Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 60–77

УДК 514

Строение параболических кэлеровых подмногообразий в кэлеровых многообразиях

А. А. Борисенко, С. А. Остроумов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 1 октября 1993 г.

Изучается строение кэлеровых параболических подмногообразий в кэлеровом многообразии. Выясняются условия, при которых эти подмногообразия являются вполне геодезическими.

Вивчається будова параболічна келерових підмноговидів в келерових многовидах. З'ясовуються умови, за яких такі підмноговиди є цілком геодезичними.

1. Введение

В работе [1] исследованы параболические поверхности в римановых пространствах. Рассматриваются поверхности, вдоль которых для тензора Римана объемлющего пространства выполняется условие

$$R(XY)\xi = 0, \tag{1.1}$$

где X и Y— касательные, а ξ — нормальный к поверхности векторы, где R — тензор кривизны Римана. Доказывается, что через каждую точку параболической поверхности, каждая нормаль к которой подчиняется условию (1.1), проходит вполне геодезическое k-мерное подмногообразие объемлющего пространства, причем такое, вдоль которого нормаль стационарна. Найдены условия вполне геодезических компактных параболических поверхностей в римановом пространстве.

В настоящей статье рассматривается аналогичный вопрос относительно кэлеровых параболических поверхностей в кэлеровых многообразиях. Условие (1.1) заменяется условием

$$R(XY)\xi = \lambda(Q, X, Y)J(\xi), \tag{1.1'}$$

где Q — точка на поверхности, X, Y — касательные, а ξ — нормальный к поверхности векторы, $\lambda(Q, X, Y)$ — вещественнозначная функция, J — оператор комплексной структуры. При замене условия (1.1) на условие (1.1′) доказывается результат, аналогичный вещественному. Также найдены условия вполне геодезичности параболических кэлеровых подмногообразий.

2. Формулировки теорем

Поверхность F^l в римановом пространстве M^n называется k-параболической, если ее вторая квадратичная форма по отношению к каждой нормали, после приведения к диагональному виду, имеет как минимум k нулевых коэффициентов. Другими словами, ранг $r(Q) = \max_{\xi \in N_Q} r(Q, \xi)$ второй квадратичной формы поверхности, где N_Q — нормальное пространство в точке Q и $r(Q, \xi)$ — ранг второй квадратичной формы поверхности по отношению к нормали ξ в Q, удовлетворяет неравенству

$$r(Q) \le l - k\,.$$

Пусть $r^*(Q, \xi)$ — максимальный ранг точек, близких к Q, и нормалей, близких к ξ.

Нормальную плоскость к поверхности $F^l \subset M^n$ называют стационарной вдоль подмногообразия $R^k \subset F^l$, если она остается нормальной к F^l при параллельном переносе в объемлющем пространстве вдоль пути к R^k.

Теорема 1. *Пусть в окрестности точки P_0 кэлерова подмногообразия F^l ($\dim F^l_{\mathbb{C}} = l$) в кэлеровом многообразии M^n ($\dim M^n_{\mathbb{C}} = n$) ранг второй квадратичной формы постоянен и $r(P) = r(P_0) = 2(l - k)$; n — нормаль в P_0 такая, что $r(P_0, n) = r(P_0) = 2(l - k)$ и вдоль F^l выполняется условие* (1.1′).

Тогда через P_0 проходит k-мерное вполне геодезическое кэлерово подмногообразие $R^k(P_0, n)$ пространства M^n, лежащее в F^l, вдоль которого нормальная плоскость $\{n, Jn\}$ ковариантно постоянна, $r(P, n) = r(P_0, n)$ для точек $P \in R^k(P_0, n)$ и $r^*(P, n) \ge r(P_0, n)$ для граничных точек $R^k(P_0, n)$. Если поверхность полная и $r(P_0, n) = r_0 = \max_{P \in F^l} r(P)$, то $R^k(P_0, n)$ — полное кэлерово многообразие.

Голоморфной бисекционной кривизной для векторов X и Y, касательных к кэлерову многообразию, называют величину

$$B(X, Y) = \frac{< R(X, JX)Y, JY >}{< X, X >< Y, Y >}\,,$$

где R — тензор кривизны этого многообразия.

Теорема 2. *Пусть F^l — компактное $2k$-параболическое кэлерово подмногообразие в кэлеровом многообразии $M^{(l+p)}$. Предположим, что вдоль F^l выполняется условие* (1.1′) *для тензора кривизны объемлющего пространства и одно из следующих условий:*

а) *голоморфная бисекционная кривизна объемлющего пространства положительна и $k > (l + p)/2$;*

б) *голоморфная бисекционная кривизна F^l положительна и $k > l/2$.*

Тогда $k = l$ и F^l — вполне геодезическое подмногообразие в $M^{(l+p)}$.

Доказательства теоремы 1 и теоремы 2 приводятся в разделе 4 данной статьи.

3. Формулировки лемм

В доказательстве теорем 1 и 2 используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть F^l — кэлерово подмногообразие в кэлеровом многообразии M^n. Пусть $A(Q, n)$ — вторая квадратичная форма F^l относительно нормали n в точке Q. Если для вектора $x \in T_Q F^l$ выполняется условие $A(Q, n)X = 0$, то $A(Q, n)JX = 0$ и $A(Q, Jn)X = 0$, где J — комплексная структура.*

Лемма 2. *Пусть бисекционная голоморфная кривизна $B(X, Y)$ положительна для компактного кэлерова многообразия M^n. Тогда любые два его полные вполне геодезические подмногообразия F_1^m и F_2^l при $m + l > n$ имеют непустое пересечение.*

Лемма 3. *Пусть F^l — k-параболическое подмногообразие в многообразии M^n, n — нормальное поле в окрестности $P_0 \in F^l$, ранг второй квадратичной формы F^l в M^n относительно нормали n равен k. X и Y — поля в окрестности точки P_0, аннулирующие вторую квадратичную форму относительно нормали n, Y — касательное к F^l поле. Нормальная составляющая тензора кривизны $(R(XZ)Y) = 0$. Тогда*

$$\langle (\nabla_Z \alpha)(X, Y), n \rangle = 0 .$$

Доказательства этих трех лемм приводятся в разделе 5.

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Для доказательства этой теоремы мы используем некоторую конструкцию в нормальном расслоении NF^l. Пусть в окрестности точки P_0 n_1; Jn_1; ...; n_p; Jn_p — ортонормированный базис нормального пространства, а $(u^1; u^2; \dots; u^{2l-1}; u^{2l})$ — локальные координаты в окрестности P_0 на многообразии F^l. Тогда локально введем на NF^l координаты . Точка (P, n) нормального расслоения имеет координаты $(u^1, \dots, u^{2l}, \xi^1, \eta^1, \dots, \xi^p, \eta^p)$, где $(u^1, \dots, u^{2l})$ — координаты точки P, а ξ^i, η^i — коэффициенты разложения нормали ξ по векторам n_i и Jn_i, $i = \overline{1, p}$. В нормальном расслоении задана связность. Обозначим горизонтальное пространство в точке (P, n) через $H(P, n)$. Это подпространство в точке $T_{(P,n)}NF^l$. Мы рассмотрим еще одно многообразие и построим слоение над F^l. В точке $P \in F^l$ возьмем проективное пространство $\mathbb{C}P^{p-1}$, которое ставит в соответствие в нормальном к F^l пространстве $N_P F^l$ комплексной прямой точку в $\mathbb{C}P^{p-1}$. Рассмотрим новое гладкое многообразие NPF^l. Его точки — пара: точка $P \in F^l$ и точка в $\mathbb{C}P^{p-1}$. Если в $N_P F^l$ ввести координаты $\{\xi^1 + i\eta^1; \dots; \xi^p + i\eta^p\}$, то в окрестности (P, n_p) в $N\mathbb{C}P^{p-1}$ можно рассматривать такие координаты:

$$\left(u^1; \dots; u^{2l}; \frac{\xi^1 + i\eta^1}{\xi^p + i\eta^p}; \dots; \frac{\xi^{p-1} + i\eta^{p-1}}{\xi^p + i\eta^p}\right); \qquad \xi^p + i\eta^p \neq 0 .$$

Рассмотрим естественное отображение $f : NF^l \to N_P F^l$. Локально в вещественных координатах оно запишется так:

$$(u^1 ; \dots ; u^{2l} ; \dots ;\ \xi^1 ; \eta^1 ; \dots ; \xi^p ; \eta^p) \xrightarrow{f} \Big(u^1 ; \dots ; u^{2l} ;$$

$$\operatorname{Re} \frac{\xi^1 + i\eta^1}{\xi^p + i\eta^p} ; \operatorname{Im} \frac{\xi^1 + i\eta^1}{\xi^p + i\eta^p} ; \dots ; \operatorname{Re} \frac{\xi^{p-1} + i\eta^{p-1}}{\xi^p + i\eta^p} ; \operatorname{Im} \frac{\xi^{p-1} + i\eta^{p-1}}{\xi^p + i\eta^p} \Big) =$$

$$= (u^1 , \dots , u^{2l} , \operatorname{Re} \omega^1 , \dots \operatorname{Im} \omega^{p-1}) . \tag{1}$$

Это отображение индуцирует отображение касательных пространств f_*. Рассмотрим пространства $f_*(H_{P,\,n})$ в точке из NPF^l; NPF^l будем обозначать $(P, [n])$, здесь $[n]$ — класс отождествленных нормалей, точка в CP^{p-1}. Мы дальше увидим, что $f_*(H_{P,\,n})$ не зависит от выбора нормали из класса $[n]$. Получим корректно определенную связность в слоении с базой F^l, тотальным пространством NPF^l и естественной проекцией из NPF^l в F^l. Пространство, касательное к NPF^l в каждой точке, распадается на прямую сумму вертикального и горизонтального пространств. Горизонтальным будет $f_*(H_{P,\,n})$. Обозначим плоскость, аннулирующую вторую квадратичную форму относительно нормали n в точке P, через $L(P, n)$. Легко видеть, что $\forall n' \in [n]\ L(P,n') = L(P,n)$. Поэтому мы можем осуществить горизонтальное поднятие $L(P, n)$ в точку $(P, [n])$ единственным образом. Получим распределение в $TNPF^l$, которое обозначим через L'. Возьмем в точке P_0 такой же вектор n, как и в условии теоремы. Наше доказательство разобьем на несколько шагов: докажем интегрируемость распределения L' в окрестности точки $(P_0 ; [n]) \in NPF^l$. Тогда проекция интегрального многообразия, проходящего через $(P_0 , [n])$ в F^l будет касаться аннулятора матрицы второй квадратичной формы относительно нормали n. Затем мы докажем вполне геодезичность этой проекции.

1) Д о к а з а т е л ь с т в о интегрируемости распределения L'.

Якобиева матрица отображения f имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & B & C \end{array} \right), \tag{2}$$

где A — матрица размером $2(p-1)\times 2(p-1)$, B и C — столбцы длиною $2(p-1)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\xi^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & \frac{\eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \frac{-\eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & \frac{\xi^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \frac{\xi^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & \frac{\eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2} \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \frac{-\eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2}; & \frac{\xi^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2} \end{pmatrix},$$

т.е. по диагонали стоят блоки размером 2×2.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-(\xi^p)^2\xi^1 + \xi^1(\eta^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\eta^1}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \frac{-\eta^1(\xi^p)^2 + \eta^1(\eta^p)^2 + 2\xi^p\xi^1\eta^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \dots \\ \frac{-(\xi^p)^2\xi^{p-1} + \xi^{p-1}(\eta^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\eta^{p-1}}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \frac{-\eta^{p-1}(\xi^p)^2 + \eta^{p-1}(\eta^p)^2 + 2\xi^p\xi^{p-1}\eta^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{-\eta^1(\eta^p)^2 + \eta^1(\xi^p)^2 - 2\xi^p\xi^1\eta^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \dfrac{-\xi^1(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\xi^1 - 2\xi^1\eta^p\eta^1}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \dots \\ \dfrac{-\eta^{p-1}(\eta^p)^2 + \eta^{p-1}(\xi^p)^2 - 2\eta^p\xi^p\xi^{p-1}}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \\ \dfrac{-\xi^{p-1}(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\xi^{p-1} - 2\xi^p\eta^p\eta^{p-1}}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Пусть у нас имеется точка $(u^1, u^2, \dots, u^{2l-1}, u^{2l}, \xi^1, \eta^1, \dots, \xi^p, \eta^p)$ и пусть $\mu^i_{j,k}$ — коэффициенты кручения в NF^l, введем еще обозначение: ζ^i, $i = \overline{1, \dots, 2p}$, $\zeta^{2j} = \eta^j$, $\zeta^{2j-1} = \xi^j$, $j = \overline{1, \dots, p}$. Горизонтальный вектор в NF^l, т.е. вектор, лежащий в $H_{P,n}$, имеет координаты:

$$(a^1, \dots, a^{2l}, -\mu^1_{\tau,j}\zeta^\tau a^j, -\mu^2_{\tau,j}\zeta^\tau a^j, \dots, -\mu^{2p}_{\tau,j}\zeta^\tau a^j).$$

Рассмотрим его образ при действии f_* в $TNPF^l$. Координаты вектора следующие:

$$\Bigg(a^1, \dots, a^{2l}, \frac{-\mu^1_{\tau,j}\zeta^\tau a^j\xi^p - \mu^2_{\tau,j}\zeta^\tau a^j\eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2},$$

$$-\mu^{2p-1}_{\tau,j}\zeta^\tau a^j \frac{-(\xi^p)^2\xi^1 + \xi^1(\eta^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\eta^1}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} -$$

$$-\mu^{2p}_{\tau,j}\zeta^\tau a^j \frac{\eta^1(\eta^l)^2 + \eta^1(\xi^p)^2 - 2\xi^p\xi^1\eta^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2},$$

$$\frac{-\mu^1_{\tau,j}\zeta^\tau a^j\eta^p - \mu^2_{\tau,j}\zeta^\tau a^j\xi^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2}, \tag{3}$$

$$-\mu^{2p-1}_{\tau,j}\zeta^\tau a^j \frac{-\eta^1(\xi^p)^2 + \eta^1(\eta^p)^2 + 2\xi^p\xi^1\eta^p}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2} -$$

$$-\mu^{2p}_{\tau,j}\zeta^\tau a^j \frac{-\xi^1(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\xi^1 - 2\xi^1\eta^p\eta^1}{((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2)^2}, \dots\Bigg).$$

Можно взять базис нормалей так, чтобы в точке P_0 коэффициенты кручения равнялись нулю. Тогда легко видеть, что наша связность в NPF^l введена корректно. Действительно, пусть у нас имеется вектор γ, касательный к F^l в P_0, с координатами $(a^1, \dots, a^{2l})$. Его горизонтальное поднятие в точку (P_0, n), где n (любой из $[n]$) имеет координаты $(a^1, \dots, a^{2l}, 0, \dots, 0)$. А под действием f_* любой такой вектор перейдет в вектор, касательный к NPF^l в точке $(P_0, [n])$ с координатами

$$(a^1, \dots, a^{2l}, 0, \dots, 0). \tag{4}$$

Сначала мы докажем, что если X и Y — два векторных поля из распределения L', то $[XY]$ — тоже горизонтальное поле. Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^{2p-2})$ — координаты в CP^{p-1}, а (u, ω) — координаты в NPF^l.

Пусть $X = \left(x^1(u,\omega), \dots, x^{2l}(u,\omega), A^1(x,\omega,u), A^2(x,\omega,u), \dots, A^{2p-2}(x,\omega,u)\right)$ и $Y = \left(y^1(u,\omega), \dots, y^{2l}(u,\omega), B^1(x,\omega,u), B^2(x,\omega,u), \dots, B^{2p-2}(x,\omega,u)\right)$. Так как $X, Y \in L'$, то из (3) следует

$$\begin{cases} A^{2i-1} = -\dfrac{\mu^{2i-1}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \xi^p + \mu^{2i}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \eta^p}{(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2} - \\ \quad - \mu^{2p-1}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \dfrac{-(\xi^p)^2\zeta^i + \xi^i(\eta^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\eta^i}{\left((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\right)^2} - \\ \quad - \mu^{2p}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \dfrac{-\eta^i(\eta^p)^2 + \eta^i(\xi^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\xi^i}{\left((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\right)^2}; \\ A^{2i} = \dfrac{\mu^{2i-1}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \eta^p - \mu^{2i}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \xi^p}{\left((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\right)^2} - \\ \quad - \mu^{2p-1}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \dfrac{-\eta^i(\zeta^p)^2 + \eta^i(\eta^p)^2 - 2\xi^p\eta^p\xi^i}{\left((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\right)^2} - \\ \quad - \mu^{2p}_{\tau,j}\zeta^\tau x^j \dfrac{-\xi^i(\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\xi^i - 2\xi^p\eta^p\eta^i}{\left((\xi^p)^2 + (\eta^p)^2\right)^2}; \quad i = \overline{1, \dots, p-1}. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \left[XY\right]^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^j - \frac{\partial y^i}{\partial u^j} x^j + \frac{\partial x^i}{\partial \omega^\alpha} B^\alpha - \frac{\partial y^c}{\partial \omega^\alpha} A^\alpha; \\ i = \overline{1, \dots, 2l} \qquad \alpha = \overline{1, \dots, 2p-2}; \\ \left[XY\right]^{l+\beta} = \frac{\partial A^\beta}{\partial u^k} y^k - \frac{\partial B^\beta}{\partial u^k} x^k + \frac{\partial A^\beta}{\partial \omega^\alpha} B^\alpha - \frac{\partial B^\beta}{\partial \omega^\alpha} A^\alpha; \\ k = \overline{1, \dots, 2l}; \quad \alpha, \beta = \overline{1, \dots, 2p-2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогичное выражение, в котором лишь x^j заменяется на y^j, представляется для B^j. Выберем нормальный базис $n_1, Jn_1, \dots, n_p, Jn_p$ так, чтобы в интересующей нас точке P_0 все координаты кручения были нулевыми, и чтобы $n_p = n(P_0)$. Тогда $(\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^p, \eta^p) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$. Горизонтальность скобки $\left[XY\right]$ в точке $(P_0, [n_p])$ означает, что $\left[XY\right]^{2l+\beta} = 0$, $\beta = \overline{1, \dots, 2p-2}$. Это видно из (4). Далее, в точке $(P_0, [n_p])$ из (6) следует

$$\left[XY\right]^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^j - \frac{\partial y^i}{\partial u^j} x^j, \qquad i,j = \overline{1, \dots, 2l}.$$

Из (5) получаем

$$\frac{\partial A^s}{\partial u^k} = -\frac{\partial \mu^s_{2p-1,j}}{\partial u^k} x^j; \qquad \frac{\partial B^s}{\partial u^k} = -\frac{\partial \mu^s_{2p-1,j}}{\partial u^k} y^j; \qquad s = \overline{1, \dots, 2p-2}.$$

Из (6) получаем

$$\left[XY\right]^{2l+\beta} = -\frac{\partial \mu^\beta_{2p-1,j}}{\partial u^k} x^j y^k + \frac{\partial \mu^\beta_{2p-1,j}}{\partial u^k} x^k y^j, \quad k,j = \overline{1, \dots, 2l}, \quad \beta = \overline{1, \dots, 2p-2}.$$

Выберем координаты на F^l в окрестности точки P_0 так, чтобы $\frac{\partial}{\partial u^1}$ был проекцией на F^l вектора X, а $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ — проекцией на F^l вектора Y. Тогда в точке $(P_0, [n]) \in NPF^l$ имеем $X = (1, 0, \dots, 0)$, $Y = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Поэтому

$$\left[XY\right]^{2l+\beta} = -\frac{\partial \mu^\beta_{2p-1,1}}{\partial u^2} + \frac{\partial \mu^\beta_{2p-1,2}}{\partial u^1}, \qquad \beta = \overline{1, \dots, 2p-2}. \tag{7}$$

Запишем уравнение Риччи [4]

$$\mu^\beta_{2p-1,2;1} - \mu^\beta_{2p-1,1;2} + \sum_\rho \left(\mu^\rho_{2p-1,1}\mu^\rho_{\beta,2} - \mu^\rho_{2p-1,2}\mu^\rho_{\beta,1}\right) +$$
$$+ g^{lh}\left(A^\beta_{l2} A^{2p-1}_{h1} - A^\beta_{l1} A^{2p-1}_{h2}\right) + \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial u^2}; \frac{\partial}{\partial u^1}\right) \nu_{2p-1}; \nu_\beta \right\rangle = 0. \tag{8}$$

Заметим, что у нас базис нормалей $n_1; Jn_1; \dots; n_p; Jn_p$. Поэтому в формуле (7) ν_{2p-1} — это вектор n_p, а под ν_β при β, принимающем значения от 1 до $2p-2$, подразумеваются векторы $n_1, \dots, Jn_{p-1}$. Учитывая то, что в нашей точке коэффициенты кручения нулевые, и то, что $A^{2p-1}_{h2} = A^{2p-1}_{h1} = 0$, X и Y аннулируют вторую квадратичную форму относительно нормали n_p. Выбрав параметризацию в F^l так, чтобы $\Gamma^i_{jk}(P_0) = 0$, перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\mu^\beta_{2p-1,2;1} - \mu^\beta_{2p-1,1;2} = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^2}; \frac{\partial}{\partial u^1}\right) \nu_{2p-1}; \nu_\beta \right\rangle.$$

Но в соответствии с условием (1.1′) $R\left(\frac{\partial}{\partial u^2}; \frac{\partial}{\partial u^1}\right) \nu_{2p-1} = \lambda J \nu_{2p-1} = \lambda \nu_{2p}$.

Поэтому, из выражения (7) следует

$$\left[XY\right]^{2l+\beta} = \langle \lambda v_{2p}\,;\, v_\beta \rangle\,; \qquad \beta = \overline{1, \dots, 2p-1}\,,$$

т.е. $\left[XY\right]^{2l+\beta} = 0$.

Итак, мы доказали, что $\left[XY\right]$ будет горизонтальным полем.

Теперь мы докажем, что дифференциал естественной проекции $\pi : NPF^l \to F^l$ переводит вектор $\left[XY\right]$ в точке $(P_0,\ [n(P_0)\,])$ в вектор, аннулирующий вторую квадратичную форму относительно нормали $n(P_0)$. Мы обозначим эту матрицу через A^{2p-1}, а ее коэффициенты через A^{2p-1}_{ij}, $i, j = \overline{1, \dots, 2l}$.

Нам нужно показать, что $A^{2p-1}_{ij}\left[\pi_*(X); \pi_*(Y)\right]^i = 0$, $i, j = \overline{1, \dots, 2l}$. Заметим, что $\pi_*\left(\left[XY\right]_{(P_0,\,[n(P_0)])}\right) = \left[\pi_*(X); \pi_*(Y)\right]$. Матрицы вторых квадратичных форм относительно нормалей $n_1, Jn_1, \dots, n_p, Jn_p$ обозначим через A^s, $s = \overline{1, \dots, 2p}$, а их коэффициенты через $A^s_{i,j}$, $i,j = \overline{1, \dots, 2l}$. Параметризация NPF^l в окрестности $(P_0,\ [n(P_0)\,])$ остается прежней. Так как $X, Y \in L'$, то в окрестности точки P_0:

$$A^{2p-1}_{ij}\, x^i + \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \omega^\alpha A^\alpha_{ij} x^i = 0, \qquad A^{2p-1}_{ij}\, y^i + \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \omega^\alpha A^\alpha_{ij} y^i = 0, \tag{9}$$

где x^i и y^i — функции от u и ω. Уравнение Кодацци, учитывая координаты (4), запишем в виде

$$A^\sigma_{ij,k} - A^\sigma_{ik,j} = \sum_\tau \left(\mu^\tau_{\sigma,k} A^\tau_{ij} - \mu^\tau_{\sigma,j} A^\tau_{ik}\right) + \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}; \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k};\, n_\sigma \right\rangle.$$

Благодаря специфике системы координат и условию (1.1′)

$$\frac{\partial A^\sigma_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial A^\sigma_{ik}}{\partial u^j} = 0. \tag{10}$$

Продифференцируем первое равенство (9) по u^k и, умножив на y^k, просуммируем по k. Получаем

$$A^{2p-1}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k + \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \omega^\alpha A^\alpha_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k = \frac{\partial A^{2p-1}_{ij}}{\partial u^k} x^i y^k - \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \omega^\alpha \frac{\partial A^\alpha_{ij}}{\partial u^k} x^i y^k.$$

Учитывая (10), получаем

$$A^{2p-1}_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^k + \sum_{\alpha=1}^{2p-1} \omega^\alpha A^\alpha_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} y^k = 0$$

и аналогично

$$A^{2p-1}_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k + \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \omega^\alpha A^\alpha_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k = 0.$$

Вычитая из предпоследнего равенства последнее, имеем

$$A_{ij}^{2p-1}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k}y^k-\frac{\partial y^i}{\partial u^k}x^k\right)+\sum_{\alpha=1}^{2p-2}\omega^\alpha A_{ij}^\alpha\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k}y^k-\frac{\partial y^i}{\partial u^k}x^k\right)=0\,. \tag{11}$$

Если взять $\omega^\alpha=0$, $\alpha=\overline{1,\ldots,2p-2}$, то получим, что в точке P_0

$$A_{ij}^{2p-1}\left(\pi_*\left[XY\right]\right)^j=0\,,\qquad i,j=\overline{1,\ldots,2l}\,,$$

потому что (11) означает в точности, что вектор с координатами $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^k}y^k-\dfrac{\partial y^i}{\partial u^k}x^k$, $i,k=\overline{1,\ldots,2l}$, является аннулятором матрицы второй квадратичной формы поверхности F^l относительно нормали

$$\omega^1n_1+\omega^2Jn_1+\ldots+\omega^{2p-3}n_{p-1}+\omega^{2p-2}Jn_{p-1}+n_p$$

(или $\omega^1n_1+\ldots+\omega^{2p-2}n_{2p-2}+n_{2p-1}$).

С учетом того, что $\left[XY\right]$ — горизонтальный, интегрируемость L' доказана. Здесь ход доказательства аналогичен доказательству в работе [1].

Итак, в NPF^l через точку $\left(P_0,\ [n(P_0)]\right)$ проходит единственное подмногообразие $R^k\left(P_0,\ [n(P_0)]\right)$. Пространства, касательные к этому подмногообразию в точках $(P,\ [n])$, являются горизонтальными поднятиями площадок, аннулирующих в точке P вторую квадратичную форму для нормалей класса $[n]$. По лемме 1 проекция этого многообразия на F^l будет кэлеровым подмногообразием в F^l. Эта проекция будет касаться указанных выше площадок. Мы обозначим ее через $R^k(P_0,\ n)$.

2) Доказательство вполне геодезичности $R^k(P_0,\ n)$.

В окрестности точки P_0 в F^l рассмотрим систему координат таким образом, чтобы $R^k(P_0,\ n)$ описывалось: $u^1=u^1$; …; $u^{2k}=u^{2k}$; $u^{2k+1}=0$; …; $u^{2l}=0$. Возьмем произвольное единичное нормальное к F^l поле n вдоль $R^k(P_0,\ n)$ в классе $[n]$, т.е. площадки, касательные к $R^k(P_0,\ n)$, будут аннуляторами второй квадратичной формы F^l относительно этого нормального поля. Рассмотрим в NF^l подмногообразие $\{P,\ n(P)\}_{p\in R^k(P_0,\ n)}$. Обозначим его через $\widehat{R}^k(P_0,\ n)$. Ясно, что отображение f: $NF^l\to NPF^l$ переводит $\widehat{R}^k(P_0,\ n)$ в $\widehat{R}^k\left(P_0,\ [n(P_0)]\right)$. В локальных координатах в NF^l подмногообразие $\widehat{R}^k(P_0,\ n)$ задается так:

$$u^1=u^1\,;\ldots;u^{2k}=u^{2k}\,;u^{2k+1}=0;\ldots;u^{2l}=0\,;$$
$$\xi^1=\zeta^1(u^1,\ldots,u^{2k})\,;\ldots;\eta^p=\zeta^{2p}(n^1,\ldots,u^{2k})\,.$$

i-ый касательный вектор к $\widehat{R}^k(P_0,\ n)$ будет иметь вид

$$\left(0;\ldots;\overset{i}{1};0;\ldots;\frac{\partial\zeta^1}{\partial u^i};\ldots;\frac{\partial\zeta^{2p}}{\partial u^i}\right).$$

Этот вектор отображением f_* переводится в вектор, касательный к $\widehat{R}^k(P_0, n)$ в NPF^l. Не ограничивая общности, для любой интересующей нас точки $p \in \widehat{R}^k(P_0, n)$ мы можем считать, что базисный вектор $n_p = n(P)$, т.е. в точке P $\xi^1 = \zeta^1 = 0$, $\eta^1 = \zeta^2 = 0$, $\xi^p = \zeta^{2p-1} = 1$, $\eta^p = \zeta^{2p} = 0$.

Матрица отображения f_* в этой точке (2) будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \overset{2l}{\cdot} & 0 & & & & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{array}\right).$$

Это говорит о том, что вектор $\left(0; \ldots ; \underset{i}{1}; 0; \ldots ; \frac{\partial\zeta^1}{\partial u^i}; \ldots ; \frac{\partial\zeta^{2l}}{\partial u^i}\right)$ раскладывается на сумму двух составляющих: на горизонтальную, которая равна $\left(0; \ldots ; 1; 0; \ldots ; 0; -\mu^1_{\tau,i}\zeta^\tau; \ldots ; -\mu^{2p}_{\tau,i}\zeta^\tau\right)$, и вертикальную, которая отображением f_* должна быть переведена в нуль. Для такого перевода необходимо, чтобы эта вертикальная составляющая имела координаты $(\underbrace{0; \ldots ; 0}_{2(l+p-1)}; b_1; b_2)$. Имеем

$$\left(0, 0, \ldots ; 0; \underset{i}{1}; 0; \ldots ; 0; \frac{\partial\zeta^1}{\partial u^i}; \ldots ; \frac{\partial\zeta^{2p}}{\partial u^i}\right) =$$

$$= \left(0; \ldots ; \underset{i}{1}; 0; \ldots ; 0; -\mu^1_{\tau,i}\zeta^\tau; \ldots ; -\mu^{2p}_{\tau,i}\zeta^\tau\right) + (\underbrace{0; \ldots ; 0}_{2(l+p-1)}; b_1; b_2),$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\zeta^1}{\partial u^i} + \mu^1_{\tau,i}\zeta^\tau; \ldots ; \frac{\partial\zeta^{2p}}{\partial u^i} + \mu^{2p}_{\tau,i}\zeta^\tau\right) = (\underbrace{0; \ldots ; 0}_{2(p-1)}; b_1; b_2).$$

Но в последнем равенстве слева — координаты вектора $\left(\nabla \frac{\partial}{\partial u}, n(P)\right)^\perp$, справа — координаты линейной комбинации векторов $n(P)$ и $Jn(P)$, (знак $()^\perp$ — нормальная составляющая). Следовательно, для всякого поля X, касательного к $R^k(P_0, n)$, и для всякой нормали n к F^l, для которой аннулятор второй квадратичной формы совпадает с касательным к $R^k(P_0, n)$ пространством, имеет место включение

$$\left(\nabla_X, n(P)\right)^\perp \in \mathrm{Lin}\,\{ n(P), Jn(P) \}. \tag{12}$$

Для любого касательного к F^l векторного поля Y и касательного к $R^k(P_0, n)$ поля X имеет место равенство:

$$\langle \alpha(X, Y), n \rangle = 0. \tag{13}$$

Пусть Z — касательное к $R^k(P_0, n)$ поле. Продифференцируем (13) по Z:

$$\langle \nabla_Z(\alpha(X, Y)); n \rangle + \langle \alpha(X, Y), \nabla_Z n \rangle = 0. \tag{14}$$

Но $(\nabla_Z n)^\perp = b_1 n + b_2 Jn$. Поэтому, с учетом равенства (13) и свойства второй фундаментальной формы кэлеровых многообразий [5]

$$\alpha(JX, Y) = J\alpha(X, Y) = \alpha(X, JY),$$

равенство (14) принимает вид

$$\langle \nabla_Z(\alpha(X, Y)), n \rangle = 0. \tag{15}$$

$$\nabla_Z \alpha(X, Y) = (\nabla_Z \alpha)(X, Y) + \alpha(\nabla_Z X, Y) + \alpha(X, \nabla_Z Y).$$

Но $< \alpha(X, \nabla_Z Y), n > = 0$. И, следовательно, равенство (15) можно записать в следующем виде:

$$\langle \alpha(\nabla_Z X, Y), n \rangle + \langle (\nabla_Z \alpha)(X, Y), n \rangle = 0. \tag{16}$$

По лемме (3) $\langle (\nabla_Z \alpha)(X, Y), n \rangle = 0$. Уравнение (16) переписывается так:

$$\langle \alpha(\nabla_Z X, Y), n \rangle = 0. \tag{17}$$

Это для любого касательного к F^l поля Y. Значит, $\nabla_Z X$ аннулирует вторую квадратичную форму F^l относительно нормали n. Пусть α_1 — вторая фундаментальная форма $R^k(P_0, n)$ в M^n. $\nabla_Z X = \nabla'_Z X + \alpha_1(X, Z)$. Здесь $\nabla'_Z X$ — касательная к $R^k(P_0, n)$ составляющая $\nabla_Z X$. Из (17) следует, что $\alpha_1(X, Z) = 0$. Вполне геодезичность $R^k(P_0, n)$ доказана. Тот факт, что $\left(\nabla_X n(P)\right)^\perp \in \mathrm{Lin}\,\{ n(P), Jn(P) \}$, означает ковариантное постоянство нормальной площадки $\mathrm{Lin}\,\{ n, Jn \}$ вдоль $R^k(P_0, n)$.

Теперь докажем последнее утверждение теоремы 1. (Фактически это будет повторением соответствующей части работы [1].)

Пусть Q — граничная точка $R^k(P_0, n)$. Соединим P_0 и Q геодезической $\gamma \subset R^k(P_0, n)$. Не ограничивая общности, считаем, что последняя точка P_0. Направляем координатную кривую u_1 вдоль геодезической γ. Введем координаты на поверхности так, чтобы вдоль $\gamma = \Gamma^i_{jk} = 0$, выберем ортонормированный базис нормального пространства так, чтобы коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$ вдоль γ. $R^k(P_0, n)$ будет координатной поверхностью $u^1, \dots, u^{2k}$. Пусть A^1_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующей нормали $n^1 = n$ (n^1 произвольно берется из класса $[n]$). Ввиду параболичности $A^1_{1j} = 0$. Из уравнений Кодацци:

$$A^\sigma_{ij,k} - A^\sigma_{ik,j} = \sum_\tau \left(\mu_{\tau\sigma,k} A^\tau_{ij} - \mu_{i\sigma,j} A^\tau_{ik}\right) + \langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^j}; \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}; n^\sigma \rangle.$$

$\frac{\partial A^1_{ij}}{\partial u^1} = 0$ вдоль геодезической линии γ.

Пусть X — вектор в Q; X берется из $L(Q, n)$, т.е. $A^1_{ij} x^i = 0$. Перенесем X параллельно вдоль геодезической γ и получим векторное поле $X(u')$ вдоль γ. Тогда

$$\frac{\partial A^1_{ij} x^i(u^1)}{\partial u^1} = \frac{\partial A^1_{ij}}{\partial u'} x^i u' = 0; \qquad \left(\frac{\partial x^i(u^1)}{\partial u^1} = \nabla, x^i = 0\right).$$

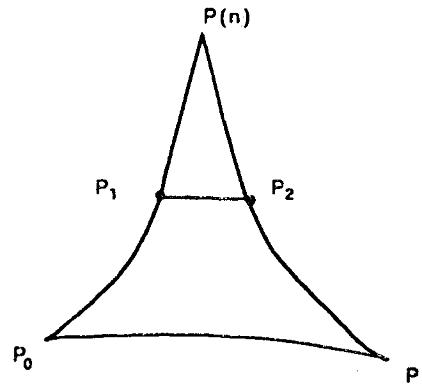
Значит, $X(P_0) \subset L^k(P_o, [n])$ и, следовательно, ранг второй квадратичной формы относительно всех нормалей из $[n]$ в граничной точке не меньше соответствующего числа в точке P_0. Если наша поверхность полная и $r(P_0, n) = r_0 = \max\limits_{P \in F^l} r(P)$, то в точке Q, как мы только что видели, этот ранг меньше не будет. Проведем через Q слой, для которого Q — внутренняя точка. Этот слой — расширение $R^k(P_0, n)$. Так что геодезические $R^k(P_0, n)$ можно продолжать без конца. По теореме Хопфа-Ринова $R^k(P_0, n)$ — полное многообразие.

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть P_0 — точка на F^l с минимальным порядком параболичности. n_0 — единичная нормаль в этой точке. $r(P_0, n) = 2(l-k)$. По теореме 1 существует вполне геодезическое кэлерово подмногообразие $R^k(P_0, n)$, проходящее через P_0, вдоль которой нормальная плоскость стационарна. Через P_0 мы проведем геодезические в F^l, ортогональные к $R^k(P_0, n)$. Они образуют поверхность F^{l-k}. Возьмем $P \in F^{l-k}$, лежащую в малой окрестности P_0, и такую, что $r(P) = r_0 = 2(l-k)$. Для каждой нормали n в P, такой, что $r(P, n) = r_0$, по теореме 1 существует единственное полное кэлерово вполне геодезическое подмногообразие $R^k(P, n)$. Согласно лемме 2 $R^k(P_0, n_0)$ пересекается с $R^k(P, n)$ в точке $P(n)$. Пусть $PP_0P(n)$ — геодезический треугольник на F^l. Если P достаточно близка к P_0, а плоскость $[n]$ — к параллельно пересеченной в нормальной связности плоскости $[n_0]$ вдоль геодезической P_0P, то слой $R^k(P, n)$ лежит в небольшой окрестности $R^k(P_0, n_0)$. Так как в противном случае при $P \to P_0$, $[n] \to [n_0]$ получили бы два k-мерных слоя для пары (P_0, n_0), проходящие через P_0, что противоречит теореме 1. Более того, кратчайшие пути $PP(n)$ и $P_0P(n)$ могут быть взяты близкими. Возьмем $P_1 \in P_0P(n)$ и $P_2 \in PP(n)$ так, чтобы

$$\frac{P_1 P(\xi)}{P_2 P(\xi)} = \frac{P_0 P(\xi)}{PP(\xi)}.$$

Соединим P_1 и P_2 единственными геодезическими, лежащими в маленькой окрестности.



Мы получим регулярную двумерную поверхность. Введем следующие обозначения: $\tau' = P_0 P(n)$; $s' = P_0 P$; $\tau = \operatorname{arc} P_0 P_1$; s — естественный параметр на кратчайшем пути $P_1 P_2$, измеряемый от P_1 и пропорциональный длине дуги $P_0 P$ с коэффициентом пропорциональности $P_0 P / P_1 P_2$. $F(\tau,s)$ — регулярная параметризация поверхности $0 \le \tau \le \tau'$, $0 \le s \le s'$. $F(0,0) = P_0$, $F(0,s') = Q$; $F(\tau',s') = F(\tau',0) = P(n)$. Пусть I — оператор параллельного переноса вдоль P_0P в объемлющем пространстве вдоль координатных кривых $r = \text{const}$, $s = \text{const}$. Выберем вектор $n_1 = n(0,0)$ так, чтобы после параллельного переноса n_1 в объемлющем пространстве вдоль P_0P мы пришли к n. На $F(\tau,s)$ определим $n(\tau,s)$ так:

$$n(0,s) = I_{P_0 F(0,s)} n_1 , \qquad n(\tau,s') = I_{PF(\tau,s')} n , \qquad n(\tau,s) = I_{F(\tau,s')F(\tau,s)} n(\tau,s') .$$

Вектор перенесем вдоль, окончательно — в точку P_0. Результат переноса обозначим через $\overline{R}\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right) n(\tau,s) \in T_{Q_0} M^n$. Пусть $\omega = \partial F(\tau,s)$ — граница.

$$I_\omega n_1 = I_{F(\tau',0)P_0} n(\tau',0); \tag{18}$$

Принимая во внимание работу [2],

$$I_\omega(n_1) - n_1 = -\int_0^{\tau'}\int_0^{s'} \overline{R}\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right) n(\tau,s)\, ds\, d\tau .$$

Так как $n(0,s') = n$ — нормаль к поверхности, то и $n(\tau,s')$ тоже. $n(\tau,s) = \overline{n}(\tau,s) + s a(\tau,s)$, где $n(\tau,s)$ — нормаль к F^l, а $a(\tau,s)$ — касательный к F^l вектор, ограниченный по модулю.

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\overline{n}(\tau,s) = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right) J\, \overline{n}(\tau,s), \qquad \left|\, \lambda\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right| \le C_1 .$$

Покажем, что касательная составляющая вектора $I_\omega(n_1) - n_1$ есть $O(s')^2$.

После параллельного переноса вектора $R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)$ в точку (τ,s') мы получим $\lambda J\,\overline{n}(\tau,s')+O(s')$. Действительно, как мы видели выше,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)=\lambda J\,\overline{n}(\tau,s)+sR\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)a(\tau,s).$$

$R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)a(\tau,s)$ — ограничен по модулю. Здесь $\overline{n}(\tau,s)=n(\tau,s)-sa(\tau,s)$.

Итак, $R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)=\lambda Jn(\tau,s)+s\left(R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)a(\tau,s)-Ja(\tau,s)\right)$. Оба этих слагаемых параллельно перенесем вдоль пути $\tau=\mathrm{const}$. Второе слагаемое есть $O(s')$ и останется таким же, первое придет в $\lambda Jn(\tau,s')$. Значит,

$$I_{F(\tau,s)F(\tau,s')}R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)=\lambda Jn(\tau,s')+O(s'). \tag{19}$$

Вектор (19) перенесем параллельно вдоль пути $F(\tau,s')F(0,s')$ «почленно». Второе слагаемое останется $O(s')$, а первое придет в λJn. Имеем

$$I_{F(\tau,s)F(\tau,s')F(0,s')}R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)=\lambda(s,\tau)Jn+O(s'). \tag{20}$$

После параллельного переноса вдоль PP_0 вектора (20) «почленно» $\lambda(s,\tau)Jn$ перейдет в $\lambda(s,\tau)Jn_1$, а $O(s')$ в $O(s')$. Но $n_1=\overline{n}(P_0)+s'd(P_0)$, где $\overline{n}(P_0)$ — нормальная к F^l составляющая, а $s'd(P_0)$ — касательная. Отсюда мы видим, что

$$\overline{R}\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(r,s)=I_\gamma R\left(\frac{\partial}{\partial s};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)n(\tau,s)=\lambda(s,\tau)J\,\overline{n}(P_0)+O(s'), \tag{21}$$

где $\gamma=F(\tau,s)F(\tau,s')F(0,s')F(0,0)$. На основании выражений (18) и (21) можем записать

$$I_\omega(n_1)-n_1=-\int_0^{\tau'}\int_0^{s'}\lambda(s,\tau)J\,\overline{n}(P_0)(s,\tau)\,ds\,d\tau+O(s')^2. \tag{22}$$

Первое слагаемое в (22) справа есть нормаль к F^l. Значит, касательная составляющая $I_\omega(n_1)-n_1$ к F^l есть $O(s')^2$.

Здесь доказательство идет аналогично доказательству в работе [1]. Только следим за тем, что нового дают здесь оператор J и условие (1.1'). Дальше — повторение соответствующей части работы [1]. Введем на F^l координаты $u^1,\dots,u^{2l}$, так, чтобы слой $R^k(P_0,n_0)$ был координатной поверхностью $u^{2(l-k)+1},\dots,u^{2l}$. Здесь n^α — ортонормальный базис, параллельный в нормальной связности F^l вдоль геодезических, исходящих из P_0.

Пусть геодезическая $\exp\xi$ идет в направлении нормали $\xi=\xi^\alpha n_\alpha$; u^i — координаты Ферми на F^l вдоль геодезической PP_0, на которой параметр $u'=s$ — длина дуги. Обозначим через $(u',\xi\alpha)$ координаты в M^n в окрестности F^l. Вдоль F^l коэффициенты метрического тензора объемлющего пространства M^n имеют вид:

$$\sigma_{i,2l+\alpha}=0,\qquad i=\overline{1,\dots,2l},\qquad \alpha=\overline{1,\dots,2p}. \tag{23}$$

В результате параллельного перенесения нормали n вдоль геодезической PP_0 мы получим поле $n(s)$. Векторное поле $n(s)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial s} + \widetilde{\Gamma}^{\,a}_{1b}\xi^b = 0, \qquad n(s) = \xi^\alpha n_\alpha(s).$$

В точке P имеем: $\frac{\partial \xi^i}{\partial s} = -\widetilde{\Gamma}^{\,i}_{1,2l+\alpha}\xi^\alpha$, где $\widetilde{\Gamma}^{\,a}_{bc}$ — символы Кристоффеля метрики σ на M^n.

Тогда

$$\xi^j_1 = -\widetilde{\Gamma}^{\,j}_{1,2l+\alpha}\xi^\alpha s', \qquad j = 2(1-k)+1, \dots, 2l. \tag{24}$$

Здесь $n_1 = \xi^j_1 n_\alpha$ в точке P_0. Так как $\sigma_{ab} = \delta_{ab}$ вдоль геодезической PP_0, то

$$\widetilde{\Gamma}^{\,j}_{1,2l+\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \sigma_{2l+\alpha,j}}{\partial u'} - \frac{\partial \sigma_{1,2l+\alpha}}{\partial u^j}\right).$$

Из (23) мы получаем:

$$\widetilde{\Gamma}^{\,j}_{1,2l+\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_{1,j}}{\partial \xi^\alpha}. \tag{25}$$

Но коэффициенты второй квадратичной формы имеют следующий вид:

$$A^\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial \xi^\alpha}. \tag{26}$$

Из (24)-(26) следует, что $\xi^j_1 \approx -\frac{1}{2}\sum_\alpha A^\alpha_{1j}\xi^\alpha s'$. Следовательно, поскольку компонента $I_\omega(n_1) - n_1$, касательная к слою, имеет порядок, как минимум, $(s')^2$, то необходимо, чтобы $A^\alpha_{1j}\xi^\alpha = 0$, в P_0.

Так как n — произвольный вектор в нормальном пространстве, а P_0P — производная геодезическая в F^{l-k}, ортогональная к слою $R(P_0,n_0)$ в P_0, то для $\alpha = \overline{1,\dots,2l}$ имеем $A^\alpha_{sj} = 0$, $(s = \overline{1;\dots,2(l-k)}$; $j = \overline{2(l-k)+1;\dots,2l})$.

Но $A^\alpha_{ij} = 0$ (асимптотические площадки, натянутые на $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $\frac{\partial}{\partial u_j}$ при $i,j = \overline{2(l-k)+1;\dots,2l}$. Таким образом, имеем сильную параболичность. Но тогда распределение площадок-подпространств, аннулирующих вторую квадратичную форму, является интегрируемым. Слои — вполне геодезичны. $R(P,n)$ и $R(P_0,n_0)$ пересекаются. Это возможно лишь тогда, когда $k = l$ и F^l — вполне геодезическая поверхность в M^n.

5. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Пусть α — вторая фундаментальная форма F^l в M^n. Здесь $Y \in T_QF^l$.

$$A(Q,n)(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), n\rangle.$$

Если для любого $Y \in T_Q F^l$ имеем равенство $\langle \alpha(X,Y),n \rangle = 0$, то, учитывая свойство второй фундаментальной для кэлеровых подмногообразий [5] имеем

$$\langle \alpha(JX,Y),n \rangle = \langle \alpha(X,JX),n \rangle = 0,$$
$$\langle \alpha(X,Y),Jn \rangle = -\langle J\alpha(X,Y),n \rangle = \langle \alpha(X,JY),n \rangle = 0.$$

Доказательство леммы 2 [7]. Допустим, что F_1^m и F_2^l не пересекаются. Найдем точки $Q_1 \in F_1^m$ и $Q_2 \in F_2^l$ между которыми достигается расстояние от F_1^m до F_2^l. Здесь L — кратчайшая, соединяющая Q_1 и Q_2. Она ортогональна к F_1^m и F_2^l. N_1 и N_2 — векторы, касательные к L в точках Q_1 и Q_2. Вдоль L параллельно перенесем пространство E_1^m, касательное к F_1^m в точке Q_1. Оно перейдет в пространство (конечно, комплексное) $\left(E_1^m\right)^*$ и обязательно пересечется с пространством E_2^l, касательным к поверхности F_2^l в точке Q_2.

Пересечение будет по комплексному пространству. Пусть Y_0 и JY_0 — два вектора из этого пространства. Вдоль L рассмотрим два векторных поля $Y(t)$ и $JY(t)$, образованные в результате параллельного переноса векторов Y_0 и JY_0. И исследуем вариацию геодезической L с полями $Y(t)$ и $JY(t)$ [3].

$$L_1'' = \int_a^b \Big(\langle Y',Y' \rangle - \langle R(Y,\dot c)\dot c,Y \rangle \Big)\,dt +$$
$$+\,\alpha_1\Big(Y(a),Y(a)\Big) - \alpha_2\Big(Y(b),Y(b)\Big) = \int_a^b \langle R(Y,\dot c)\dot c,Y \rangle\,dt,$$

где $\dot c$ — касательный вектор к L, $t \in [a,b]$ — параметр вдоль L, α_1 — вторая фундаментальная форма F_1^m в точке Q_1, α_2 — вторая фундаментальная форма F_2^l в точке Q_2. Необходимо, чтобы $L_1'' \ge 0$.

Аналогично, $L_2'' = \displaystyle\int_a^b \langle R(JY,\dot c)\dot c,JY \rangle\,dt.$

Необходимо, чтобы $L_2'' \ge 0$. Заметим,

$$\langle R(Y,\dot c)\dot c,Y \rangle = \langle R(Y,\dot c)J\dot c,JY \rangle = -\langle R(\dot c,J\dot c)Y,JY \rangle - \langle R(J\dot c,Y)\dot c,JY \rangle.$$

Имеем

$$L_1'' = \int_a^b \langle R(\dot c,J\dot c)Y,JY \rangle\,dt + \int_a^b \langle R(J\dot c,Y)\dot c,JY \rangle\,dt,$$

$$L_2'' = \int_a^b \langle R(JY,\dot{c})\dot{c},JY\rangle\, dt,$$

$$\int_a^b \langle R(J\dot{c},Y)\dot{c},JY\rangle\, dt = -\int_a^b \langle R(\dot{c},JY)\dot{c},JY\rangle\, dt = \int_a^b \langle R(JY,\dot{c})\dot{c},JY\rangle\, dt = -L_2''.$$

Тогда

$$L_1'' + L_2'' = \int_a^b \langle R(\dot{c},J\dot{c})Y,JY\rangle\, dt = -\int_a^b \frac{B(\dot{c},Y)}{\langle \dot{c},\dot{c}\rangle \langle Y,Y\rangle}\, dt,$$

где $B(\dot{c},Y)$ — бисекционная кривизна. Слева — неотрицательное число, справа — отрицательное. Пересечение неизбежно.

Доказательство леммы 3. Воспользуемся уравнением Кодацци

$$(\nabla_Z \alpha)(X, Y) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) + R^{\perp}(Z,X)Y. \tag{27}$$

Но

$$(\nabla_Y \alpha)(X, Z) = \nabla_Y(\alpha(X, Z)) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z). \tag{28}$$

Здесь $\alpha(X,Z) = 0$, так как аннулятор второй квадратичной формы максимального ранга k-параболической поверхности образует асимптотическую площадку [6].

С учетом (27) и (28)

$$\langle (\nabla_Z \alpha)(X, Y),n\rangle = -\langle \alpha(\nabla_Y X, Z),n\rangle - \langle \alpha(X,\nabla_Y Z),n\rangle + \langle R^{\perp}(Z,X)Y,n\rangle = 0.$$

Заметим, что условие (1.1′) влечет за собой равенство $R^{\perp}(Z,X)Y = 0$.

Список литературы

1. *А. А. Борисенко*, Об экстремальных свойствах компактных параболических поверхностей в римановом пространстве.— Мат. сб. (1987), т. 133 (175), № 1, с. 158—176.
2. *В. Б. Маренич*, Метрическая структура открытых многообразий неотрицательной кривизны.— Укр. геометр. сб. (1983), вып. 26, с. 79—96.
3. *Д. Громолл, В. Клингенберг, В. Мейер*, Риманова геометрия в целом. Мир, Москва (1971), 340 с.
4. *Л. П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия. ГИИЛ, Москва (1948), 316 с.
5. *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Наука, Москва (1981), т. 2, 415 с.
6. *А. А. Борисенко*, О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб. (1973), вып. 13, с. 18—27.
7. *S. Goldberg and S. Kobayashi*.—J. Diff. Geometry (1967), v. 1, p. 225—233.

On the structure of parabolic Käehler submanifolds in Käehler manifolds

A. A. Borisenko and S. A. Ostroumov

The structure of parabolic Käehler submanifolds in Käehler manifolds is studied. The geodesicity conditions for such submanifolds are determined.