$$

$$= \mathrm{const}_2 (m_1,\dots,m_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_k} \left(\xi_k - q^{-2} \xi_{k+1}\right)$$

в алгебре $C_{q,q+1}^{n+1} \otimes \left(C_{q,q+1}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}$ и определения M_β.

В силу (1.18) при $\lambda \in \mathbf{Z}_+$ степени $P = K_1 K_2$ равны:

$$P^\lambda = q^{\lambda(\lambda+1)}\left(z_0^* \zeta_0 - K'' - q^{-2n} z_n^* \zeta_n\right)^\lambda \left(z_0 \zeta_0^* - K' - z_n \zeta_n^*\right)^\lambda. \tag{3.2}$$

Отметим, что слагаемые в каждой из скобок квазикоммутируют, например,

$$(z_0 \zeta_0^*) K' = q^2 K'(z_0 \zeta_0^*), \quad K'(z_n \zeta_n) = q^2 (z_n \zeta_n^*) K',$$

$$(z_0 \zeta_0^*) K'' = q^{-2} K''(z_0 \zeta_0^*)\ , \quad K''(z_n \zeta_n) = q^{-2}(z_n^* \zeta_n) K''.$$

Это позволяет использовать хорошо известный q-аналог формулы Ньютона:

Предложение 3.2. *Если a, b — такие элементы ассоциативной алгебры, что $ab = q^2 ba$, то*

$$(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^2; q^2)_m}{(q^2; q^2)_j (q^2; q^2)_{m-j}} b^j a^{m-j}\ ,$$

$$(x; q^2)_k = (1-x)(1-q^2 x)\ldots(1-q^{2k-2}x).$$

Следствие 3.3.

$$(z_0 \zeta_0^* - K' - z_n \zeta_n^*)^\lambda =$$

$$= \sum_k \frac{(q^{2\lambda}; q^{-2})_k}{(q^2; q^2)_k} \sum_i \frac{(q^{2(\lambda+k)}; q^{-2})_k}{(q^2; q^2)_i} q^{-2(i+k)(\lambda-i-k)} (z_0 \zeta_0^*)^{\lambda-i-k} (-z_n \zeta_n^*)^i (-K')^k,$$

$$(z_0^* \zeta_0 - K'' - q^{-2n} z_n^* \zeta_n)^\lambda = \sum_k \frac{(q^{-2\lambda}; q^2)_k}{(q^{-2}; q^{-2})_k} (K'')^k \times$$

$$\times \sum_i \frac{(q^{-2(\lambda-k)}; q^2)_i}{(q^{-2}; q^{-2})_i} q^{2ki} (-q^{-2n} z_n^* \zeta_n)^i (z_0 \zeta_0^*)^{\lambda-i-k}.$$

Равенство (3.2) и следствие (3.3) дают разложение степени P^λ в сумму

$$P^\lambda = \sum_{l_1 l_2} (-K'')^{l_1} f_{l_1 l_2}(q^{2\lambda}) K'^{l_2} \tag{3.3}$$

вида (3.1), где

$$f_{l_1 l_2}(q^{2\lambda}) = \sum_{i_1 i_2} q^{\lambda(\lambda+1)} \mathrm{const}\,(\lambda, i_1, i_2, l_1, l_2)$$

$$(-q^{-2n} z_n^* \zeta_n)^{i_1} (z_0 \zeta_0^*)^{\lambda-l_1-i_1} (z_0 \zeta_0^*)^{\lambda-l_2-i_2} (-z_n^* \zeta_n)^{i_2}\ , \tag{3.4}$$

$$\mathrm{const}\,(\lambda, i_1, i_2, l_1, l_2) = q^{l_1(l_1+1)-l_2(l_2+1)} \frac{(q^{-2\lambda}; q^2)_{l_1} (q^{-2\lambda}; q^2)_{l_2}}{(q^2; q^2)_{l_1} (q^2; q^2)_{l_2}}$$

$$(-1)^{l_1+l_2+i_1+i_2} q^{i_1(i_1+1)-i_2(i_2-1)+2i_2l_2+2i_1l_1+2(i_2+l_2)^2}$$

$$\frac{(q^{-2(\lambda-l_1)}; q^2)_{i_1} (q^{-2(\lambda+l_1)}; q^2)_{i_2}}{(q^2; q^2)_{i_1} (q^2; q^2)_{i_2}} . \tag{3.5}$$

Имеет место следующее предложение.

Предложение 3.4. *Степени ядра Пуассона P^λ допускают разложения (2.9), причем коэффициенты степенных рядов $\xi_1^{-\lambda} f_{IJI'J'}$ являются полиномами от $q^{2\lambda}$, $q^{-2\lambda}$ (в частности рациональными функциями параметра $q^{2\lambda}$).*

Для доказательства достаточно перейти к "нормальному" упорядочению образующих (2.9) в P^λ с помощью равенств (3.3), (3.4), (3.5) и следующего несложного утверждения

Предложение 3.5. *Пусть $m_1 \le \lambda$, $m_2 \le \lambda$, $m = \max\,(m_1, m_2)$. Тогда*

$$q^{\lambda(\lambda+1)}(z_0^*\zeta_0)^{\lambda-m_1}(z_0^*\zeta_0)^{\lambda-m_2} =$$

$$= q^{m(2\lambda-m+1)} (z_0^*\zeta_0)^{m-m_1} \frac{(-q^{-2(\lambda-m)}x_1; q^2)_\infty}{(-x_1; q^2)_\infty} \xi_1^{\lambda-m} (z_0\zeta_0^*)^{m-m_2}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$(t;q^2)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{2j}t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^l q^{l(l-1)}}{(q^2; q^2)_l} .$$

З а м е ч а н и е. В доказательстве предложения 3.5 центральный момент - сокращение множителя q^{λ^2} за счет того, что $\zeta_0^{\lambda-m}\zeta_0^{*(\lambda-m)} = q^{-(\lambda+m)(\lambda+m+1)}\xi_1^{\lambda-m}$.

Теперь с помощью аналитического продолжения мы можем определить P^λ при всех $\lambda \in \mathbf{R}$, как формальные ряды. Равенства (3.3)-(3.6) остаются в силе. Приведем коэффициенты $f_{l_1l_2}$ ряда (3.3) к виду (2.9):

$$f_{l_1l_2} = \sum_{\{j_0j_nk_0k_n \mid j_0k_0=j_nk_n=0\}} (z_0^*\zeta_0)^{j_0}(-q^{-2n}z_n^*\zeta_n)^{j_n}\xi_1^\lambda \times$$

$$\times f_{l_1l_2j_0j_nk_0k_n}(q^{2\lambda}; x_1, x_n, \xi_1^{-1}\xi_n)(z_0\zeta_0^*)^{k_0}(z_n\zeta_n^*)^{k_n}. \tag{3.7}$$

Как видно из доказательства предложения (3.1), для построения сходящегося ряда в пространстве ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ достаточно установить сходимость каждого из степенных рядов $f_{l_1l_2j_0j_nk_0k_n}$ в некоторой окрестности нуля и аналитически продолжить эти ряды. Напомним определение базисного гипергеометрического ряда ${}_{r+1}\varphi_{r+j}$ [5]:

$$
{}_{r+1}\varphi_{r+j}\left(\begin{matrix} a_0,\ldots,a_r \\ \\ b_1,\ldots,b_{r+j}\end{matrix}\; ; q,x\right) =
$$

$$
= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_0;q)_m \ldots (a_r;q)_m \,(-1)^{jm}\, q^{jm(m-1)/2}\, x^n}{(b_1;q)_m \ldots (b_{r+j};q)_m\,(q;q)_n}.
$$

Предложение 3.6.

$$
f_{000000}(q^{2\lambda}; x_1, x_n, \xi_1^{-1}\xi_n) =
$$

$$
= \frac{(-q^{-2\lambda}x_1; q^2)_\infty}{(-x_1; q^2)_\infty}\, {}_2\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-2\lambda}, q^{-2\lambda}; q^2; -q^{-2(\lambda = n-2)}\, x_n \xi_n \xi_1^{-1} \\ q^2, -q^{-2\lambda}x_1 \end{matrix}\right). \tag{3.8}
$$

Доказательство сводится к прямой проверке и использует равенства (3.4), (3.5), а также предложение 3.5.

Предложение 3.7. *При всех* $\lambda \in \mathrm{R}$ *ряд* $f_{l_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n}$ *сходится в окрестности нуля и допускает аналитическое продолжение в полупространство* $x_1 > 0$.

В частном случае $l_1 = l_2 = j_0 = j_n = k_0 = k_n$ это предложение является следствием предыдущего. В общем случае оно доказывается аналогично предложению 3.6. Именно, аналитическое продолжение достигается применением (3.6) а сходимость обеспечивается множителем $q^{j_1^2 + i_2^2}$ (3.5).

Определение. При вещественных λ равенства (3.3), (3.7) и предложение 3.7 определяют сходящийся ряд в пространстве ядер $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$. Его сумму мы будем называть степенью ядра Пуассона и обозначать P^λ.

Следуя (1.8), введем в пространстве ядер инволюцию: $z_j \to z_j^*$, $f(x_1,\ldots,\xi_n) \to f(x_1,\ldots,\xi_n)$, $\zeta_j \to (\xi_1,\ldots,\xi_n)^{-1}\zeta_j^*(\xi_1,\ldots,\xi_n) = q^{2(j-n)}\zeta_j^*$. Очевидно, $(K'')^* = q^{-2n}K'$. Значит, $P^\lambda = (P^\lambda)^*$.

Предложение 3.8. *При всех* $\lambda \in \mathrm{R}$ *ядро* $P^\lambda \in K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ *является сплетающим.*

Доказательство. Рассмотрим ядро $L(\lambda) = (\xi \otimes 1 - 1 \otimes S^{-1}(\xi))(P^\lambda)$. В силу равенств (1.9), (1.10), (2.3)-(2.6), (1.12)-(1.17) коэффициенты разложения ядра $L(\lambda)$ в ряд (2.9) являются аналитическими функциями переменных $x_1,\ldots,x_n$, $\xi_1^{-1}\xi_2,\ldots,\xi_1^{-1}\xi_n$ в области $x_1 > 0$. Вблизи нуля они разлагаются в степенные ряды с коэффициентами, рационально зависящими от $q^{2\lambda}$. Но в точках q^2, q^2, q^6, ... эти рациональные функции обращаются в нуль, так как ядра P, а значит, и P^λ, $\lambda \in \mathbf{Z}_+$- сплетающие. Таким образом, $L(\lambda) = 0$. Предложение 3.8.доказано.

Так же, как предложение 3.8 доказывается равенство $P^{\lambda} \cdot P^{m} = P^{m} \cdot P^{\lambda} = P^{\lambda+m}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Некоторые применения сплетающих ядер связаны с тем, что они являются производящими функциями для сферических функций на квантовых однородных пространствах.

Пример. При $n = 1$, $\lambda = -(l+1)$, $l \in \mathbb{Z}_+$ функция f_{000000} является зональной сферической функцией, отвечающей конечномерному представлению спина l квантовой группы Sl_2. В силу (3.8)

$$f_{000000} = \frac{(-q^{2(l+1)}x_1; q^2)_\infty}{(-x_1; q^2)_\infty} \, {}_2\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{2(l+1)}, q^{2(l+1)}; q^2; -q^{-2l}x_1 \\ q^2, q^{2(l+1)}x_1 \end{matrix} \right) =$$

$$= {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} q^{2(l+1)}, q^{-2l}; q^2; -qx \\ q^2 \end{matrix} \right) \tag{3.9}$$

(мы воспользовались q-аналогом преобразования Пфаффа см. (1.32) в [5]). Правая часть равенства (3.9) — зональная сферическая функция [6]. Полученная в [7] производящая функция q-аналогов коэффициентов Клебша–Гордана также является сплетающим ядром в смысле § 1 настоящей работы.

§ 4. Преобразование Радона

Нас интересуют функции ядра Пуассона, отличные от многочленов. В § 3 были определены степени $P^{\lambda} \in K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. В этом параграфе мы получим их разложение

$$P^{\lambda} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2(j+\beta)\lambda} R_j, \tag{4.1}$$

где $R_j \in K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$. Равенство (4.1) позволяет интерпретировать ядра R_j, как δ-функции $\delta(P - q^{2(j+\beta)})$, а интегральные преобразования с такими ядрами — как преобразования Радона.

В § 3 нас интересовали функции $f_{l_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n}$ при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$. Теперь зафиксируем $(x_1, \ldots, x_n) \in M_\beta$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in M_\beta$.

Предложение 4.1. *После замены переменной $q^{2\lambda} = u$ функции $f_{l_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n}(u)$ оказываются голоморфными в проколотых ($u \neq 0$) окрестностях нуля.*

Это утверждение следует из равенств (3.5), (3.6) и коммутационных соотношений между образующими алгебры $\mathbb{C}_{q,q^{-1}}^{n+1} \otimes \left(\mathbb{C}_{q,q^{-1}}^{n+1}\right)^{op}$.

Следствие 4.2. *Существуют такие функции* $r_{ml_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n}$ *на множестве* $M_\beta \times M_\beta$, *что*

$$f_{l_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ml_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n} q^{2m\lambda}. \tag{4.2}$$

Подставив (4.2) в (3.7), обнаруживаем, что зависимость от показателя степени λ имеется лишь у сомножителя $(\xi_1 q^{2m})^\lambda$. Значит, вклад в $\delta(P-a)$ дают те значения ξ_1, для которых $\xi_1 = aq^{-2m}$.

Определение 4.3. Ядром преобразования Радона $\delta(P - q^{2\beta})$ назовем сумму ряда (3.3), где

$$f_{l_1 l_2} = \sum_{\{j_0 j_n k_0 k_n \mid j_0 k_0 = j_n k_n = 0\}} (z_0^* \zeta_0)^{j_0} (-q^{-2n} z_n^* \zeta_n)^{j_n} \times$$

$$\times r_{ml_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n} \Big|_{m = \frac{1}{2}\log_q \xi - \beta} (z_0^* \zeta_0^*)^{k_0} (z_n^* \zeta_n^*)^{k_n}.$$

Сходимость ряда (3.3) в пространстве $K(H_+^{2n+1}, C^{2n+1})_{q,\beta}$ доказывается так же, как предложение 3.1. Аналогично определению 4.3 вводятся ядра $R_j = \delta(P - q^{2(j+\beta)})$ при всех целых j. Из описанных построений следует равенство (4.1).

Предложение 4.4. *Ядро* $\delta(P - q^{2(j+\beta)})$ *является сплетающим.*

Это утверждение следует из формулы

$$r_{ml_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{du}{u^{m+1}} f_{l_1 l_2 j_0 j_n k_0 k_n}$$

и возможности внести действие $U_q sl_{n+1} \otimes U_q sl_{n+1}$ под знак интеграла. В самом деле, повторяя для малых $|u| = q^{\mathrm{Re}\,\lambda}$ доказательство предложения 3.8, получаем равенство нулю подынтегральных функций, возникающих после применения оператора $\xi \otimes 1 - 1 \otimes S^{-1}(\xi)$ к ядру $\delta(P - q^{2(j+\beta)})$.

Замечание. Пусть $m \in \mathbf{Z}_+$. Тогда из равенства $P^\lambda P^m = P^\lambda P^m = P^{\lambda+m}$ следует равенство $P^m \delta(P - q^{2\beta}) = \delta(P - q^{2\beta}) P^m = q^{2\beta m} P^m$.

§ 5. Сплетающие ядра и гипергеометрические функции

Напомним, что алгебра сплетающих ядер является подалгеброй $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ и выделяется системой уравнений (1.6). В дальнейшем в роли F_1 будет алгебра $\mathbf{C}[C^{2n+1}]_q^{\mathrm{op}}$ (см. § 2), а в роли F_2— определяемая ниже алгебра $\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbf{C}^{n+1}\right)_{q,q^{-1}}$.

Воспользуемся R-матричными обозначениями [3]. Пусть $e_{ij} \in \mathrm{Mat}\,(n+1, \mathbf{C})$ — матричные единицы и

$$R' = q^2 \sum_i e_{ii} \otimes e_{ii} + q \sum_{i \neq j} e_{ij} \otimes e_{ji} + (q^2 - 1) \sum_{i<j} e_{ii} \otimes e_{jj},$$

$$R'' = q^{-1} \sum_i e_{ii} \otimes e_{ii} + q \sum_{i \neq j} e_{ij} \otimes e_{ji} + (q - q^{-1}) \sum_{i<j} q^{i-j} e_{ij} \otimes e_{ij}.$$

Рассмотрим алгебру с инволюцией, образующими z_{ij}, $1 \le i \le N$, $0 \le j \le n$, и определяющими соотношениями

$$\sum_{i_1 j_1} R'_{iji_1 j_1} z_{bi_1} z_{aj_1} = q z_{ai} z_{bj}, \quad a < b,$$

$$\sum_{i_1 j_1} R''_{iji_1 j_1} \left(\varepsilon_{i_1} z^*_{bi_1}\right) z_{aj_1} = q^{-1} z_{ai} \left(\varepsilon_j z^*_{bj}\right),$$

где $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_i = q^{-i}$ при $i \neq 0$. Действие образующих $X_i^{\pm}$, $k_i^{\pm}$ алгебры $U_q su(n,1)$ на образующие z_{ij} алгебры $\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}_{q,q-1}$ зададим равенствами (1.12)-(1.14), заменив в них z_j, z_{j-1}, z_{j+1} на z_{ij}, z_{ij-1}, z_{ij+1}. Продолжим это действие так, чтобы алгебра $\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}_{q,q-1}$ стала $U_q su(n,1)$-модульной. Единственность продолжения очевидна в силу требований (1.2), (1.3), (1.7). Существование следует из того, что матрицам R', R'' отвечают линейные операторы, сплетающие представления группы $U_q su(n+1)$. (При всех a элементы z_{aj} образуют стандартный базис пространства векторного представления, а элементы $\varepsilon_j z^*_{aj}$ — ковекторного [2].)

Отметим, что при $N = 1$ построенная $U_q su(n,1)$-модульная алгебра изоморфна $\mathbb{C}^{n+1}_{q,q-1}$.

Алгебры $F_1^{\mathrm{op}} = \mathbb{C}[C^{2n+1}]_q^{\mathrm{op}}$ и $F_2 = \left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}^{n+1}\right)^{\mathrm{op}}_{q,q-1}$ мы будем отождествлять с их образами при канонических вложениях в $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$. Следуя (1.7), (2.8), введем в алгебре $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ инволюцию

$$z_{ij} \to z^*_{ij}, \quad \zeta_j \to q^{2(j-n)} \zeta^*_j.$$

Непосредственно из определений нетрудно получить

Предложение 5.1. *Элементы* $K_i = z_{i0}\zeta_0^* - \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\zeta_j^*$ *алгебры* $F_2 \otimes F_1^{\mathrm{op}}$ *являются сплетающими ядрами, причем*

$$K_i K_j = q K_j K_i, \quad i < j, \quad K_i K_j^* = q K_j^* K_i, \quad i \neq j, \quad K_i K_i^* = q^2 K_i^* K_i.$$

Следствие 5.2. *Степени ядер Пуассона* $P_i = q^{-2n} K_i K_i^*$ *при всех* $1 \le i \le n$ *являются сплетающими и* $P_i = P_i^*$. *Ядра Пуассона попарно коммутируют.*

Как объяснялось в § 3, степени ядра Пуассона являются производящими функциями для многочленов гипергеометрического типа. Это позволяет рассматривать сплетающие ядра $\prod_{j=1}^{N} P_j^{l_j}$, $l_j \in \mathbb{Z}_+$ как производящие функции для элементов алгебры F_2, обобщающих классические ортогональные многочлены.

Повторив построения § 3, можно освободиться от ограничения $l_1 \in \mathbb{Z}_+$ для одного из показателей степеней ядер Пуассона. Это позволит включить в рассмотрение случай $\sum_{j=1}^{n} l_j = -n$ и с помощью интегрирования ядра $\prod_{j=1}^{N} P_j^{l_j}$ получить инварианты в G.

Описанный подход в случае $q = 1$ аналогичен подходу В. А. Васильева, И. М. Гельфанда и А. В. Зелевинского к изучению общих гипергеометрических функций [8].

В заключение автор выражает признательность В. Г. Дринфельду за обсуждение роли сплетающих операторов в теории представлений и гармоническом анализе. Работа частично поддержана грантом Американского математического общества.

Список литературы

1. *V. G. Drinfeld*, Quantum groups, Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley, 1986), v. 1.— Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986), p. 798–820.
2. *M. Jimbo*, Quantum *R* matrix related to the generalized Toda system: an algebraic approach.— Lecture Notes in Phys., v. 246. Springer–Verlag, Berlin and New York (1986), p. 335–361.
3. *Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддев*, Квантование групп Ли и алгебр Ли.— Алгебра и анализ (1989), т. 1, вып 1, с. 178–206.
4. *Ya. S. Soibelman, L. L. Vaksman*, On some problems in the theory of quantum groups.— Adv. in Soviet. Math. (1992). v. 9, p. 3–55.
5. *R. Askey, J. Wilson*, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials.— Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985), v. 54, N 319.
6. *Л. Л. Ваксман, Я. С. Сойбельман*, Алгебра функций на квантовой группе SU(2).— Функцион. анализ и его прил. (1988), т. 22, вып. 3, с. 1–14.
7. *Л. Л. Ваксман*, q-аналоги коэффициентов Клебша–Гордана и алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$.— Докл. АН СССР (1989), т. 306, вып. 2, с. 269–271.
8. *В. А. Васильев, И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский*, Общие гипергеометрические функции на комплексных грассманианах.— Функцион. анализ и его прил. (1987), т. 21, вып. 1, с. 23–38.

Intertwining operators and quantum homogeneous spaces

L. L. Vaksman

In this paper the algebras of functions on the quantum homogeneous spaces are studied. The algebras of kernels of intertwining integral operators, the Poisson transform and the Radon transform fom some homogeneous spaces are constructed. Some applications and the connection with the special functions are discussed.