Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 31–40

УДК 517.958

Существование и единственность решения системы уравнений движения суспензии в гельдеровских классах

О. А. Анощенко

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 27 сентября 1993 г.

Исследуется система уравнений, описывающая движение мелких частиц в вязкой несжимаемой жидкости. Неизвестными функциями являются вектор скорости несущей жидкости $u(x, t)$, давление $p(x, t)$, а также функции распределения частиц в фазовом пространстве $F(x, v, t)$. Доказана однозначная разрешимость в малом начально-краевой задачи в непрерывных по Гельдеру классах функций.

Досліджується система рівнянь руху дрібних частинок у в'язкій нестисливій рідині. Невідомими функціями є вектор швидкості несучої рідини $u(x, t)$, тиск $p(x, t)$, а також функція розподілу частинок у фазовому просторі $F(x,v, t)$. Доведено однозначну розв'язність у малому початково-крайової задачі у неперервних за Гельдером класах функцій.

1. Основным объектом изучения в данной работе является система уравнений, описывающая движение суспензии мелких частиц в вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla_x)u - \nu\Delta u + \gamma\int (u(x, t) - v)F(x,v, t)dv - \nabla p = f(x, t)\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{div} u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v\nabla_x)F + \beta \mathrm{div}_v \left(\left[u(x, t) - v\right] F\right) = 0\,. \tag{3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка трехмерного евклидова пространства $\mathbf{R}^3$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ — оператор градиента, $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, $(u\nabla_x) = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $u(x, t) = \left(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\right)$ — вектор скорости несущей жидкости, $p(x, t)$ — давление, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости частиц, $F(x,v, t)$ — функция распределения частиц в фазовом пространстве, положительные коэффициенты ν, γ, β и вектор $f(x, t)$ — внешняя сила, действующая на несущую жидкость, — считаются заданными.

Рассмотрим в области $D_T = \Omega\times\mathbf{R}^3 \times [0, T]$ $(x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, v \in \mathbf{R}^3, t \in [0, T])$ начально-краевую задачу для системы (1)-(3), т.е. дополним эту систему следующими условиями:

$$u(x, t) = 0\,, (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] = S_T\,, \tag{4}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\,, \tag{5}$$

$$F(x,v,0)=F_0(x,v)\,. \tag{6}$$

Считаем, что Ω — ограниченная область трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей, обозначим $\Omega\times\mathbf{R}^3=D$.

В настоящей работе доказывается однозначная разрешимость задачи (1)-(6) в непрерывных по Гельдеру классах функций в предположении, что функция $F_0(x,v)$ финитна в D, а T — достаточно мало. Как будет показано ниже, это позволяет не ставить граничные условия для функции $F(x,v,t)$, так как за время T частицы не успевают достичь границы области Ω и вступить с ней во взаимодействие.

Следуя работе [1], введем пространства $H^{\alpha}(Q_T)$, $H^{1+\alpha}(Q_T)$, $H^{2+\alpha}(Q_T)$ вектор-функций (функций), $\alpha\in(0,1)$, заданных в Q_T и имеющих конечные нормы

$$|u|^{(\alpha)}_{Q_T}=|u|_{Q_T}+[u]^{(\alpha)}_{Q_T},$$

$$|u|^{(1+\alpha)}_{Q_T}=\sup_{t\le T}|u|^{(1+\alpha)}_{\Omega}+\sum_{i=1}^{3}\sup_{Q_T}\frac{|u_{x_i}(x,t)-u_{x_i}(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}}+$$

$$+\sup_{Q_T}\frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{(1+\alpha)/2}},$$

$$|u|^{(2+\alpha)}_{Q_T}=\sum_{|\mu|\le 2}\left|D_x^{\mu}u(x,t)\right|_{Q_T}+\sup_{Q_T}\left|D_tu(x,t)\right|+\sum_{|\mu|=2}\left[D_x^{\mu}u\right]^{(\alpha)}_{Q_T}+\left[D_tu\right]^{\alpha}_{Q_T}.$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения:

$$|u|_{Q_T}=\sup_{Q_T}|u(x,t)|\,;\qquad |u(x,t)|=\left(\sum_{i=1}^{3}u_i^2(x,t)\right)^{1/2};$$

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2};$$

D_x^{μ} — производная порядка $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ по переменным x, $|\mu|=\mu_1+\mu_2+\mu_3$;

$$[u]^{(\alpha)}_{Q_T}=\sup_{Q_T}\frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}}+\sup_{Q_T}\frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}};$$

$$|u|^{(k+\alpha)}_{\Omega}=\sum_{|\mu|\le k}\sup_{\Omega}\frac{|D_x^{\mu}u(x)-D_x^{\mu}u(x')|}{}+\sum_{|\mu|\le k}\left|D_x^{\mu}u(x)\right|_{\Omega}.$$

Аналогично вводятся пространства $H^{\alpha}(\Omega)$, $H^{1+\alpha}(\Omega)$, $H^{2+\alpha}(\Omega)$ вектор-функций, заданных в Ω, и пространства $H^{\alpha}(D_T)$, $H^{1+\alpha}(D_T)$,$H^{1+\alpha}(D)$ функций, заданных в D_T и D.

Обозначим через $\overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(\Omega)$, $\overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(Q_T)$ подпространства вектор-функций из $H^{\alpha}(\Omega)$, $H^{\alpha}(Q_T)$, элементы которых удовлетворяют условиям $(u, n) = 0$, $x \in \partial\Omega$ и $\operatorname{div} u = 0$ (в обобщенном смысле), где $n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x, (u, n) — скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$, P_J — оператор проектирования на $\overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(Q_T)\left(\overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(\Omega)\right)$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть при некотором* $\alpha \in (0, 1)$ $f(x, t) \in \overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(Q_T)$, $u_0(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{J}{}^{\alpha}(\Omega)$, $F_0(x, v) \in H^{1+\alpha}(D)$ *кроме того, функция* $F_0(x, v)$ *финитна и выполняются условия согласования*

$$\left[f(x, 0) + P_J\left(\nu\Delta u_0 - (u_0\nabla_x)u_0 - \gamma\int(u_0 - v)F_0(x, v)dv\right)\right]_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда при некотором, достаточно малом $T = T\left(|f|_{Q_T}^{(\alpha)}, |u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, |F_0|_D^{(1+\alpha)}, d\right)$ *(здесь $d > 0$ — расстояние от носителя функции F_0 по переменной x до $\partial\Omega$) задача (1)-(6) имеет единственное решение* $u(x, t) \in H^{2+\alpha}(Q_T)$, $F(x, v, t) \in H^{1+\alpha}(D_T)$.

Ниже приводится доказательство этой теоремы, при этом существенно используются результаты работы [1].

2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v\nabla_x)F + \beta\operatorname{div}_v\left([u(x, t) - v]F\right) = g(x, v, t), \tag{7}$$

$$F(x, v, 0) = F_0(x, v), \tag{8}$$

где $u(x, t)$, $g(x, v, t)$ и $F_0(x, v)$ — заданные функции, определенные соответственно в $\mathbf{R}_T^3 = \mathbf{R}^3 \times [0, T]$, $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times [0, T] = \mathbf{R}_T^6$ и $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^6$.

Определим вектор-функции $X(x, v, t, \tau)$, $V(x, v, t, \tau)$ как решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{d\tau} = V, \quad \frac{dV}{d\tau} = \beta\left(u(X, \tau) - V\right), \quad X\Big|_{\tau=t} = x, \quad V\Big|_{\tau=t} = v, \quad \tau \in [0, T]. \tag{9}$$

В дальнейшем функция $u(x, t)$ будет задана в Q_T, причем норма $|u|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ конечна и $u\big|_{S_T} = 0$, функция $F_0(x, v)$ финитна в D, а функция $g(x, v, t)$ задана в D_T, финитна по переменной v и обращается в нуль на S_T. Считаем, что в задаче (7), (8) эти функции продолжены нулем на $\mathbf{R}_T^3$, $\mathbf{R}^6$ и $\mathbf{R}_T^6$ соответственно. При таком продолжении функция $u(x, t)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по переменной x в $\mathbf{R}_T^3$, что обеспечивает разрешимость системы (9) для любого конечного T.

Единственное решение задачи (7), (8) дается формулой

$$F(x, v, t) = e^{3\beta t}F_0\left(X(x, v, t, 0), V(x, v, t, 0)\right) +$$

$$+\int_0^t g\Big(X(x,v,t-s,0),\,V(x,v,t-s,0),\,s\Big)\,e^{3\beta(t-s)}\,ds\,. \qquad (10)$$

Можно показать, что решения системы (9) обладают следующими свойствами.

Лемма 1. *Функции X, V дифференцируемы по переменным $\xi=(x,v)$, t и при $X\in\Omega$ их производные удовлетворяют оценкам*

$$\left|X_{\xi_i}\right|<\varphi(T,u),\quad \left|V_{\xi_i}\right|<\varphi(T,u),\quad 1\le i\le 6,$$

$$\left|X_t\right|<c\varphi(T,u)(|\,v\,|+|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}),$$

$$\left|V_t\right|<c\varphi(T,u)(|\,v\,|+|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}),$$

где

$$\varphi(T,u)=\exp\left\{T\left[(1+4\beta^2)\left(1+[|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}]^2\right)\right]^{1/2}\right\},$$

а константа c зависит только от β.

Лемма 2. *Производные функции V удовлетворяют неравенствам*

$$\sup_{D_T}\frac{|\,V_{\xi_i}(\xi,t,0)-V_{\xi_i}(\xi,t',0)\,|}{|\,t-t'\,|^{\alpha/2}}<cT^{1-\alpha/2}\varphi^3(T,u)\times$$

$$\times\left\{1+|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}+T^{\alpha/2}\,|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}\left[1+T(1+|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T})\right]\right\}\times$$

$$\times\left[1+T^{1-\alpha/2}(|\,v\,|+|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T})\right],$$

$$\sup_{D_T}\frac{|\,V_{\xi_i}(\xi,t,0)-V_{\xi_i}(\xi',t,0)\,|}{|\,\xi-\xi'\,|^{\alpha}}<cT\,|\,u\,|^{(2+\alpha)}_{Q_T}\varphi^3(T,u)\,,$$

$$1\le i\le 6,$$

где постоянная c зависит от Ω и β. Аналогичные оценки справедливы для производных функции X при условии $X\in\Omega$.

Лемма 3. *Если функция $F_0(x,v)$ финитна в D, то при достаточно малом T функция $F(x,v,t)$, будучи решением задачи (7), (8) с $g(x,v,t)\equiv 0$, также является финитной в D для всех $t\le T$.*

Лемма 4. *Если функция $F_0(x,v)$ финитна в D и принадлежит пространству $H^{1+\alpha}(D)$, то решение задачи (7), (8) с $g(x,v,t)\equiv 0$ принадлежит пространству $H^{1+\alpha}(D_T)$, причем*

$$
\begin{aligned}
| F |_{D_T}^{(1+\alpha)} < c \mid F_0 |_D^{(1+\alpha)} \varphi^6 (T, u) \Big\{ 1 + T \mid u |_{Q_T}^{(2+\alpha)} + \\
+ T^{(1-\alpha)/2} (1+T) \Big(1 + | u |_{Q_T}^{(2+\alpha)}\Big) \Big[1 + T^{1/2} \Big(1 + T^{1-\alpha/2} \times \\
\times (1+T) \Big(1 + | u |_{Q_T}^{(2+\alpha)}\Big)\Big) \Big(1 + T^{\alpha/2} | u |_{Q_T}^{(2+\alpha)}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{11}
$$

где постоянная c зависит от β, Ω и $\mathrm{supp} F_0$.

3. Установим сначала единственность решения задачи (1)-(6). Будем предполагать, что $u(x, t) \in H^{2+\alpha}(Q_T)$, а функция $F(x, v, t) \in H^{1+\alpha}(D_T)$ и для любого $t \le T$ является финитной в D.

Предположим, что в указанных классах функций задача (1)-(6) имеет два решения u', F', p' и u'', F'', p'' соответственно. Тогда, как нетрудно проверить, их разность $u' - u'' = u$, $F' - F'' = F$ и $p' - p'' = p$ удовлетворяет следующим линейным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla_x) u' + (u'' \nabla_x) u - \nu \Delta u + \gamma u \int F' dv + \\
+ \gamma u'' \int F dv - \gamma \int v F dv - \nabla p = 0,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\mathrm{div} u = 0, \tag{13}
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial t} + (v \nabla_x) F + \beta (u \nabla_v) F' + \beta (u'' \nabla_v) F - \beta (v \nabla_v) F - 3\beta F = 0. \tag{14}
$$

Заметим, что в силу леммы 3 функция $F(x, v, t)$ для всех $x \in \Omega$, $t \le T$ финитна по v. Пусть ее носитель содержится в шаре радиуса R_F.

Умножим уравнение (12) скалярно на u и проинтегрируем по Ω. Воспользовавшись формулой Грина, уравнением (13), неравенствами Юнга и Коши-Буняковского, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|^2 + \nu \| \nabla u \|^2 \le \Big(3 | \nabla u' |_\Omega + \frac{1}{2} | u'' |_\Omega + \frac{1}{2} + \\
+ \sup_\Omega \Big[\int | F' | dv \Big] \Big) \| u \|^2 + \frac{1}{2} \Big(4\pi | u'' |_\Omega R_F^3 + \frac{4}{3} \pi R_F^5 \Big) \| F \|^2,
\end{aligned} \tag{15}
$$

где

$$
\| u \|^2 = \int_\Omega | u |^2 dx, \quad \| F \|^2 = \int_D F^2 dv dx.
$$

Соответственно, умножая уравнение (14) на F и интегрируя по D получаем

$$
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| F \|^2 \le 3\beta \| F \|^2 + \frac{\beta}{2} \sup_\Omega \Big[\int | \nabla_v F' |^2 dv \Big] \| u \|^2. \tag{16}
$$

Складывая неравенства (15) и (16), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|F\right\|^2 \le c_1(t)\|u\|^2 + c_2(t)\left\|F\right\|^2$$

или

$$\frac{dy(t)}{dt} \le c(t)y(t)\,, \text{ где } y(t) = \left\|u\right\|^2 + \left\|F\right\|^2,$$

$c(t) = c_1(t) + c_2(t)$ — суммируемая функция.

Отсюда следует, что

$$y(t) \le y(0)\exp\left\{\int_0^t c(\tau)d\tau\right\},$$

и значит, в силу однородности начальных данных для разности двух решений, $y(t) = 0$.

4. Разрешимость задачи (1)-(6) будем доказывать методом последовательных приближений.

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial t} + (v\nabla_x)F^{(n)} + \beta\left([u^{(n)} - v]\nabla_v\right)F^{(n)} - 3\beta F^{(n)} = 0, \tag{17}$$

$$F^{(n)}(x, v, 0) = F_0(x, v),$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial t} - \nu\Delta u^{(n+1)} - \nabla p^{(n+1)} = f - (u^{(n)}\nabla_x)u^{(n)} - \\ - \gamma u^{(n)}\int F^{(n)}dv + \gamma\int v\,F^{(n)}\,dv\,,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\operatorname{div}u^{(n+1)} = 0,\ u^{(n+1)}(x, 0) = u_0(x)\,,\ u^{(n+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Итерационный процесс строим следующим образом: по заданному $u^{(n)}(x, t)(u^{(0)}(x, t) = u_0(x))$ решаем задачу (17) и находим $F^n(x, v, t)$; затем решаем задачу (18), находим $u^{(n+1)}(x, t)$ и т.д.

Пользуясь результатами леммы 4, получаем решение задачи (17) $F^n(x, v, t) \in H^{1+\alpha}(D_T)$, для которого справедлива оценка (11).

Рассмотрим теперь задачу (18), решение которой оценим с помощью неравенства

$$|\,u\,|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \le c_1(1 + e^{c_2T})\left(|\,f\,|_{Q_T}^{(\alpha)} + \left|\,P_Jf\,\right|_{Q_T}^{(\alpha)} + |\,u_0\,|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right), \tag{19}$$

полученного в работе ([1], с. 216) для решения $u(x, t)$ задачи

$$u_t - \nu\Delta u - \nabla p = f,\ \operatorname{div}u = 0,\ x \in \Omega,\ t \le T,\ u(x, 0) = u_0(x),\ u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Постоянные c_1 и c_2 в (19) зависят лишь от Ω, ν и α. При этом члены вида $P_J\varphi$ в (19) будем оценивать с помощью следующих неравенств, полученных в работе ([1], леммы 9.1 и 10.3):

а) если $u(x, t)$ — вектор, а $b(x, t)$ — функция (матрица) из $H^{\alpha}(Q_T)$, то

$$| P_j bu |_{Q_T}^{(\alpha)} \le c_3 | b |_{Q_T}^{(\alpha)} | u |_{Q_T}^{(\alpha)}; \tag{20}$$

б) если $u(x, t)$ — вектор, а $l_k(x, t)$ — функция (матрица) из $H^{1+\alpha}(Q_T)$ и $lu = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(l_k u)$, то

$$| P_j \, lu |_{Q_T}^{(\alpha)} \le c_4 \max_k | l_k |_{Q_T}^{(1+\alpha)} | u |_{Q_T}^{(1+\alpha)}; \tag{21}$$

в) если $u(x, t) \in H^{1+\alpha}(Q_T)$ и $\operatorname{div} u = 0$, то

$$| (u\nabla)u |_{Q_T}^{(\alpha)} + | P_j (u\nabla)u |_{Q_T}^{(\alpha)} \le c_5 | u |_{Q_T} | u |_{Q_T}^{(1+\alpha)}, \tag{22}$$

где постоянные зависят лишь от Ω и α.

Согласно (19), (20) и (22), для решения $u^{(n+1)}$ задачи (18) имеем

$$| u^{(n+1)} |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \le c_1 (1 + e^{c_2 T}) \Big(2 | f |_{Q_T}^{(\alpha)} + | u_0 |_{\Omega}^{(2+\alpha)} +$$

$$+ c_5 | u^{(n)} |_{Q_T} | u^{(n)} |_{Q_T}^{(1+\alpha)} + \gamma (1 + c_3) | u^{(n)} |_{Q_T}^{(\alpha)} \times$$

$$\times \Big| \int F^{(n)} dv \Big|_{Q_T}^{(\alpha)} + \gamma (1 + c_3) \Big| \int v F^{(n)} dv \Big|_{Q_T}^{(\alpha)} \Big).$$

Исходя из определения нормы пространства $H^{\alpha}(Q_T)$ и из результатов леммы 3 запишем, что

$$\Big| \int F^{(n)} dv \Big|_{Q_T}^{(\alpha)} \le c_6 | F^{(n)} |_{D_T}^{(1+\alpha)} (1 + T^{1/2}) \Big(1 + T + T | u^{(n)} |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \Big)^3, \tag{23}$$

$$\Big| \int v \, F^{(n)} dv \Big|_{Q_T}^{(\alpha)} \le c_6 | F^{(n)} |_{D_T}^{(1+\alpha)} (1 + T^{1/2}) \Big(1 + T + T | u^{(n)} |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \Big)^4, \tag{24}$$

причем константа c_6 зависит от Ω, β и supp F_0.

Воспользовавшись известным мультипликативным неравенством, которое нашло применение в работах ([1], с. 227) и [2],

$$| u |_{Q_T}^{(1+\alpha)} \le c \Big(| u |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \Big)^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \Big(| u |_{Q_T} \Big)^{\frac{1}{2+\alpha}}, \tag{25}$$

очевидными неравенствами

$$\begin{gathered} | u |_{Q_T} \le | u_0 |_{\Omega} + T \, | u |_{Q_T}^{(2+\alpha)}, \\ | u |_{Q_T}^{(\alpha)} \le | u_0 |_{\Omega}^{(\alpha)} + \Big(T + T^{1-\alpha/2} \Big) | u |_{Q_T}^{(2+\alpha)}, \end{gathered} \tag{26}$$

а также неравенствами (23) и (24), получим

$$| u^{(n+1)} |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \le c_1 \Big(1 + e^{c_2 T}\Big) \Big[2 | f |_{Q_T}^{(\alpha)} + | u_0 |_{\Omega}^{(2+\alpha)} +$$

$$+ \gamma(1 + c_3) | F^{(n)} |_{D_T}^{(1+\alpha)} \Big(1 + T^{1/2}\Big) \Big(1 + T \Big(1 + | u^{(n)} |_{Q_T}^{(2+\alpha)} \Big) \Big)^3 \times$$

$$\times\left(1+|u_0|_{\Omega}^{(\alpha)}+T+(2T+T^{1-\alpha/2})\,|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\right)+$$

$$+\,c_5c\left(|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\right)^{(1+\alpha)/(2+\alpha)}2^{1/(2+\alpha)}\left((|u_0|_{\Omega})^{1/(2+\alpha)}+\right)$$

$$+\left(T\,|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}\left(|u_0|_{\Omega}+T\,|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\right)\Big].$$

Оценивая с помощью неравенства Юнга последнее слагаемое в квадратной скобке и учитывая оценку (11), получаем для величины $\xi^{(n)}=|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ следующее неравенство

$$\xi^{(n+1)}\le\Psi_T(\xi^{(n)}),$$

где функция $\Psi_T(\xi)$ определена равенствами

$$\Psi_T(\xi)=\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\xi+(1+e^{cT})^{2+\alpha}\Psi_0+c(1+e^{cT})\times$$

$$\times(2T)^{(3+\alpha)/(2+\alpha)}\xi^2+c\,\Big|F_0\Big|_D^{(1+\alpha)}(1+e^{cT})(1+T^{1/2})\times$$

$$\times\left(1+|u_0|_{\Omega}^{(\alpha)}+T+(2T+T^{1-\alpha/2})\xi\right)\times(1+T(1+\xi))^3\times$$

$$\times\Big[1+T\xi+T^{\frac{1-\alpha}{2}}(1+T)(1+\xi)(1+T^{1/2}(1+T^{1-\alpha/2}\times$$

$$\times(1+T)(1+\xi)(1+T^{\alpha/2}\xi\Big]\exp\left\{cT(1+\xi^2)^{1/2}\right\},$$

$$\Psi_0=c\left[\,|f|_{Q_T}^{(\alpha)}+|u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+|u_0|_{\Omega}^{3+\alpha}\right].$$

Здесь постоянная c зависит лишь от γ, β, ν, Ω и $\operatorname{supp}F_0$.

Очевидно, что $\Psi_T(\xi)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция ξ, и при достаточно малых T уравнение

$$\xi=\Psi_T(\xi) \tag{27}$$

имеет решение.

Пусть $\bar\xi$ — бóльший корень этого уравнения. Тогда, если начальное приближение $\xi^{(0)}$ не превосходит $\bar\xi$, то и все $\xi^{(n)}$ будут меньше $\bar\xi$. Таким образом, нормы $|u^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ ограничены равномерно по n, а в силу (11) равномерно ограниченными будут также и нормы $\Big|F^{(n)}\Big|_{D_T}^{(1+\alpha)}$.

Покажем теперь, что последовательные приближения $u^{(n)}(x,t)$ и $F^n(x,v,t)$ сходятся соответственно в $H^{2+\alpha}(Q_T)$, $H^{1+\alpha}(D_T)$ при достаточно малых $\tau\le T$.

В силу задач (17) и (18) функции $\Phi^{(n)}=F^{(n)}-F^{(n-1)}$, $h^{(n+1)}=u^{(n+1)}-u^{(n)}$, $q^{(n+1)}=p^{(n+1)}-p^{(n)}$ являются решениями следующих задач:

$$\frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial t} + (v\nabla_x)\Phi^{(n)} + \beta\left([u^{(n)} - v]\nabla_v\right)\Phi^{(n)} - 3\beta\Phi^{(n)} = -\beta\left(h^{(n)}\nabla_v\right)F^{(n-1)},$$

$$\Phi^{(n)}(x, v, 0) = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial h^{(n+1)}}{\partial t} - \nu\Delta h^{(n+1)} - \nabla q^{(n+1)} = -\left(h^{(n)}\nabla_x\right)u^{(n)} - \left(u^{(n-1)}\nabla_x\right)h^{(n)} -$$

$$-\gamma h^{(n)}\int F^{(n)}dv - \gamma\, u^{(n-1)} \times \int \Phi^{(n)}\, dv + \gamma\int v\,\Phi^{(n)}\, dv\,, \tag{29}$$

$$\mathrm{div} h^{(n+1)} = 0,\ h^{(n+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ h^{(n+1)}(x, 0) = 0.$$

Воспользовавшись для решения задачи (28) формулой (10), оценками лемм 1 и 2, получим при $\tau < 1$

$$|\,\Phi^{(n)}\,|_{D_\tau}^{(\alpha)} \le \tau^{1-\alpha/2}\,|\,h^{(n)}\,|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\, W_\alpha\left(|\,u^{(n-1)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)},\right.$$

$$\left.|\,u^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}, |\,F^{(n-1)}\,|_{D_\tau}^{(1+\alpha)}\right), \tag{30}$$

где W_α — некоторая непрерывная функция своих аргументов.

Из неравенств (19), (20), (21) и финитности функции $\Phi^{(n)}(x, v, t)$ по переменной v при любых $x \in \Omega$, $t \le T$ следует, что для решения задачи (29) справедливо неравенство

$$|\,h^{(n+1)}\,|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \le c(1 + e^{cT})\Big[|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(\alpha)}\Big(|\,u^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(1+\alpha)} +$$

$$+\,|\,F^{(n)}\,|_{D_\tau}^{(1+\alpha)}\left(1 + |\,u^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}\right)^3\Big) + |\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(1+\alpha)} \times$$

$$\times\,|\,u^{(n-1)}\,|_{Q_\tau}^{(\alpha)} + |\,\Phi^{(n)}\,|_{D_\tau}^{(\alpha)}\left(1 + |\,u^{(n-1)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} + |\,u^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}\right)^4\Big]. \tag{31}$$

В силу мультипликативного неравенства (25) и неравенства Юнга получаем при любом $\varepsilon > 0$

$$|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(1+\alpha)} \le c\left(|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{1/(2+\alpha)}\right)\left(|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}\right)^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \le$$

$$\le c\left[\varepsilon^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}\,|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} + \frac{1}{\varepsilon^{2+\alpha}}\,|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}\right].$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством вида (26)

$$|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau} \le \tau\,|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)},$$

и полагая $\varepsilon = \tau^{(1+\alpha)/(2+\alpha)^2}$, получаем

$$|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(1+\alpha)} \le 2c\,\tau^{1/(2+\alpha)}\,|\,h^{(n)}\,|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}.$$

Эта оценка вместе с оценкой (26) и неравенством

$$|h^{(n)}|_{Q_\tau}^{(\alpha)} \le 2\tau^{1-\alpha/2}|h^{(n)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}$$

позволяют заключить из (27), что при $\tau < 1$

$$|h^{(n+1)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} \le \tau^{1/(2+\alpha)}|h^{(n)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} W\Big(|u_0|_\Omega^{(2+\alpha)},$$

$$|u^{(n-1)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}, |u^{(n)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}, |F^{(n)}|_{D_\tau}^{(1+\alpha)}\Big),$$

где W — непрерывная функция всех своих аргументов.

Как было установлено выше, нормы $|u^{(n)}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)}$ и $|F^{(n)}|_{D_\tau}^{(1+\alpha)}$ ограничены, следовательно, при достаточно малых τ ряд $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h^{(n)}(x,t)$ сходится в $H^{2+\alpha}(Q_\tau)$, а ряд $F(x,v,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(x,v,t)$ сходится в $H^{\alpha}(D_\tau)$. Отсюда, переходя в задачах (17) и (18) к пределу при $n \to \infty$, получим, что $u(x,t)$ и $F(x,v,t)$ действительно являются решениями задачи (1)-(6). Кроме того, поскольку нормы $|F^{(n)}|_{D_\tau}^{(1+\alpha)}$ равномерно ограничены по n, то функция $F(x,v,t) \in H^{1+\alpha}(D_\tau)$. Тем самым доказана разрешимость исходной задачи (1)-(6) в гельдеровых классах функций при $t \le \tau$ $(\tau > 0)$. Очевидно, принимая в задаче (1)-(6) в качестве начальных данных значения полученного решения при $t = \tau$, можно доказать существование решения в указанных классах функций для $t \le \tau + \tau_1$, $\tau_1 > 0$. Передвигаясь таким образом по оси t, сможем установить существование решения до такого T, при котором существует положительный корень уравнения (25) и сохраняется финитность функции $F(x,v,t)$ в D при любом $t \le T$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *В. А. Солонников*, В кн.: "Краевые задачи мат. физики и смежные вопросы теории функций". Наука, Ленинград (1973).
2. *С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов*, "Краевые задачи механики неоднородных жидкостей". Наука, Новосибирск (1983).

On the existence and uniqueness of the solution of the system of equations describing suspension motion for the Hölder classes

O. A. Anoshchenko

The system of equations describing the motion of a small particles suspension in viscous incompressible liquid is studied. The unknown functions are $u(x, t)$ the velocity of the carrying liquid, $p(x, t)$ the pressure, $F(x, v, t)$ the distribution function of particles in the phase space. The local solvability and the uniqueness of the solution of the initial boundary value problem are proved for the Hölder classes of functions.