Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 41–59

УДК 513.813 + 513.83

Многообразия с внутренней метрикой односторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизны

В. Н. Берестовский

Омский государственный университет, Россия, 644077, г. Омск, пр. Мира, 55а

Статья поступила в редакцию 1 октября 1993 г.

В работе установлены следующие основные результаты. Всякое связное триангулируемое многообразие со счетной базой допускает внутреннюю метрику кривизны ≤ 1. Всякое локально компактное пространство с внутренней метрикой, локально ограниченной снизу кривизны, подчиненное условию локальной продолжаемости кратчайших, изометрично риманову многообразию класса $C^{0,1/2}$. Сформулировано пять нерешенных задач.

В роботі отримані такі основні результати. Будь-який зв'язний тріангульований многовид з обчислювальною базою допускає внутрішню метрику кривини ≤ 1. Будь-який локально компактний простір з внутрішньою метрикою, кривина якої локально обмежена знизу, та такий, що підпорядкований умові локальної продовжуваності найкоротших, є ізометричним ріманову многовиду класу $C^{0,1/2}$. Сформульовано п'ять нерозв'язаних задач.

Эта статья посвящена трем темам:

1. Связь локально компактных пространств с внутренней метрикой ограниченной по Александрову сверху или снизу кривизны [1] со структурами топологического, триангулированного и гладкого многообразий.

2. Примеры пространств, в особенности, многообразий односторонне ограниченной кривизны с патологическими свойствами.

3. Введение римановой структуры в локально компактном пространстве с внутренней метрикой ограниченной снизу кривизны, подчиненной условию локальной продолжаемости кратчайших.

Внутренние метрики односторонне ограниченной кривизны на триангулированных многообразиях

Всякое локально компактное пространство с внутренней метрикой необходимо хаусдорфово, линейно связно и имеет счетную базу топологии [1]. Хорошо известно, что локально компактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой метризуемо.

Задача 1. *Гомеоморфно ли связное топологическое многообразие со счетной базой пространству с внутренней метрикой? Другими словами, допускает ли такое многообразие внутреннюю метрику?*

Нетрудно доказать, что связное липшицево топологическое многообразие со счетной базой допускает внутреннюю метрику. В частности, это верно для связных триангулируемых топологических многообразий со счетной базой. Поэтому задача 1 имеет положительное решение, если имеет положительное решение хорошо известная следующая задача.

Задача 2. *Триангулируемо ли всякое связное топологическое многообразие со счетной базой?*

Напомним, что триангуляцией топологического пространства называется гомеоморфизм пространства на локально конечный симплициальный комплекс. Пространство триангулируемо, если оно допускает триангуляцию. Пространство вместе с некоторой его триангуляцией называется полиэдром. Далее нам потребуются некоторые понятия о триангуляциях.

Гомеоморфизм $f: (M_1, T_1) \to (M_2, T_2)$ двух полиэдров называется симплициальным, если он аффинно отображает каждый симплекс σ триангуляции T_1 на симплекс $f(\sigma)$ триангуляции T_2. Гомеоморфизм f называется комбинаторной эквивалентностью, если f является симплициальным относительно некоторых симплициальных подразделений T_1', T_2' триангуляций T_1, T_2. Полиэдры называются комбинаторно эквивалентными, если существует связывающая их комбинаторная эквивалентность.

Линком $\mathrm{lk}\,(v)$ вершины v симплициальной триангуляции T n-мерного многообразия M называется объединение $(n-1)$-мерных граней, противоположных v, во всех n-мерных симплексах, содержащих v. Симплициальная триангуляция T называется комбинаторной, если линк $\mathrm{lk}\,(v)$ каждой вершины $v \in T$ комбинаторно эквивалентен границе $\partial\Delta_n$ n-мерного симплекса Δ_n. В частности, для комбинаторной триангуляции T линк $\mathrm{lk}\,(v)$ всегда гомеоморфен $(n-1)$-сфере S^{n-1}. Топологическое многообразие вместе с комбинаторной триангуляцией T, определяемой с точностью до комбинаторной эквивалентности относительно тождественного отображения, называется кусочно-линейным или PL-многообразием.

В работах [1,2] для вещественного числа K K-областью называется метрическое пространство (M, ρ), подчиненное условиям:

1. Любые две точки в M в случае $K \le 0$ (на расстоянии, меньшем $\pi/\sqrt{K}$, если $K > 0$) соединяются кратчайшей.

2. Для любого треугольника в M, составленного из кратчайших, в случае $K \le 0$ (с периметром, меньшим $2\pi/\sqrt{K}$, если $K > 0$) каждая пара его сторон удовлетворяет условию K-вогнутости [1].

Для связной K-области (M, ρ_1) внутренняя метрика ρ, индуцированная метрикой ρ_1, также дает K-область (M, ρ). Очевидно, K-область с внутренней метрикой является пространством кривизны $\le K$.

Теорема 1. *Всякое связное n-мерное триангулируемое топологическое многообразие M метризуемо как 1-область с внутренней метрикой ρ. Если M — кусочно-линейное многообразие, то можно добиться, чтобы пространство на-*

правлений и сфера достаточно малого радиуса в каждой точке из пространства (M, ρ) были билипшицево гомеоморфны единичной $(n-1)$-сфере.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [2] установлено, что всякий компактный полиэдр допускает метрику 1-области. Доказательство непосредственно распространяется на случай локально конечного полиэдра. Пусть T — триангуляция рассматриваемого многообразия M. При надлежащем проведении метризации в [2] каждый k-мерный симплекс σ триангуляции T будет метризован таким образом, что первое барицентрическое подразделение T^1 триангуляции T разбивает σ на симплексы, изометричные правильному k-мерному симплексу с ребрами длины $\pi/2$ в единичной k-мерной сфере S_1^k. Эти симплексы склеиваются в σ посредством изометрий соответствующих граничных $(k-1)$-мерных симплексов. Далее, на M вводится единственная внутренняя метрика ρ, которая метризует каждый симплекс триангуляции T описанным выше способом. Каждая полиэдральная компактная окрестность точки в (M, ρ) изометрична компактному полиэдру с метрикой 1-области, построенной в [2]. Поэтому и (M, ρ) — 1-область.

Для PL-многообразия возьмем комбинаторную триангуляцию T. Пусть k — наименьшая размерность симплекса $\sigma \in T^1$, содержащего точку $p \in M$. Если $k \geq n-1$, то некоторая достаточно малая окрестность p изометрична открытому подмножеству единичной сферы S_1^n. В противном случае линк $\mathrm{lk}\,(\sigma)$ также комбинаторно эквивалентен $\partial\Delta_{n-k}$ [3]. Отсюда непосредственно вытекает последнее утверждение. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Связное топологическое n-мерное многообразие M со счетной базой топологии допускает внутреннюю метрику 1-области в каждом из следующих случаев:*

1) $n \leq 3$;

2) *M допускает дифференцируемую структуру;*

3) *$n \geq 5$, M компактно, $H^4(M, Z_2) = 0$;*

4) *$n \geq 5$, если существует замкнутая гладкая гомологическая 3-сфера Σ^3 с условиями:*

i) Σ^3 ограничивает гладкое параллелизуемое 4-мерное многообразие с сигнатурой 8;

ii) ориентируемая связная сумма $\Sigma^3 \# \Sigma^3$ ограничивает ацикличное гладкое 4-мерное многообразие.

В первых трех случаях метрику ρ можно выбрать таким образом, чтобы пространство направлений и сфера достаточно малого радиуса в каждой точке из (M, ρ) были билипшицево гомеоморфны единичной $(n-1)$-сфере S_1^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В каждом случае достаточно проверить условия теоремы 1.

1. Известно, что все топологические многообразия размерности n, где $n \leq 3$, со счетной базой топологии триангулируемы и любая триангуляция комбинаторна [4,5].

2. Кэрнс доказал, что каждое дифференцируемое многообразие допускает комбинаторную триангуляцию [6].

3. Для замкнутого n-мерного, $n \geq 5$, топологического многообразия M Р. Кирби и Л. К. Зибенман доказали в работе [7], что единственное возможное препятствие к существованию PL-структуры на M лежит в группе когомологий $H^4(M,Z_2)$. Если PL-структура существует, то число комбинаторно неэквивалентных PL-структур на M равно порядку группы $H^3(M,Z_2)$.

4. В работе Матумото [8] доказано, что для $n \geq 5$ при условии существования гладкой гомологической 3-сферы Σ^3 с условиями *i*), *ii*) и

iii) $(n-3)$*-кратная надстройка над* Σ^3 *гомеоморфна n-сфере,*

всякое n-мерное многообразие триангулируемо. Но условие *iii*) будет выполняться автоматически, так как по теореме Р. Эдвардса [9] двукратная надстройка $S(S(\Sigma^n))$, $n \geq 3$, над гомологической n-сферой (т.е. замкнутым n-мерным многообразием с теми же целочисленными сингулярными гомологиями, что и у сферы S^n) гомеоморфна $(n+2)$-сфере. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Для полноты картины отметим некоторые дополнительные результаты, полученные в работах, связанных с триангуляцией, хотя эти результаты и не применяются в этой статье. М. Х. Фридман доказал в ([10], теорема 1.7) существование замкнутого односвязного топологического 4-многообразия $|E^8|$, не допускающего никакой PL-структуры. Там же доказано интересное следствие 1.6: или $|E^8|$ не допускает никакой симплициальной триангуляции, или не верна трехмерная гипотеза Пуанкаре о том, что замкнутое односвязное 3-мерное многообразие гомеоморфно 3-сфере. Кроме того, для любого натурального k произведение $|E^8| \times T^k$, где T^k — k-мерный тор, также не допускает никакой PL-структуры [7]. Таким образом, для всех $n > 4$ существуют замкнутые топологические n-многообразия, не допускающие никакой PL-структуры.

В размерностях $n \geq 8$ существуют триангулируемые несглаживаемые многообразия. Первый пример такого рода построен Кервером в [11]. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *Для всех размерностей $n \geq 8$ существуют топологические несглаживаемые многообразия, допускающие метрику* 1*-области.*

В статье [12] ставился вопрос о гомеоморфности пространства направлений $\Omega_p M$ в точке p n-мерного многообразия M кривизны $\leq K$ по А. Д. Александрову сфере S^{n-1}. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. *Любая топологическая n-сфера S^n, $n \geq 5$, допускает внутреннюю метрику ρ 1-области с пространством направлений и сферами радиуса, меньшего π, в некоторых точках $p \in (S^n, \rho)$, не являющимися топологическими многообразиями и потому негомеоморфными сфере S^{n-1}.*

Доказательство. Известно, что для любого натурального числа $n \geq 5$ существуют неодносвязные триангулируемые замкнутые многообразия Σ^{n-2} с целочисленными сингулярными гомологиями сферы S^{n-2}. Возьмем произвольную триангуляцию T на Σ^{n-2} и снабдим (Σ^{n-2},T) внутренней метрикой ρ_1 1-области (теорема 1). В работе [2] было введено понятие метрического 1-конуса над любым метрическим пространством M. Простое удвоение этой конструкции [1] дает понятие 1-надстройки S^1M над M.

1-надстройкой $S^1(M,\rho)$ над метрическим пространством (M,ρ) называется множество

$$S^1M = \{ (x,t) \mid x \in M, 0 \le t \le \pi \}$$

с отождествленными точками $(x,0) \equiv s_0$ и $(x,\pi) \equiv s_1$ (полюсами надстройки), снабженное метрикой

$$\rho_{S^1}\left((x_1,t_1),(x_2,t_2)\right) = \begin{cases} \arccos(\cos t_1 \cos t_2 + \cos\rho(x_1,x_2)\sin t_1 \sin t_2), \\ \text{если } \rho(x_1,x_2) < \pi; \\ \min(t_1+t_2, 2\pi-(t_1+t_2)), \\ \text{если } \rho(x_1,x_2) \ge \pi. \end{cases}$$

Топологически S^1M — сферическая надстройка над M.

Классы пространств с внутренней метрикой и 1-областей замкнуты относительно операции S^1 [2].

Возьмем $(M,\rho) = S^1\left(S^1(\Sigma^{n-2},\rho_1)\right)$ — двойную 1-надстройку над 1-областью (Σ^{n-2},ρ_1), также являющуюся 1-областью. В доказательстве теоремы 2 уже упоминалось, что $M = S^1\left(S^1\Sigma^{n-2}\right)$ гомеоморфно S^n.

В качестве p возьмем любой из двух полюсов второй надстройки. Непосредственно из определения S^1 вытекает, что пространства направлений $\Omega_p(M,\rho)$ и $S^1(\Sigma^{n-2},\rho_1)$ изометричны и гомеоморфны сферам радиуса r, где $0<r<\pi$, с центром в точке p в (M,ρ). Но $S^1(\Sigma^{n-2})$ не является топологическим многообразием [9]. Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Тем не менее, с помощью последовательности Майера-Вьеториса [13] легко доказать, что $\Omega_pM = S^1\Sigma^{n-2}$ имеет те же целочисленные сингулярные гомологии, что и сфера S^{n-1}, и является обобщенным целочисленным сингулярным $(n-1)$-многообразием (определение см. в [13]) топологической размерности $(n-1)$. Утверждение о размерности следует из того, что пространство $S^1\left(\Sigma^{n-2}\right)$ за вычетом полюсов надстройки гомеоморфно $\Sigma^{n-2}\times\mathbf{R}$ и поэтому является топологическим $(n-1)$-мерным многообразием.

В связи с теоремой 4 и нижеследующей теоремой 5 уместно привести некоторые сведения о гомологических сферах.

При $n \le 2$ гомологическая сфера Σ^n гомеоморфна S^n. Первый пример неодносвязной гомологической сферы $\Sigma^3 = \pi^3$ был получен А. Пуанкаре с помощью диаграммы Хегора в конце прошлого века. Позже это пространство было описано Зейфертом и Вебером как сферическое пространство додекаэдра [14] (см. ниже). С помощью хирургии Дена вдоль узлов и зацеплений в S^3 можно получить бесконечное число попарно негомеоморфных трехмерных гомологических 3-сфер [14]. Хирургия Дена заключается в вырезании трубчатых окрестностей узлов (полноториев) и новом способе их вклейки. Единственная известная неодносвязная гомологическая 3-сфера с конечной фундаментальной группой (порядка 120) — π^3. Известно [14], что первая группа гомологий $H_1(M)$ топологического многообразия M изоморфна фактор-группе $\pi/[\pi,\pi]$ фундаментальной группы $\pi = \pi_1\left(M\right)$ многообразия M по ее коммутатору

$[\pi,\pi]$. Поэтому $H_1(M)=0$ тогда и только тогда, когда $\pi=[\pi,\pi]$; такие группы называются совершенными.

Связная сумма $\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ двух n-мерных гомологических сфер Σ_1^n и Σ_2^n также является гомологической n-сферой. В самом деле, $\pi_1\left(\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n\right)$ в случае $n \geq 3$ по теореме Зейферта-Ван-Кампена ([15], теорема 3.1) изоморфна свободному произведению $\pi_1\left(\Sigma_1^n\right) * \pi_1\left(\Sigma_2^n\right)$. Отсюда следует, что группа $\pi_1\left(\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n\right)$ совершенна; она бесконечна, если Σ_1^n и Σ_2^n неодносвязны. На основании двойственности Пуанкаре, $H_{n-1}\left(\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n\right) = H_1\left(\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n\right)$. С помощью последовательности Майера-Вьеториса [13] легко получить теперь, что $\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ — гомологическая n-сфера. Операция связной суммы позволяет получить бесконечное число попарно негомеоморфных гомологических сфер, если задана хотя бы одна неодносвязная.

Вебер и Зейферт [14,16] впервые реализовали гомологическую 3-сферу Пуанкаре π^3 в виде пространства орбит S_1^3/Γ^* свободного изометричного действия бинарно икосаэдральной группы Γ^* на единичной 3-сфере S_1^3 в E^4. Подмножество

$$S_1^3 = Q' = \left\{ q \in Q \;\middle|\; |q| = 1 \right\}$$

единичных кватернионов тела кватернионов Q составляет по умножению группу Ли, изоморфную $SU(2)$ и двулистно накрывающую группу Ли $SO(3)$ собственных линейных изометрий евклидова пространства E^3. Последнее реализуется в виде

$$E^3 = \left\{ h = \alpha i + \beta j + \gamma k \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in R \right\}.$$

Двулистный гомоморфизм групп Ли $\sigma\colon Q' \to SO(3)$ с ядром $\ker\sigma = \{\pm 1\}$ определяется формулой

$$\sigma(q)(h) = qhq^{-1}.$$

Группа Γ^* определяется равенством $\Gamma^* = \sigma^{-1}(I)$, где I — группа икосаэдра (додекаэдра), т.е. дискретная группа всех собственных симметрий правильного икосаэдра (додекаэдра) в E^3. Упомянутое свободное действие определяется формулой

$$q^*(q) = q^* q, \qquad q^* \in \Gamma^*, \qquad q \in Q'. \tag{I}$$

Естественная риманова метрика на $S_1^3 = Q'$ (постоянной кривизны 1) биинвариантна на группе Ли Q'. Поэтому левые умножения (I) состоят из переносов Клиффорда-Вольфа. Следовательно, пространство орбит S_1^3/Γ^* действия (I) с индуцированной из S_1^3 римановой метрикой является однородным римановым многообразием постоянной кривизны 1 [16]. Пространство S_1^3/Γ^* гомеоморфно пространству π^3.

Единственной нетривиальной конечной совершенной группой, имеющей неприводимые комплексные представления без неподвижных ненулевых точек, является Γ^*. Таких представлений с точностью до эквивалентности ровно два. Первое, α_1, определяется формулой (I), второе задается формулой $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$. Здесь φ — внешний автоморфизм группы Γ^*. Группа Γ^* свободно действует изометриями на

$$S_1^{4k-1} = \left\{(q_1,\dots,q_k) \mid q_i \in Q,\ |q_1|^2 + \dots + |q_k|^2 = 1\right\},$$

где $k = 1,2,\dots$, по формуле

$$q^* = (q_1,\dots,q_k) = \left(\alpha_{i_1}(q^*)(q_1),\dots,\alpha_{i_k}(q^*)(q_k)\right), \qquad i_j = 1,2\,.$$

При этом получается $[k/2]+1$ попарно неизометричных пространств орбит S_1^{4k-1}/Γ^*, являющихся римановыми пространствами постоянной секционной кривизны 1. Лишь одно из них однородно. Оно получается в случае, когда $i_1 = \dots = i_k$ [16].

Все пространства S^{4k-1}/Γ^* являются гомологическими неодносвязными сферами. В самом деле, фундаментальная группа $\pi_1\left(S_1^{4k-1}/\Gamma^*\right)$ изоморфна совершенной группе Γ^*. Поэтому $H_1\left(S_1^{4k-1}/\Gamma^*\right) = 0$. Равенство нулю остальных промежуточных гомологических групп можно доказать индукцией по k с помощью последовательности Майера-Вьеториса для объединения $S_1^{4k-1}/\Gamma^* = X_1 \cup X_2$. Здесь X_1, X_2 определяются следующим образом. Для отображения факторизации p: $E^{4k} \to E^{4k}/\Gamma^*$ и вещественного числа $\alpha \in R$ через $\alpha(p(v))$ будем обозначать элемент $p(\alpha(v))$. Тогда

$$S_1^{4k-1}/\Gamma^* = \{\,\alpha u + \beta v \mid 0 \le \alpha,\beta;\ \alpha^2 + \beta^2 = 1\,,$$
$$u \in S_1^{3}/\Gamma^*, \qquad v \in S_1^3/\Gamma^*\,\}.$$

Для всех таких α, β, u, v определим

$$X_1 = \left\{\alpha u + \beta v \mid 0 \le \alpha \le \sqrt{2}/2\right\},$$
$$X_2 = \left\{\alpha u + \beta v \mid \sqrt{2}/2 \le \alpha \le 1\right\}.$$

Очевидно,

$$X_1 \simeq \mathrm{Con}\left(S_1^{4(k-1)-1}/\Gamma^*\right) \times S_1^3/\Gamma^*\,,$$
$$X_2 \simeq S_1^{4(k-1)-1}/\Gamma^* \times \mathrm{Con}\,(S_1^3/\Gamma^*)\,,$$
$$X_1 \cap X_2 \simeq S_1^{4(k-1)-1}/\Gamma^* \times S_1^3/\Gamma^*\,.$$

Здесь $\simeq$ означает гомеоморфность пространств.

Теорема 5. *Любая сфера S_1^{4k+1}, $k = 1,2,\dots$ допускает внутреннюю метрику ρ кривизны ≥ 1 по А. Д. Александрову с пространством направлений и сферами радиусом, меньшим π, в некоторых точках из $\left(S^{4k+1}, \rho\right)$, не являющимися многообразиями и потому негомеоморфными S^{4k}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Реализуем единичную сферу S_1^{4k+1} в виде

$$S_1^{4k+1} = \{\, z = \alpha x + \beta y \in E^{4k+2} = E^{4k} \oplus E^2 \mid$$
$$x \in S_1^{4k-1} \subset E^{4k},\ y \in S_1^1 \subset E^2;\ 0 \le \alpha,\beta;\ \alpha^2 + \beta^2 = 1\,\}\,.$$

Тогда Γ^* действует изометриями на S_1^{4k+1} по формуле

$$q^*(z = \alpha x + \beta y) = \alpha q^*(x) + \beta y\,, \qquad q^* \varepsilon \Gamma^*$$

с множеством неподвижных точек $S_1^1 \subset E^2$. Пространство орбит S_1^{4k+1}/Γ^* допускает единственную внутреннюю метрику ρ, для которой каноническая проекция p: $S_1^{4k+1} \to \left(S_1^{4k+1}/\Gamma^*, \rho\right)$ является субметрией. Субметрией одного метрического пространства на другое называется отображение, отображающее замкнутые шары первого пространства на замкнутые шары того же радиуса во втором пространстве [17].

Тогда $\left(S_1^{4k+1}/\Gamma^*, \rho\right)$ — пространство с внутренней метрикой кривизны ≥ 1. Это следует из неопубликованного результата, полученного автором: образ относительно субметрии всякого конечно-компактного пространства с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ является пространством того же вида. В данном случае достаточно воспользоваться предложением 4.6 из [18].

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\left(S_1^{4k+1}/\Gamma^*, \rho\right) = S^1\left(S^1(S_1^{4k-1}/\Gamma^*)\right).$$

Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в теореме 4. Теорема 5 доказана.

В доказательстве теоремы 5 были использованы орбиты свободных дискретных групп движений с последующей операцией двойной 1-надстройки. В связи с этим представляют интерес следующие задачи.

Задача 3. *Классифицировать все пространства орбит дискретных групп движений единичных евклидовых сфер, являющиеся неодносвязными гомологическими сферами. Существуют ли такие пространства в размерностях* $n \neq 4k - 1$; $k = 1,2,\ldots$?

Задача 4. *Гомеоморфно ли* $(n-1)$*-мерной сфере пространство направлений* $\Omega_p M$ *в точке* p n*-мерного,* $n = 3,4$, *топологического многообразия* M *с внутренней метрикой кривизны* $\leq K$ $(\geq K)$ *по А. Д. Александрову?*

Задача 5. *Являются ли пространства, построенные в теореме* 4 (5), *пределами по Хаусдорфу-Громову* [19] *последовательностей римановых* C^∞*-многообразий с секционными кривизнами* ≤ 1 (≥ 1)?

Пространства ограниченной снизу кривизны и римановы многообразия

Пусть (M, ρ) — локально компактное пространство с внутренней метрикой двусторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизны. В таком пространстве условие локальной продолжаемости кратчайших (каждая кратчайшая с концами в некоторой окрестности данной точки продолжаема до большей кратчайшей за эти концы) эквивалентно тому, что M — топологическое многообразие (А. Д. Александров и автор [1]). При этом условии (M, ρ) изометрично риманову многообразию с непрерывным метрическим тензором [20]. В частности, M сглаживаемо. В конце статьи будет приведено доказательство теоремы 8.

Теорема 8. *Всякое локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ по А. Д. Александрову, удовлетворяющее условию локальной продолжаемости кратчайших изометрично конечномерному риманову многообразию класса $C^{0,1/2}$.*

В работе [21] К. Плаут называет *почти римановым* метрически и геодезически полное пространство с внутренней метрикой локально ограниченной снизу кривизны, имеющее конечную топологическую размерность. Условие геодезической полноты означает отсутствие геодезически терминальных точек. Точка называется *геодезически терминальной*, если существует непродолжаемая за нее геодезическая. Ясно, что в пространстве с локальным существованием кратчайших из условия их локальной продолжаемости вытекает геодезическая полнота. С другой стороны, дважды покрытый круг является почти римановым пространством, не удовлетворяющим условию локальной продолжаемости кратчайших.

В работе [21] среди прочих результатов доказывается, что почти римановы пространства являются топологическими многообразиями, в каждой их точке касательное пространство [1] изометрично евклидову пространству соответствующей размерности; получающиеся многообразия в размерности, не равной четырем, сглаживаемы, если они локально строго выпуклы. В [22] с помощью результатов [21] доказывается, что почти риманово пространство с положительным радиусом инъективности допускает гладкую структуру.

Легко видеть, что полное локально компактное пространство с внутренней метрикой ограниченной снизу кривизны, удовлетворяющее условию локальной продолжаемости кратчайших, является G-пространством Буземана [23] и на основании работы [24] имеет конечную топологическую размерность. Таким образом, такое пространство почти риманово. Мы видим, что доказываемая ниже теорема тесно связана с работами [21,22], но не вытекает из них.

Лемма 1. *Пусть (M, ρ) — локально компактное полное пространство с внутренней метрикой кривизны ≥ 1 и топологической размерности, большей единицы, в котором любая кратчайшая длины $<\pi$ содержится внутри большей кратчайшей. Тогда для каждой точки $p \in M$ пространство (M, ρ) изометрично пространству $S^1\left(\Omega_p(M, \rho)\right)$, где Ω_pM — пространство направлений к (M, ρ) в точке p, а S^1 — операция 1-надстройки* [1].

Доказательство. Из локальной компактности, полноты M и упомянутого условия продолжаемости кратчайших вытекает, что любую кратчайшую pq в M длины, меньшей π, можно продолжить до кратчайшей $pp_1 \supset pq$ длины π. В M выполняется условие неналегания кратчайших [1], поэтому любые две точки $p,q \in M$ с расстоянием $\rho(p,q) < \pi$, соединяются единственной кратчайшей. Отсюда на основании локальной компактности и полноты в M кратчайшие длины, меньшие π, непрерывно зависят от своих концов.

Следовательно, для любых двух кратчайших с общим началом p на основании предложения 2.5 в [1], доказанного Александровым, будет выполняться условие

1-выпуклости, если их длины меньше π. Поэтому существует ровно одна точка $p_1 \in M$ с условием $\rho(p,p_1) = \pi$; если же $\rho(p,q) < \pi$, то

$$\rho(p,p_1) = \rho(p,q) + \rho(q,p_1).$$

Теперь на основании неналегания кратчайших получаем, что для всех $q \in M$, $\rho(p,q) \le \pi$ и M компактно.

Пусть теперь ξ, η — дза направления в точке p. В каждом направлении ξ, η можно выпустить единственную кратчайшую K_ξ, K_η, соединяющую точки p и p_1. Вследствие неналегания кратчайших K_ξ и K_η могут пересекаться только в точках p и p_1. В результате получаем двуугольник из кратчайших K_ξ, K_η с углами γ в точке p и γ_1 в точке p_1. Рассматривая K_ξ, K_η как кратчайшие, исходящие из точки p, получим вследствие 1-выпуклости, что $\gamma \ge \gamma_1$. Но точки p, p_1 равноправны, поэтому $\gamma_1 \ge \gamma$ и $\gamma = \gamma_1$.

Отсюда, снова используя условие 1-выпуклости, выводим, что для любых точек q_ξ, q_η соответственно на K_ξ и K_η выполняется формула сферической тригонометрии

$$\cos\rho(q_\xi,q_\eta) = \cos\rho(p,q_\xi)\cos\rho(p,q_\eta) + \cos\gamma\sin\rho(p,q_\xi)\sin\rho(p,q_\eta).$$

Но это означает, что (M,ρ) изометрично $S^1\left(\Omega_p(M,\rho)\right)$, что и требовалось доказать. Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 2. *В условиях леммы 1 пространство направлений $\Omega_p(M,\rho)$ изометрично сфере $S(p,\pi/2)$ радиусом $\pi/2$ с центром в точке p в (M,ρ). Сфера $S(p,\pi/2)$ π-выпукла в том смысле, что всякая геодезическая в (M,ρ), проходящая через точки $q,q' \in S(p,\pi/2)$ с расстоянием $\rho(q,q') < \pi$, целиком лежит в $S(p,\pi/2)$.*

Предложение 1. *В условиях леммы 1 (M,ρ) изометрично единичной евклидовой сфере S_1^n некоторой конечной размерности $n \ge 2$.*

Доказательство. На основании вышесказанного (M,ρ) является G-пространством Буземана, имеющим в окрестности каждой своей точки одну и ту же конечную топологическую размерность $n \ge 2$. Дальнейшее доказательство ведется индукцией по n.

Вследствие лемм 1 и 2 для диаметрально противоположной к p точки p_1 $(M,\rho)\setminus\{p,p_1\}$ гомеоморфно $\Omega_p(M,\rho)\times R$. В [25] Морита доказал, что для паракомпакта Y, являющегося счетной суммой локально компактных замкнутых подпространств и 1-мерного топологического пространства T, $\dim(Y\times T) = \dim Y + \dim T$. На основании равенства Мориты $\dim\Omega_p(M,\rho) = n - 1$.

Если $n = 2$, то на основании лемм 1 и 2 $\Omega_p(M,\rho)$ изометрично единичной евклидовой окружности, а (M,ρ) — единичной евклидовой двумерной сфере. При $n \ge 3$ сфера $S(p,\pi/2)$ имеет размерность $n-1$ и удовлетворяет всем условиям предложения. Утверждение доказывается индукцией по n с применением лемм 1,2. Предложение 1 доказано.

В работе [26] доказана, хотя и не сформулирована в явном виде, следующая теорема.

Теорема 6. *Пространство с внутренней метрикой и локальным существованием кратчайших является пространством кривизны $\geq K$ тогда и только тогда, когда каждая точка пространства имеет окрестность, любая четверка точек которой изометрично вкладывается в односвязное полное риманово пространство постоянной секционной кривизны K', где $K' \geq K$ и K', вообще говоря, зависит от выбранной четверки. При этом сумма попарных углов между тремя кратчайшими, исходящими из одной точки, не превосходит 2π.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, через (M, ρ) обозначается локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$, удовлетворяющее условию локальной продолжаемости кратчайших.

Предложение 2. *Пространство направлений $\Omega_p M$ к (M, ρ) в точке $p \in M$ гомеоморфно сферам достаточно малого положительного радиуса в M с центром в p, следовательно, компактно.*

Доказательство. Вследствие условий на M, существует такое положительное число r_0, что для каждого числа r, где $0 < r < r_0$, справедливы утверждения:

а) в каждом направлении $\xi \in \Omega_p M$ из точки p можно выпустить единственную кратчайшую $pq(\xi)$ длины r;

б) отображение

$$f: \Omega_p M \to S(p,r), \qquad f(\xi) = q(\xi)$$

взаимно однозначно;

в) для любой пары кратчайших длины r с началом в точке p выполняется условие K-выпуклости;

г) каждая кратчайшая qp длины r продолжается до кратчайшей qq_1 длины $2r$.

Отметим, что из утверждений б) и в) непосредственно вытекает непрерывность f. Докажем, что непрерывно f^{-1}.

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \Omega_p M$, $f(\xi_i) = q_i$, $i = 1,2$ и угол

$$\angle(\xi_1,\xi_2) \geq \varepsilon > 0. \tag{1}$$

На основании г) существует такая точка q_3, что

$$\rho(q_1,q_3) = 2r; \qquad \rho(p,q_i) = r, \qquad i = 1,3.$$

Пусть $q_3 = f(\xi_3)$. Тогда $\angle(\xi_1,\xi_3) = \pi$. Вследствие теоремы 6 и существования угла в сильном смысле [1] получаем

$$\angle(\xi_1,\xi_2) + \angle(\xi_2,\xi_3) = \angle(\xi_1,\xi_3) = \pi. \tag{2}$$

Из K-выпуклости в утверждении в) и соотношений (1), (2) следует, что

$$\gamma_K(q_3pq_2) \leq \angle(\xi_3,\xi_2) \leq \pi - \varepsilon. \tag{3}$$

Здесь $\gamma_K(q_3pq_2)$ обозначает угол на K-плоскости [1] в треугольнике со сторонами $\rho(p,q_2) = \rho(p,q_3) = r$, $\rho(q_2,q_3)$, противолежащий последней стороне.

Предположим на время, что $K = 0$. Тогда по теореме косинусов

$$\rho(q_2,q_3) \le \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(\pi - \varepsilon)} = 2r\sin(\pi - \varepsilon)/2.$$

По неравенству треугольника

$$\rho(q_1,q_2) \ge \rho(q_1,q_3) - \rho(q_2,q_3) \ge$$
$$\ge 2r(1 - \sin(\pi/2 - \varepsilon/2)) = 2r(1 - \cos\varepsilon/2) = 4r\sin^2\varepsilon/4.$$

Следовательно, если

$$\rho(q_1,q_2) < 4r\sin^2\varepsilon/2 = \delta,$$

то $\angle(\xi_1,\xi_2) < \varepsilon$.

Пусть теперь K произвольно. Обозначим через γ_K и S_K соответственно $\gamma_K(q_3pq_2)$ и площадь треугольника на K-плоскости, соответствующего треугольнику $\Delta = q_3pq_2$ в (M,ρ). Известно, что

$$|\gamma_K - \gamma_0| \le |K|S_K \sim |K|S_0 = (1/2)|K|r^2\sin\gamma_0,$$

где $S_K \sim S_0$ означает, что $S_K/S_0 \to 1$ при $r \to 0$ равномерно по γ_K, где $0 < \gamma_K < \pi$. Следовательно, для некоторого $C > 1$ и достаточно малых положительных r

$$|(\pi - \gamma_K) - (\pi - \gamma_0)| \le C|K|r^2\sin\gamma_0 =$$
$$C|K|r^2\sin(\pi - \gamma_0) \le C|K|r^2(\pi - \gamma_0).$$

Отсюда выводим на основании (3), что для этих r

$$\pi - \gamma_0 \ge (\pi - \gamma_0)/(1 + C|K|r^2) \ge \varepsilon/(1 + C|K|r^2), \quad \gamma_0 \le \pi - \varepsilon/(1 + C|K|r^2).$$

Используя уже проведенное рассуждение для $K = 0$, получаем, что для достаточно малых положительных r будет выполняться неравенство $\angle(\xi_1,\xi_2) < \varepsilon$, если

$$\rho(q_1,q_2) < 4r\sin^2(\varepsilon/2(1 + C|K|r^2)) = \delta.$$

Это значит, что f^{-1} непрерывно. Предложение 2 доказано.

Замечание 3. Из доказательства предложения 2 видим, что отображение метрических пространств f^{-1} является отображением Гельдера с показателем 1/2, в то время как f — отображение Липшица.

Для числа $K \ne 0$ обозначим через k число $\sqrt{|K|}$.

Лемма 3. *Пусть в пространстве* (M,ρ)

$$\rho(q_1,q_3) = \rho(q_1,p) + \rho(p,q_3) = 2r = 2\rho(q_1,p) > 0, \tag{4}$$

$$0 < \rho(p,q_2) = \delta \le r \tag{5}$$

и выполняется условие в) из доказательства предложения 2.

Тогда

$$0 \le \angle\, q_2pq_3 - \gamma_K(q_2pq_3) < 2 \arcsin f(K,\delta),$$

где

$$f(K,\delta) = \begin{cases} \delta/r, & K=0, \\ \operatorname{tg} k\delta \operatorname{ctg} kr, & K>0, \\ \operatorname{th} k\delta \operatorname{cth} \mathrm{kr}, & K<0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. На основании (4) и неравенства треугольника для углов [1]

$$\pi = \angle\, q_3pq_1 \le \angle\, q_3pq_2 + \angle\, q_2pq_1 . \tag{7}$$

Отсюда в силу теоремы 6 получим равенство

$$\pi = \angle\, q_3pq_1 = \angle\, q_3pq_2 + \angle\, q_2pq_1 . \tag{8}$$

Это вместе с K-выпуклостью дает неравенство

$$\gamma_K(q_3pq_2) + \gamma_K(q_2pq_1) \le \pi . \tag{9}$$

Можно считать, что

$$0 < \angle\, q_2pq_3 - \gamma_K(q_2pq_3),$$

иначе неравенство (6) выполняется. Тогда в (9) соблюдается строгое неравенство.

Обозначим через $p^Kq_2^Kq_3^K$ и $p^Kq_2^Kq_1^K$ треугольники на K-плоскости, соответствующие треугольникам pq_2q_3 и pq_2q_1. Составим из этих треугольников четырехугольник $p^Kq_1^Kq_2^Kq_3^K$ таким образом, чтобы

$$\angle\, q_1^Kp^Kq_3^K = \angle\, q_1^Kp^Kq_2^K + \angle\, q_2^Kp^Kq_3^K . \tag{10}$$

Вследствие (4),

$$q_1^Kq_2^K + q_2^Kq_3^K \ge q_1^Kp^K + p^Kq_3^K .$$

На основании последних двух неравенств четырехугольник выпуклый и вследствие (5)

$$h < \delta , \tag{11}$$

где h — высота p^Ks^K равнобедренного треугольника $q_1^Kp^Kq_3^K$, опущенная из вершины p^K.

Легко находим, что в прямоугольном треугольнике $p^Kq_1^Ks^K$

$$\gamma = (1/2)\, \angle\, q_1^Kp^Kq_3^K = \arccos f(K,h). \tag{12}$$

На основании K-выпуклости и соотношений (8), (10)-(12)

$$\angle\, q_2pq_3 - \gamma_K(q_2pq_3) \le \Big(\angle\, q_2pq_3 - \gamma_K(q_2pq_3)\Big) + \Big(\angle\, q_2pq_1 - \gamma_K(q_2pq_1)\Big) =$$
$$= (\pi - \gamma) = 2(\pi/2 - \gamma/2) = 2\arcsin f(K,h) < 2\arcsin f(K,\delta),$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 3 непосредственно следует

Предложение 3. *При соблюдении условий а), в), г) из доказательства предложения* 2 *и* (4), (5) *из леммы* 3 *в* (M, ρ)

$$0 \le \angle\, q_2pq_3 - \gamma_K(q_2pq_3) \le C\min\,(\rho\,(p,q_2), \rho\,(p,q_3)),$$

где C — некоторая положительная постоянная, зависящая только от чисел K и r.

Предложение 4. *В каждой точке p пространства* (M, ρ) *существует касательный конус по М. Громову* [19], *изометричный касательному пространству* $K_0(\Omega_pM)$, *где* K_0 *— операция взятия конуса кривизны* 0 *над метрическим пространством* [1].

Доказательство. По определению, $K_0(\Omega_pM)$ состоит из точек вида (ξ,t), $\xi \in \Omega_pM$, $0 \le t$, с отождествленными точками $(\xi,0) \equiv O$. Расстояние в $K_0(\Omega_pM)$ определяется формулой

$$\rho_{K_0}\Big((\xi_1,t_1),(\xi_2,t_2)\Big) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos\angle\,(\xi_1,\xi_2)}.$$

Вследствие предложения 2, подпространство

$$N = \{(\xi,t) \in K_0(\Omega_pM) \mid 0 \le t \le 1\}$$

компактно. Определенное в доказательстве предложения 2 отображение f, зависящее от r, обозначим через f_r. Определим отображение

$$F : N \to \Big(B(p,r_0), \rho/r_0\Big),$$

$$F(\xi,t) = \begin{cases} f_{tr_0}(\xi), & t > 0, \\ p, & t = 0. \end{cases}$$

Здесь в $B(p,r_0)$ — замкнутый шар радиусом r_0 в (M, ρ) с центром в точке p, но снабженный метрикой ρ/r_0.

Поскольку f_r — гомеоморфизм, N компактно, а метрика ρ K-выпуклая, то F — (липшицев) гомеоморфизм. Определим семейство гомеоморфизмов

$$F_r : N \to \Big(B(p,r), \rho/r\Big), \qquad 0 < r \le r_0$$

формулой

$$F_r(\xi,t) = F(\xi, rt/r_0),$$

и семейство метрик ρ_r, $0 < r \le r_0$, на N равенством

$$\rho_r\Big((\xi_1,t_1),(\xi_2,t_2)\Big) = (\rho/r)\Big(F_r(\xi_1,t_1),F_r(\xi_2,t_2)\Big).$$

Из предложения 3 непосредственно вытекает, что при $r \to 0$ семейство метрик ρ_r равномерно сходится на компакте N×N к метрике ρ_{K_0}.

Обозначим через $(C_{\mathrm N},\sigma)$ нормированное пространство всех непрерывных вещественных функций f на компакте N с нормой Чебышева

$$\|f\| = \max_{\eta \in \mathrm N} |f(\eta)|,$$

$$\sigma(f_1,f_2) = \|f_1 - f_2\|.$$

Известно, что отображение

$$g : (\mathrm N, \rho_{\mathrm K_0}) \to (C_{\mathrm N}, \sigma),$$

определенное формулой

$$g(\eta) = \rho_{\mathrm K_0,\eta}; \qquad \rho_{\mathrm K_0,\eta}(\eta') = \rho_{\mathrm K_0}(\eta,\eta'),$$

является изометрическим вложением (отображением, сохраняющим расстояния между точками).

Из определения ρ_r следует, что

$$\rho_r\left(F_r^{-1}(q_1),F_r^{-1}(q_2)\right) = (\rho/r)(q_1,q_2),$$

$$q_1,q_2 \in (B(p,r),\rho/r).$$

Поэтому отображение

$$g_r : (B(p,r),\rho/r) \to (C_{\mathrm N},\sigma),$$

$$g_r(q)(\eta) = \rho_r\left(F_r^{-1}(q),\eta\right)$$

также является изометрическим вложением. Следовательно, для расстояния Громова-Хаусдорфа $\mathrm d_{GH}$ между компактными метрическими пространствами получаем

$$\mathrm d_{GH}\left((B(p,r),\rho/r),\left(\mathrm N,\rho_{\mathrm K_0}\right)\right) \le \sigma\left(g_r\left((B(p,r),\rho/r\right),g\left(\mathrm N,\rho_{\mathrm K_0}\right)\right) \le$$

$$\le \max\left(\sup_{\eta_1\in \mathrm N}\ \inf_{\eta_2\in \mathrm N}\ \sup_{\eta\in \mathrm N} \left|\rho_r(\eta_1,\eta) - \rho_{\mathrm K_0}(\eta_2,\eta)\right|\right),$$

$$. \sup_{\eta_2\in \mathrm N}\ \inf_{\eta_1\in \mathrm N}\ \sup_{\eta\in \mathrm N} \left|\rho_r(\eta_1,\eta) - \rho_{\mathrm K_0}(\eta_2,\eta)\right|\Big) \le$$

$$\le \sup_{\eta_1,\eta_2\in \mathrm N} \left|\rho_r(\eta_1,\eta_2) - \rho_{\mathrm K_0}(\eta_1,\eta_2)\right| \underset{r\to 0}{\to} 0.$$

Так как

$$\rho_{\mathrm K_0}\left((\xi_1,tt_1),(\xi_2,tt_2)\right) = t\rho_{\mathrm K_0}\left((\xi_1,t_1),(\xi_2,t_2)\right),$$

то вследствие доказанного существует конус $T_p(M,\rho)$ по М. Громову, изометричный $\mathrm K_0\left(\Omega_p(M,\rho)\right)$ (см. [19]), что и требовалось доказать.

Замечание 4. Впервые изометричность касательного конуса М. Громова и касательного пространства была доказана автором в его докторской диссертации для локально компактного пространства ограниченной сверху кривизны, удовлетворяющего условию локальной продолжаемости кратчайших.

Предложение 5. *Если (M, ρ) имеет топологическую размерность больше единицы, то для каждой точки $p \in M$ пространство направлений $(\Omega_p M, \angle)$ является компактным пространством с внутренней метрикой кривизны ≥ 1, в котором любая кратчайшая L длины $< \pi$ продолжается до кратчайшей, содержащей L внутри себя.*

Доказательство. Компактность $\Omega_p M$ доказана в предложении 2. В ходе его доказательства установлено, что для любого направления $\xi_1 \in \Omega_p M$ существует такое направление $\xi_3 \in \Omega_p M$, что для всех $\xi_2 \in \Omega_p M$ справедливы равенства

$$\angle(\xi_1,\xi_2) + \angle(\xi_2,\xi_3) = \angle(\xi_1,\xi_3) = \pi . \tag{13}$$

Касательное пространство $K_0(\Omega_p M)$ изометрично касательному конусу М. Громова $T_p M$ (предложение 4) и, очевидно, локально компактно. Из локальной компактности, внутреннего характера метрики, локальной продолжаемости кратчайших в M и определения $T_p M$ непосредственно вытекают конечная компактность (всякое ограниченное замкнутое подмножество компактно), метрическая полнота, внутренний характер метрики и глобальная продолжаемость кратчайших в $T_p M$. Если метрическое пространство (Q,η), состоящее из четырех точек, изометрично вкладывается в трехмерное односвязное пространство $S^3_{K'}$, постоянной кривизны K', то $(Q,\eta/r)$ изометрично вкладывается в $S^3_{K'r^2}$. Поэтому из определения $T_p M$ и теоремы 6 следует, что любая четверка точек в $T_p M$ изометрично вкладывается в $S^3_{K'}$, $K' \geq 0$, где K' зависит от выбранной четверки. Отсюда непосредственно вытекает, что в $T_p M$ глобально выполняется условие 0-выпуклости.

Если $\xi_1,\xi_2 \in \Omega_p M$, причем $\angle(\xi_1,\xi_2) < \pi$, то из определения касательного пространства $K_0(\Omega_p M)$ и доказанного внутреннего характера метрики в последнем следует, что ξ_1,ξ_2 соединяются кратчайшей в $(\Omega_p M, \angle)$. Так как M имеет топологическую размерность больше единицы, то $\Omega_p M$ содержит более двух направлений. Поэтому на основании последнего утверждения теоремы 6 для «диаметрально противоположных» направлений ξ_1,ξ_3 найдется отличное от них направление ξ_2, удовлетворяющее (13), причем

$$0 < \angle(\xi_1,\xi_2) < \pi , \qquad 0 < \angle(\xi_3,\xi_2) < \pi .$$

Тогда и ξ_1,ξ_2 соединяются кратчайшей. Таким образом, $(\Omega_p M, \angle)$ — пространство с внутренней метрикой, причем вследствие (13) каждая кратчайшая L в $\Omega_p M$ длины $< \pi$ продолжается до кратчайшей, содержащей L внутри себя. Наконец, из 0-выпуклости касательного пространства и его определения непосредственно вытекает, что $\Omega_p M$ имеет кривизну ≥ 1. Предложение 5 доказано.

Теорема 7. *Пусть (M, ρ) — локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ по А. Д. Александрову, подчиненное условию локальной продолжаемости кратчайших. Тогда (M, ρ) — топологическое многообразие не-*

которой конечной размерности n. При этом для каждой точки $p \in M$ пространство направлений $\Omega_p M$ к M в точке p изометрично единичной сфере S_1^{n-1}, а касательное пространство $K_0(\Omega_p M)$ к M в точке p — евклидову пространству E^n.

Доказательство. Пространство (M, ρ) удовлетворяет условию неналегания кратчайших [26], следовательно, является G-пространством Буземана с локально K-выпуклой метрикой. Поэтому на основании [24] M в окрестности любой своей точки p имеет одну и ту же конечную топологическую размерность n. Можно считать, что $n \geq 2$.

Ограничение гомеоморфизма $F: \mathrm{N} \to B(p, r_0)$, построенного в доказательстве предложения 4, на внутренность N дает гомеоморфизм открытых единичных шаров в метрических пространствах $K_0\left(\Omega_p M\right)$ и (M, ρ) соответственно с центрами в вершине O и точке p. Поэтому (M, ρ) будет топологическим n-мерным многообразием, если $K_0(\Omega_p M)$ изометрично E^n. Вследствие уже использовавшейся в доказательстве предложения 1 теоремы Мориты [25] $\Omega_p M$ имеет топологическую размерность $n-1$.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Так как $(\Omega_p M, \angle)$ — пространство с внутренней метрикой и неналеганием кратчайших (предложение 5), то $(\Omega_p M, \angle)$ изометрично некоторой окружности длиной $L > 0$. Из (13) следует, что $L = 2\pi$, т.е. $(\Omega_p M, \angle)$ изометрично единичной окружности S_1^1. Следовательно, касательное пространство $K_0(\Omega_p M)$ изометрично E^2.

В случае $n \geq 3$, $\Omega_p M$, вследствие предложения 5, удовлетворяет всем условиям предложения 1. На основании предложения 1 $(\Omega_p M, \angle)$ изометрично единичной сфере S_1^{n-1}. Следовательно, касательное пространство $K_0(\Omega_p M)$ изометрично евклидову пространству E^n. Теорема 7 доказана.

С помощью предложения 3 легко доказывается

Лемма 4. *Если в (M, ρ) последовательности невырождающихся кратчайших L_n, R_n с общим началом O_n сходятся к невырождающимся кратчайшим L, R с общим началом O, то*

$$\angle (L_n, R_n) \underset{n \to \infty}{\to} \angle (L, R).$$

Теорема 8. *Всякое локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ по А. Д. Александрову, удовлетворяющее условию локальной продолжаемости кратчайших, изометрично конечномерному риманову многообразию класса $C^{0,1/2}$.*

Доказательство. На основании доказанных ранее результатов так же, как в теореме 5 в [20], доказывается существование C^1-атласа дистанционных систем координат и римановой структуры с непрерывным в этом атласе метрическим тензором. Нужно только при доказательстве соотношения (4) в [20] воспользоваться леммой 3. Из последнего утверждения теоремы 7 и замечания 3 следует, что рассматриваемое пространство имеет конечную размерность Хаусдорфа. Тогда на основании леммы 3.2 в [27] дистанционные системы координат составляют атлас класса $C^{1,1/2}$, а компоненты метрического тензора в дистанционных координатах являются гельдеровскими функциями класса $C^{0,1/2}$. Теорема 8 доказана.

Дополнение при корректуре. Изометричность касательного конуса М. Громова и касательного пространства в предположениях ограниченности кривизны снизу и конечности хаусдорфовой размерности доказана в работе [18], но доказательство теоремы 7.8.1, как указано рецензентом, использует только компактность пространства направлений. Приведенное в тексте доказательство предложения 4 использует идею доказательства соответствующего результата для пространства ограниченной сверху кривизны в докторской диссертации автора.

Указание на результат, доказанный в теореме 5, содержится в конце исправленного варианта препринта [28], полученного автором от профессора К. Грове через два дня после отправки этой статьи в редакцию. Основные результаты этой работы докладывались автором на рабочем совещании памяти Н. И. Лобачевского в Санкт-Петербургском институте Эйлера в начале октября 1992 года. Автор благодарит организаторов совещания, профессора Грове и рецензента.

Список литературы

1. *А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев*, Обобщенные римановы пространства.— Успехи мат. наук (1986), т. 41, № 3, с. 3—44.
2. *В. Н. Берестовский*, Задача Борсука о метризации полиэдра.— Докл. АН СССР (1983), т. 268, № 2, с. 273—277.
3. *J. Hempel*, 3-manifolds. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton (1976).
4. *T. Rado*, Uber den Begriff der Riemannschen Flache.— Acta Litt. Sci. Szeged. (1925), № 2, p. 101—121.
5. *E. E. Moise*, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermuttung.— Ann. of Math. (1952), v. 56, p. 96—114.
6. *Дж. Манкрс*, Элементарная дифференциальная топология.— В кн.: Дж. Милнор, Дж. Сташеф, Характеристические классы. Мир, Москва (1979), с. 270—359.
7. *R. Kirby and L. C. Siebenmann*, Foundational essays on topological manifolds, smoothing and triangulations.— Ann. of Math. Studies, Princeton (1977), v. 88.
8. *T. Matumoto*, Triangulation of manifolds.— Algebraic and Geometric Topology. Proceeding of Symposia in Pure Mathematics. AMS, Providence (1978), v. 32, Part 2, p. 3—6.
9. *R. J. Daverman*, Decompositions of manifolds. Academic Press, New York (1986).
10. *M. H. Freedman*, The topology of four-dimensional manifolds.— J. Diff. Geom. (1982), v. 17, p. 357—453.
11. *M. A. Kervair*, Manifold which does not admit any differentiable structure.— Comment. Math. Helv. (1960), v. 34, p. 257—270.
12. *А. Д. Александров, В. Н. Берестовский*, Риманово пространство обобщенное. Математическая энциклопедия, т. 4. Советская энциклопедия, Москва (1984), с. 1022—1026.
13. *А. Дольд*, Лекции по алгебраической топологии. Мир, Москва (1976).
14. *Г. Зейферт, В. Трельфалль*, Топология. ГОНТИ, Москва-Ленинград (1938).
15. *У. Масси, Дж. Столлингс*, Алгебраическая топология. Введение. Мир, Москва (1977).
16. *Дж. Вольф*, Пространства постоянной кривизны. Мир, Москва (1983).
17. *В. Н. Берестовский*, Субметрии пространственных форм неотрицательной кривизны.— Сиб. матем. журн. (1987), т. 28, № 4, с. 44—56.
18. *Ю. Бураго, М. Громов, Г. Перельман*, Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами.— Успехи мат. наук (1992), т. 47, вып. 2, с. 3—51.
19. *M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu*, Structures metriques pour les varietes riemanniennes.— In ser. «Textes mathematiques», Paris (1981), № 1.
20. *В. Н. Берестовский*, Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах.— Сиб. матем. журн. (1975), т. 16, № 4, с. 651—662.
21. *C. Plaut*, Almost Riemannian spaces.— J. Diff. Geom. (1991), p. 515—537.
22. *C. Plaut*, Metric curvature, convergence, and topological finiteness.— Duke Math. J. (1992), v. 66, p. 43—57.
23. *Г. Буземан*, Геометрия геодезических. Физматгиз, Москва (1962).

24. *В. Н. Берестовский*, К проблеме конечномерности G-пространства Буземана.— Сиб. матем. журн. (1977), т. 18, с. 219—221.
25. *Morita Kiiti*, On the dimension of the product of topological spaces.— Tsukuba J. Math. (1977), v. 1, p. 1–6.
26. *В. Н. Берестовский*, Пространства с ограниченной кривизной и дистанционная геометрия.— Сиб. матем. журн. (1986), т. 27, № 1, с. 11—25.
27. *Y. Otsu and T. Shioya*, The Riemannian structure of Alexandrov spaces.— Preprint (1992).
28. *K. Grove and P. Petersen*, A radius sphere theorem.— Preprint (1992).

Manifolds with intrinsic metric with one-side bounded curvature in the sense of A. D. Alexandrov

V. N. Berestovsky

The following main results are obtained. Every connected trianglable manifold with countable base admits an intrinsic metric with curvature ≤ 1. Every locally compact space with an intrinsic metric whose curvature is locally bounded from below, under the condition of local continuation of the shortest curves, is isometric to a Riemannian space of class $C^{0,1/2}$. Five open problems are stated.