Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 78–101 УДК 517.946

Усредненная модель диффузии цветных частиц в областях с малыми препятствиями

Л. Буте де Монвель

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 4, place Jussieu, 75252, Paris Cedex 05, France

Е. Я. Хруслов

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина АН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 7 октября 1993 г.

Рассматривается диффузия цветных частиц (m цветов) в области с большим числом N^{ε} отражающих препятствий малого диаметра d^{ε}: встречая препятствие, частица отражается и меняет свой цвет на один из m заданных цветов с некоторой вероятностью. Изучается асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ $(N^{\varepsilon} \to \infty,\ d^{\varepsilon} \to 0)$ решения $u^{\varepsilon}(x,t)$ начально-краевой задачи, описывающей плотности частиц, и выводится усредненная система уравнений для предельных плотностей.

Розглядається дифузія кольорових частинок (m кольорів) у області з великою кількістю N^{ε} відбиваючих перешкод, які мають малий діаметр d^{ε}: зустрічаючи перешкоду частинка відбивається і змінює свій колір на один з m даних кольорів з деякою ймовірністю. Вивчається асимптотична поведінка при $\varepsilon \to 0$ $(N^{\varepsilon} \to \infty,\ d^{\varepsilon} \to 0)$ розв'язку $u^{\varepsilon}(x,t)$ початково-крайової задачі, що описує густини частинок, та виводиться осереднена система рівнянь для граничних густин.

Введение

В работе рассматривается диффузия точечных цветных частиц в области $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^{\varepsilon}} F_i^{\varepsilon}$, содержащей большое число N^{ε} препятствий F_i^{ε} малого диаметра d_{ε}: когда частица встречает некоторое препятствие, она отражается и меняет свой цвет на один из заданных m цветов с некоторой вероятностью. Изучается асимптотическое поведение решения $u^{\varepsilon}(x,t)$ соответствующей начально-краевой задачи при $\varepsilon \to 0$, когда число препятствий N^{ε} стремится к бесконечности, а их диаметры d_{ε} к нулю. Доказано, что при определенных условиях существует предел решения $u^{\varepsilon}(x,t)$, который описывается "усредненной" начально-краевой задачей, рассматриваемой в простой области Ω.

Эта работа как по постановке, так и по результатам примыкает к исследованиям по теории усреднения краевых задач в областях с мелкозернистой границей, начатым в работах В. А. Марченко и его учеников [1–3] и получившим затем дальнейшее развитие [4–6], смыкающееся с теорией усреднения дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [7–10].

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Пусть Ω — произвольная область в пространстве R^n $(n \geq 2)$, а Ω_0 — некоторая ее компактная подобласть с гладкой границей $\partial\Omega_0 \subset \Omega$. Пусть также $F \subset R^n$ — замкнутое множество в R^n, содержащее начало координат и ограниченное гладкой поверхностью S, а F_j^ε $(j = 1,\dots,N^\varepsilon)$ — его аффинные образы вида

$$F_j^\varepsilon = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{n} n_\alpha^j a^\alpha + \varepsilon^\Theta F,$$

содержащиеся в Ω_0, $\{ a^\alpha \}_{\alpha=1}^{n}$ — система линейно независимых векторов в R^n, n_α^j — натуральные числа, $\varepsilon > 0$, $1 \leq \Theta < \frac{n}{n-1}$. Будем исходить из предположения, что диаметр F настолько мал, что F_j^ε $(j = 1,\dots,N^\varepsilon)$ не пересекаются. Рассмотрим область

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N^\varepsilon} F_j^\varepsilon$$

и предположим, что в ней происходит диффузия цветных точечных частиц. Каждая частица окрашена в один из m цветов. Обозначим цвета цифрами от 1 до m и будем называть частицы, окрашенные в k-ый цвет k-частицами. Когда k-частица встречает препятствие F_j^ε, она отражается от него и меняет свой цвет на некоторый другой цвет l $(l = 1,\dots,m)$ с вероятностью P_{kl}^j $(P_{kl}^j \geq 0,\ P_{kl}^j = P_{lk}^j,\ \sum_{l=1}^{m} P_{kl}^j = 1)$. Будем предполагать также, что частицы полностью поглощаются на границе $\partial\Omega$. Пусть $u_k^\varepsilon = u_k^\varepsilon(x,t)$, $(x \in \Omega^\varepsilon,\ t \geq 0)$, — плотность k-частиц в момент времени t. Известно, что система функций $u_k^\varepsilon(x,t)$, $k = 1,\dots,m$, является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial t} = \bar{\Delta} u_k^\varepsilon & x \in \Omega^\varepsilon,\ t > 0; \\ \dfrac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial \nu} = \sum\limits_{l=1}^{m} C_{kl}^\varepsilon u_l^\varepsilon & x \in \partial F_j^\varepsilon,\ t > 0; \\ u_k^\varepsilon = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0; \\ u^\varepsilon(x,0) = \varphi_k^\varepsilon(x) & x \in \Omega^\varepsilon,\ (k = 1,\dots,m), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная к ∂F_j^ε в направлении внешней (по отношению к Ω^ε) нормали, $\varphi_k^\varepsilon(x)$ — начальная плотность k-частиц. Коэффициенты зависят от вероятностей P_{kl}^j: $C_{kl}^j = C_{kl}(P_{kl}^j)$ и удовлетворяют условиям:

$$1)\ C^j_{kl} \geq 0\ \ (k \neq l),\ C^j_{kk} \leq 0;$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{m} C^j_{kl} = 0, \quad (l = 1,\dots,m);$$

$$3)\ C^j_{kl} \to \begin{cases} 0, & \text{если } P^j_{kl} \to 0 \\ \infty, & \text{если } P^j_{kl} \to 1. \end{cases}$$

Первое из этих условий объясняется выбором направления нормали к ∂F^ε_j; второе означает, что частицы не поглощаются границей ∂F^ε_j и, следовательно, плотность полного потока частиц в каждой точке $x \in \partial F^\varepsilon_j$ равна нулю: $\frac{\partial}{\partial\nu}\sum_{k=1}^{m} u^\varepsilon_k = 0$; третье условие — предельное, оно соответствует физическому смыслу отражения частиц с изменением цвета с предельными вероятностями 0 или 1.

Равенство нулю u^ε_k на границе области Ω означает, что все частицы поглощаются на границе области, но для рассматриваемого круга вопросов это не существенно и граничное условие на $\partial\Omega$ может быть заменено любым другим. Будем предполагать, что коэффициенты C^j_{kl} не зависят от параметра ε и при $k \neq l$ принимают значения из фиксированного конечного множества $C_0, \dots, C_N$: $0 = C_0 < C_1 < \dots < C_N \leq \infty$, причем, если для некоторых l, k $(l \neq k)$ $C^j_{kl} = C^j_{lk} = +\infty$ (и,значит,$C^j_{kk} = -\infty$, $C^j_{ll} = -\infty$), то согласно 3) соответствующие этим l и k граничные условия в (1.1) заменяются такими:

$$u^\varepsilon_k = u^\varepsilon_l; \qquad \frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial\nu} + \frac{\partial u^\varepsilon_l}{\partial\nu} = 0; \qquad x \in \partial F^\varepsilon_j. \tag{1.1'}$$

З а м е ч а н и е. *Этот случай означает, что на границе F^ε_j k-частицы переходят в l-частицы с вероятностью* 1 *и наоборот.*

Для каждого препятствия F^ε_j введем матрицу $A^j_{kl} = \delta_{kl} + \chi(C^j_{kl})$, где $\chi(t)$ — функция Хевисайда: $\chi(t) = 1$ при $t > 0$ и $\chi(t) = 0$ при $t \leq 0$, δ_{kl} — символ Кронекера.

С помощью этих матриц для любого открытого множества $G \subset R^n$ определим матрицу

$$A(G) = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{N^\varepsilon} \sum_{F^\varepsilon_j \subset G} A^j \tag{1.2}$$

и расширим ее до σ-аддитивной матричной меры. Очевидно справедливо неравенство

$$0 \leq A_{kl}(G) \leq \mathrm{mes}G.$$

Поэтому в силу теоремы Радона–Никодима существует симметричная матрица-функция $A(x)$ $(0 \leq A_{kl}(x) \leq 1)$ такая, что

$$A(G) = \int_G A(x)dx. \tag{1.3}$$

В данной работе мы будем предполагать, что матрица-функция $A(x)$ удовлетворяет условию I (см. ниже).

Для каждой точки $x \in \Omega_0$ в множестве $M = \{1,\dots,m\}$ цветов выделим классы эквивалентности $M_1(x),\dots,M_s(x)$ следующим образом: цвета k и l принадлежат одному классу эквивалентности, если найдутся числа $i_0 = k,\dots,i_{p-1} = i_{p-1}(x)$, $i_p = l$, такие, что $A_{i_r i_{r+1}}(x) > 0$ для всех $r = 0,\dots,p-1$. Учитывая симметрию матрицы $A(x)$ и равенства $A_{kk} = 1$, легко видеть, что таким образом действительно вводится отношение эквивалентности.

Условие I. *Множество классов эквивалентности $M_1(x) = M_1,\dots,M_s(x) = M_s$ одно и то же для всех $x \in \Omega_0$.*

Предполагая, что условие I выполнено, введем обобщенную матрицу-функцию $C^\varepsilon(x)$ элементами:

$$C^\varepsilon_{pp}(x) = 0,$$

$$C^\varepsilon_{pq}(x) = \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \sum_{l \in M_p} \sum_{k \in M_q} |S|\, \varepsilon^{(n-1)\Theta} C^j_{kl}\, \delta(x - \varepsilon x^j),$$

где $|S|$ — $(n-1)$-мерный объем поверхности S тела F, $x^j = \sum_{x=1}^{n} n^j_\alpha a^\alpha$ — центр масс препятствия F^ε_j, $\delta(x)$ — δ-функция. Ясно, что $C^\varepsilon(x)$ — симметричная матрица с неотрицательными коэффициентами.

Предположим, что выполняются также следующие условия II и III.

Условие II. *Существует слабый предел (в пространстве $D'(\Omega)$)*

$$w - \lim_{\varepsilon \to 0} C^\varepsilon(x) = C(x),$$

где $C(x) = \{C_{pq}\}^3_{p,q=1}$ — непрерывная матрица-функция на Ω_0.

Условие III. *В любом кубе K_δ со стороной $\delta = \varepsilon^{(n-1)\Theta/n}$ при любом ε находится не более чем $N < \infty$ препятствий F^ε_j таких, что $C^j_{kl} > 0$, $k \in M_q$, $l \in M_p$, $p \neq q$ (N не зависит от ε).*

Замечание. *Условие III не противоречит условию II, поскольку согласно последнему число N^ε_G таких препятствий в любой фиксированной подобласти $G \subset \Omega_0$ удовлетворяет неравенству*

$$N^\varepsilon_G \le \frac{\max C_{pq}(x)}{|S|\, C_1} \frac{\operatorname{mes} G}{\varepsilon^{(n-1)\Theta}}.$$

П р и м е р. Рассмотрим простейший пример, для которого легко проверить выполнение условий I-III. Пусть матрицы C^j в граничном условии задачи (1.1) на ∂F_j^ε имеют вид

$$C^1 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ 0 & 0 & b & -b \end{pmatrix}, \qquad C^2 = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & c \\ 0 & -d & d & 0 \\ 0 & d & -d & 0 \\ c & 0 & 0 & -c \end{pmatrix},$$

где $a,b,c,d > 0$. Предположим, что они распределяются по препятствиям F_j^ε следующим образом: подобласть $\Omega_0 \subset \Omega$ разбивается на кубы K_δ со стороной длиной $\delta = \varepsilon^{(n-1)\Theta/n}$ и в каждом таком кубе выбирается одно препятствие $F_j^\varepsilon \subset K_\delta$, которому приписывается матрица C^1; всем другим препятствиям $F_j^\varepsilon \subset \Omega_0$ приписывается матрица C^2. Легко видеть, что условие I выполняется и

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $s = 2$ и соответствующие классы эквивалентности $M_r (r = 1,2)$ имеют вид: $M_1 = \{ 1,4 \}$, $M_2 = \{ 2,3 \}$. Учитывая это, нетрудно убедится, что условия II и III также выполняются, причем

$$C_{pq}(x) = | S | \left(C_{12}^1 + C_{43}^1 \right) = | S | (a + b) \qquad (p \neq q; \;\; p,q = 1,2)$$

и $N = 2^n$.

Для формулировки основного результата введем необходимые определения.

Пусть $L^2(\Omega,I)^m$ — подпространство в $L^2(\Omega)^m$, состоящее из вектор-функций $u(x) = \{ u_1(x),\dots,u_m(x) \}$ таких, что $u_k(x) = u_l(x)$ на Ω_0, если $k,l \in M_r (l \sim k)$. Мы будем пользоваться обозначением

$$\hat{u}_r(x) = u_k(x) \text{, если } x \in \Omega_0 , \; k \in M_r .$$

Будем говорить, что вектор-функция $u^\varepsilon(x) = \{ u_1^\varepsilon(x),\dots,u_m^\varepsilon(x) \} \in L^2(\Omega^\varepsilon)^m$ сходится к вектор-функции $u(x) = \{ u_1(x),\dots,u_m(x) \} \in L^2(\Omega)^m$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \sum_{k=1}^m | u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) |^2 dx = 0. \tag{1.4}$$

Введем количественную характеристику периодического множества $F^\varepsilon = \bigcup F_j^\varepsilon$. Пусть $\Pi = \left\{ x \in R^n : x = \sum_{\alpha=1}^n t_\alpha a^\alpha, \; -\frac{1}{2} \leq t_\alpha \leq \frac{1}{2} \right\}$ — параллелепипед периодов с центром в точке 0. Мы предполагаем, что $F \subset \Pi$. Рассмотрим в ячейке $\Pi \backslash F$ краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0 & \text{при } x \in \Pi\backslash F, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x) = (\nu, e^{\alpha}) & \text{при } x \in S, \\ v \quad \text{и} \quad D^{\alpha} v & \text{периодичны на } \partial\Pi, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\{ e^{\alpha} \}$ — ортонормированный базис в R^n, ν — вектор внешней нормали к S, (ν, e^{α}) — скалярное произведение в R^n. Эта задача имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $v_{\alpha}(x)$. Положим

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\delta_{\Theta}}{|\Pi\backslash F|} \int_{\Pi\backslash F} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_i} dx, \tag{1.6}$$

где $|\Pi\backslash F| = \mathrm{mes}(\Pi\backslash F)$ — объем ячейки, $\delta_{\Theta} = 1$, если $\Theta = 1$ и $\delta_{\Theta} = 0$, если $\Theta > 1$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{|F^{\varepsilon}|}{\varepsilon^{n}} = \delta_{\Theta} |F|\right)$.

Тензор $\{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1}^{n}$ в R^n симметричен и положителен. Он является тензором проводимости периодической структуры.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* I—III *и условие* IV: *начальные данные* $\varphi^{\varepsilon}(x) = \{ \varphi_1^{\varepsilon}(x), \ldots, \varphi_m^{\varepsilon}(x) \}$ *задачи сходятся в смысле* (1.4) *к вектор-функции* $\varphi(x) = \{ \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x) \} \in L^2(R^n)^m$.

Тогда решение $u^{\varepsilon}(x,t) = \{ u_1^{\varepsilon}(x,t), \ldots, u_m^{\varepsilon}(x,t) \}$ *задачи* (1.1) *при любом* $t \geq 0$ *сходится к вектор-функции* $u(x,t) = u(\cdot,t) \in L^2(\Omega,I)^m$, *являющейся решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial t} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \dfrac{1}{b_r} \sum\limits_{q=1}^{s} C_{rq}(\hat{u}_r - \hat{u}_q) & x \in \Omega_0,\ t > 0 \\ \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} (\nu, e^{\alpha}) a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial x_{\beta}} = \dfrac{1}{m_r} \sum\limits_{k \in M_r} \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} & x \in \partial\Omega_0,\ t > 0 \\ \hat{u}_r(x,0) = \dfrac{1}{m_r} \sum\limits_{k \in M_r} \varphi_k(x) & x \in \Omega_0 \quad (r = 1, \ldots, s) \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta u_k & x \in \Omega\backslash\Omega_0,\ t > 0 \\ u_k = \hat{u}_r & x \in \partial\Omega_0,\ t > 0,\ k \in M_r \\ u_k = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u_k(x,0) = \varphi_k(x) & x \in \Omega\backslash\Omega_0 \quad (k = 1, \ldots, m), \end{cases} \tag{1.7}$$

где m_r *— число элементов класса эквивалентности* M_r, $b_r = \left(1 - \delta_\Theta \frac{|F|}{|\Pi|}\right) m_r$,
ν *— вектор внешней нормали к* $\partial\Omega_0$, *коэффициенты* $a_{\alpha\beta}$ *определяются равенствами* (1.6).

Доказательство этой теоремы проводится в § 2 и § 3. Сначала в § 2 рассматриваются стационарные аналоги задач (1.1) и (1.7) и устанавливается сходимость их резольвент. Этот результат используется в § 3 для доказательства сходимости отвечающих им спектральных проекторов и, наконец, с помощью спектральных представлений решений задач (1.1), (1.7) доказывается теорема 1.

§ 2. Сходимость резольвент стационарных задач

Рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash \bigcup_{j=1}^{N^\varepsilon} F_j^\varepsilon$:

$$\begin{cases} -\Delta u_k^\varepsilon + \lambda u_k^\varepsilon = F_k^\varepsilon(x), & x \in \Omega^\varepsilon \\ \dfrac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial \nu} = \sum\limits_{l=1}^{m} C_{kl}^j u_l^\varepsilon, & x \in \partial F_j^\varepsilon,\ j = 1,\dots,N^\varepsilon \\ u_k^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\lambda > 0$, $f_k^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, а коэффициенты C_{kl}^j введены выше (задача (1.1)).

В силу свойств матриц $\{C_{kl}^j\}_{k,l=1}^m$, $j = 1,\dots,N^\varepsilon$, существует единственное решение $u_k^\varepsilon(x)$ этой задачи.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* I—III *и условие* IV: *вектор-функция* $f^\varepsilon(x) = \{f_1^\varepsilon(x),\dots,f_m^\varepsilon(x)\}$ *сходится в смысле* (1.4) *к вектор-функции* $f(x) = \{f_1(x),\dots,f_m(x)\} \in L^2(\Omega)^m$.

Тогда решение $u^\varepsilon(x)$ *задачи* (2.1) *сходится (в том же смысле) к вектор-функции* $u(x) \in L^2(\Omega,\Gamma)^m$, *которая является решением следующей краевой задачи*:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dfrac{1}{b_r}\sum\limits_{q=1}^{s} C_{rq}(\hat{u}_r - \hat{u}_q) + \lambda \hat{u}_r = \dfrac{1}{m_r}\sum\limits_{k\in M_r} f_k & x \in \Omega_0 \\ \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} (\nu,e^\alpha) a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial x_\beta} = \dfrac{1}{m_r}\sum\limits_{k\in M_r} \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} & x \in \partial\Omega_0 \\ -\Delta u_k + \lambda u_k = f & x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0 \\ u_k = \hat{u}_r & x \in \partial\Omega_0,\ k \in M_r \\ u_k = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь все обозначения соответствуют обозначениям задачи (1.7).

Доказательство. В силу свойств матриц $C_j = \{C^j_{kl}\}_{k,l=1}^m$ решение $u^\varepsilon = \{ u^\varepsilon_1(x),\ldots,u^\varepsilon_m(x) \}$ задачи (2.1) минимизирует функционал

$$J^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left| \nabla u^\varepsilon_k \right|^2 + \lambda (u^\varepsilon_k)^2 - 2 f^\varepsilon_k u^\varepsilon_k \right\} dx + \\ + \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial F^\varepsilon_j} \sum_{k,l=1}^{m} \hat{C}^j_{kl} (u^\varepsilon_k - u^\varepsilon_l)^2 dS^\varepsilon \tag{2.3}$$

в классе вектор-функций $u^\varepsilon \in W^1_2(\Omega^\varepsilon)^m$, удовлетворяющих условиям: $u^\varepsilon_k = 0$ при $x \in \partial\Omega$, $u^\varepsilon_k = u^\varepsilon_l$ при $x \in \partial F^\varepsilon_j$, если $C^j_{kl} = \infty$; $\hat{C}^j_{kl} = C^j_{kl}$, если $C^j_{kl} \neq \infty$ и $\hat{C}^j_{kl} = 0$ в противном случае, dS^ε — элемент $(n-1)$-мерного объема на поверхности ∂F^ε_j. Учитывая, что f^ε сходится в смысле (1.4) к $f \in L^2(\Omega)^m$, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left| \nabla u^\varepsilon_k \right|^2 + \lambda (u^\varepsilon_k)^2 \right\} dx + \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial F^\varepsilon_j} \sum_{k,l=1}^{m} \hat{C}^j_{kl} (u^\varepsilon_k - u^\varepsilon_l)^2 dS^\varepsilon \leq \\ \leq \frac{4}{\lambda} \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{\Omega^\varepsilon} < C, \tag{2.4}$$

где $\| \ \|_{\Omega^\varepsilon}$ — норма в $L^2(\Omega^\varepsilon)^m$. Поскольку имеется сильная связность областей Ω^ε (см. [4]), то существует вектор-функция $\tilde{u}^\varepsilon \in \dot{W}^1_2(\Omega)^m$ такая, что $\tilde{u}^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$ и

$$\left\| \tilde{u}^\varepsilon \right\|_{1\Omega} < C \left\| u^\varepsilon \right\|_{1\Omega^\varepsilon}, \tag{2.5}$$

где $\| \ \|_{1\Omega}$ и $\| \ \|_{1\Omega^\varepsilon}$ — нормы в $W^1_2(\Omega)^m$ и $W^1_2(\Omega^\varepsilon)^m$ соответственно, C не зависит от ε. Из (2.5) и (2.4) следует, что множество вектор-функций $\{ \tilde{u}^\varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ ограничено в $\dot{W}^1_2(\Omega)^m$. Поэтому можно выделить последовательность $\{ \varepsilon_i, i \in N \}$ такую, что вектор-функции $\tilde{u}^{\varepsilon_i}(x)$ слабо сходятся в $\dot{W}^1_2(\Omega)^m$ к вектор-функции $u(x) \in \dot{W}^1_2(\Omega)^m$. В силу теоремы вложения $\tilde{u}^{\varepsilon_i}(x)$ сходится к $u(x)$ в $L^2(\Omega')$, где Ω' — любая компактная подобласть в Ω. Учитывая еще, что $u^\varepsilon(x)$ удовлетворяет в $\Omega \backslash \Omega_0$ уравнению $-\Delta u^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon = f^\varepsilon$ и $f^\varepsilon(x)$ сходится к $f(x)$, нетрудно показать, что $\tilde{u}^{\varepsilon_i}(x)$ сходится к $u(x)$ в $L^2(\Omega)$ и, значит, $u^{\varepsilon_i}(x)$ сходится к $u(x)$ в смысле (1.4).

Лемма 1. *Если выполняется условие* I, *то предельная вектор-функция* $u(x) = \{ u_1(x),\ldots,u_m(x) \}$ *принадлежит подпространству* $L^2(\Omega,\Gamma)^m \subset L^2(\Omega)^m$.

Доказательство. Пусть $k,l \in M_r$. Тогда для каждой точки $x \in \Omega_0$ существует набор чисел $i_0 = k$, $i_1 = i_1(x),\dots,i_{p-1} = i_{p-1}(x)$, $i_p = l$, такой, что $A_{i_r i_{r+1}}(x) > 0$ $(r = 0,\dots,p-1)$. Чтобы не загромождать доказательство, будем предполагать (не ограничивая общности), что этот набор один и тот же для всех точек x (i_r не зависят от x) и $A_{i_r i_{r+1}}(x) \ge a > 0$.

Тогда можно записать

$$\left\{\int_{\Omega_0} | u_k - u_l |^2 dx\right\}^{1/2} \le \sum_{r=0}^{p-1} \left\{\int_{\Omega_0} | u_{i_r} - u_{i_{r+1}} |^2 dx\right\}^{1/2} \tag{2.6}$$

и, поскольку $u(x)$ — предел $\tilde{u}^{\varepsilon} i(x)$ в $L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega_0} | u_{i_r} - u_{i_{r+1}} |^2 dx = \lim_{\varepsilon_i \to 0} \int_{\Omega_0} | \tilde{u}^{\varepsilon}_{i_r} i - \tilde{u}^{\varepsilon}_{i_{r+1}} i |^2 dx. \tag{2.7}$$

Разрежем область Ω_0 на кубы K_h со стороной $h > 0$. Пусть B^{ε}_h — произвольное измеримое множество в кубе K_h. Справедливо неравенство [11]

$$\int_{K_h} | w^{\varepsilon} |^2 dx \le \frac{2h^n}{\mathrm{mes}(B^{\varepsilon}_h)} \int_{B^{\varepsilon}_h} | w^{\varepsilon} |^2 dx + \frac{C_n h^{n+2}}{\mathrm{mes}(B^{\varepsilon}_h)} \int_{k_h} | \nabla w^{\varepsilon} |^2 dx, \tag{2.8}$$

где $w^{\varepsilon} \in W^1_2(K_h)$, а постоянная C_n зависит только от размерности пространства.

Ясно, что такое же неравенство (с точностью до мультипликативной постоянной) имеет место, если K_n — параллелепипед.

Пусть Π^{ε}_j — параллелепипед с центром в точке $x^{j\varepsilon} = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{n} n^j_{\alpha} a^{\alpha}$, содержащий множество F^{ε}_j. Пользуясь известным неравенством для функций $u \in W^1_2(F)$

$$\int_F u^2 dx \le C\left(\int_S u^2 dS + \int_F | \nabla u |^2 dx\right),$$

а также масштабными соображениями и неравенством (2.8) при $K_h = \Pi^{\varepsilon}_j$ и $B^{\varepsilon}_j = F^{\varepsilon}_j$, получаем

$$\int_{\Pi^{\varepsilon}_j} | w^{\varepsilon} |^2 dx \le C\left(\varepsilon^{n-\Theta(n-1)} \int_{\partial F^{\varepsilon}_j} | w^{\varepsilon} |^2 dS^{\varepsilon} + \varepsilon^{n-\Theta(n-2)} \int_{\Pi^{\varepsilon}_j} | \nabla w^{\varepsilon} |^2 dx\right), \tag{2.9}$$

где C не зависит от $\varepsilon > 0$.

Пусть $B^{\varepsilon}_h = \bigcup_{j \in I_h} \Pi^{\varepsilon}_j$ — объединение параллелепипедов Π^{ε}_j таких, что $\Pi^{\varepsilon}_j \subset K_h$ и $C^j_{i_r i_{r+1}} \ge C_1 > 0$ $(j \in I_h)$. Согласно (1.2), (1.3) и условию $A_{i_r i_{r+1}}(x) \ge a > 0$ $(x \in \Omega_0)$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\operatorname{mes}(B_h^\varepsilon)\ge\varliminf_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^n\,|\,\Pi\,|\sum_{F_j^\varepsilon\subset K_h}A^j_{i_ri_{r+1}}\right]\ge$$

$$\ge A_{i_ri_{r+1}}(K_h)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[N_\varepsilon\varepsilon^n\,|\,\Pi\,|\,\right]\ge ah^n\operatorname{mes}\Omega_0\,.$$

Учитывая это неравенство и применяя неравенства (2.8), (2.9) к функции $w^\varepsilon(x)=\tilde u^\varepsilon_{i_r}(x)-\tilde u^\varepsilon_{i_{r+1}}(x)$, получаем

$$\int_{\Omega_0}|\,\tilde u^\varepsilon_{i_r}(x)-\tilde u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dx<C\left[\varepsilon^{n-\Theta(n-1)}{\sum_j}'\int_{\partial F_j^\varepsilon}|\,u^\varepsilon_{i_r}(x)-u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dS^\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\,(\varepsilon^{n-\Theta(n-2)}+h^2)\int_{\Omega_0}|\,\nabla\tilde u^\varepsilon_{i_r}-\nabla\tilde u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dx\right],\tag{2.10}$$

где C не зависит от ε и h, а сумма ${\sum_j}'$ распространяется на те F_j^ε, для которых $C^j_{i_ri_{r+1}}\ge C_1>0$.

Согласно (2.4) и (2.5)

$${\sum_j}'\int_{\partial F_j^\varepsilon}|\,u^\varepsilon_{i_r}-u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dS^\varepsilon+\int_{\Omega_0}|\,\nabla\tilde u^\varepsilon_{i_r}-\nabla\tilde u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dx\le$$

$$\le\frac{1}{C_1}\sum_j\int_{\partial F_j^\varepsilon}\hat C^j_{i_ri_{r+1}}\,|\,u^\varepsilon_{i_r}-u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dS^\varepsilon+2\,\|\tilde u^\varepsilon\|^2_{1,\Omega_0}<C$$

и ,значит, согласно (2.10)

$$\lim_{\varepsilon_l\to 0}\int_{\Omega_0}|\,\tilde u^\varepsilon_{i_r}(x)-\tilde u^\varepsilon_{i_{r+1}}\,|^2dx<Ch^2.$$

Поскольку здесь h произвольное положительное число и C не зависит от h, то из (2.6), (2.7) следует, что

$$\int_{\Omega_0}|\,u_k-u_l\,|^2dx=0.$$

Поэтому $u_k(x)=u_l(x)$ почти всюду в Ω_0, если $k,l\in M_r$, $(r=1,\dots,s)$. Таким образом, $u(x)\in L^2(\Omega,I)^m$ и значит лемма 1 доказана.

Пусть K_h^z — куб с центром в точке $z\in\Omega_0$ и сторонами длиной $h>0$, параллельными координатным векторам e^α $(\alpha=1,\dots,n)$. Рассмотрим функционал $A_h^{\varepsilon z}[b]$, определенный на векторах $b=\{b_1,\dots,b_n\}\in R^n$:

$$A_h^{\varepsilon z}[b] = \inf_{v^\varepsilon} \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ \left| \nabla v^\varepsilon \right|^2 + h^{-2-\gamma} \left| v^\varepsilon - (x - z, b) \right|^2 \right\} dx, \tag{2.11}$$

где нижняя грань берется в классе $W_2^1\left(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon\right)$, круглыми скобками обозначено скалярное произведение в R^n. Существует единственная функция v_b^ε, которая минимизирует функционал (2.11); она является решением краевой задачи

$$-\Delta v_b^\varepsilon + h^{-2-\gamma} v_b^\varepsilon = h^{-2-\gamma}(x - z, b), \qquad x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial v_b^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\left(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon\right).$$

В силу линейности этой задачи $v_b^\varepsilon(x) = \sum\limits_{\alpha=1}^n b_\alpha v_\alpha^\varepsilon$, где $v_\alpha^\varepsilon(x)$ — функции, минимизирующие (2.11) при $b = e^\alpha$. Следовательно,

$$A_h^{\varepsilon z}[b] = \sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h) b_\alpha b_\beta, \tag{2.12}$$

где

$$a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ (\nabla v_\alpha^\varepsilon, \nabla v_\beta^\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + h^{-2-\gamma}(v_\alpha^\varepsilon - x_\alpha + z_\alpha)(v_\beta^\varepsilon - x_\beta + z_\beta) \right\} dx. \tag{2.13}$$

Лемма 2. *При любом* $\gamma > 0$ *существуют пределы, равномерные относительно* $z \in \Omega_0$, *находящегося на положительном расстоянии от* $\partial\Omega$:

$$\lim_{h \to 0} \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h)}{h^n} = \lim_{h \to 0} \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h)}{h^n} = a_{\alpha\beta}\left(1 - \frac{|F|}{|\Pi|}\delta_\Theta\right),$$

где $a_{\alpha\beta}$ определяются равенством (1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $\Theta = 1$. Пусть $v_\alpha^\varepsilon(x)$ — функция, минимизирующая (2.11) при $b = e^\alpha$, а $v_\alpha(x)$ — периодически продолженные решения задачи (1.5). Представим $v_\alpha^\varepsilon(x)$ в виде

$$v_\alpha^\varepsilon(x) = \hat{v}_\alpha^\varepsilon(x) + w_h^\varepsilon(x), \tag{2.14}$$

где

$$\hat{v}_\alpha^\varepsilon(x) = x_\alpha - z_\alpha - \varepsilon v_\alpha(x/\varepsilon), \tag{2.15}$$

а $w_h^\varepsilon(x)$ минимизирует функционал

$$\hat{J}^{\varepsilon}_{h}[w^{\varepsilon}_{h}] = \int\limits_{K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} \left\{ \left| \nabla w^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} + h^{-2-\gamma} \left| w^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} \right\} dx + 2 \int\limits_{K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} (\nabla \hat{v}^{\varepsilon}_{\alpha}, \nabla w^{\varepsilon}_{h})\, dx +$$

$$2h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} (\hat{v}^{\varepsilon}_{\alpha} - x_{\alpha} + z_{\alpha}, w^{\varepsilon}_{h})\, dx = \sum_{i=0}^{2} I^{\varepsilon}_{ih}[w^{\varepsilon}_{h}]$$

в классе $W^{1}_{2}\left(K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}\right)$. Отсюда следует, что

$$I^{\varepsilon}_{0h}[w^{\varepsilon}_{h}] \le \left| I^{\varepsilon}_{1h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right| + \left| I^{\varepsilon}_{2h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right| . \tag{2.16}$$

Учитывая (2.14), получаем

$$\left| I^{\varepsilon}_{2h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right| \le C\varepsilon h^{h-2-\gamma/2}\left(I^{\varepsilon}_{0h}[w^{\varepsilon}_{h}]\right)^{1/2}. \tag{2.17}$$

В силу свойств функции $\hat{v}^{\varepsilon}_{\alpha}(x)$ справедливо равенство

$$I^{\varepsilon}_{1h}[w^{\varepsilon}_{h}] = 2 \int\limits_{\partial K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{v}^{\varepsilon}_{\alpha}}{\partial \nu} w^{\varepsilon}_{h}\, dS$$

и, следовательно, согласно (2.14)

$$\left| I^{\varepsilon}_{1h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right| \le C h^{(n-1)/2} \left(\int\limits_{\partial K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} \left| w^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dS \right)^{1/2}. \tag{2.18}$$

Чтобы избежать излишней громоздкости доказательства, будем предполагать, что множества F^{ε}_{j} не пересекают границу ∂K^{z}_{h} и содержатся в кубе K^{z}_{h} вместе с соответствующими параллелепипедами Π^{z}_{j}. Тогда существует функция $\tilde{w}^{\varepsilon}_{h}(x) \in W^{1}_{2}(K^{z}_{h})$ такая, что $\tilde{w}^{\varepsilon}_{h}(x) = w^{\varepsilon}_{h}(x)$ при $x \in K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}$ и

$$\left\| \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right\|_{1,K^{z}_{h}} \le C \left\| w^{\varepsilon}_{n} \right\|_{1,K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}}, \tag{2.19}$$

где C не зависит от ε и h [4]. Для этой функции легко получить неравенства

$$\int\limits_{\partial K^{z}_{h}} \left| \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dS \le n\delta \int\limits_{K^{z}_{h}} \left| \nabla \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dx + n\left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{h}\right) \int\limits_{K^{z}_{h}} \left| \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dx \tag{2.20}$$

и

$$\int\limits_{K^{z}_{h}} \left| \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dx \le C\left(\int\limits_{K^{z}_{h}\cap\Omega^{\varepsilon}} \left| \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dx + \varepsilon^{2} \int\limits_{K^{z}_{h}} \left| \nabla \tilde{w}^{\varepsilon}_{h} \right|^{2} dx \right), \tag{2.21}$$

где δ — произвольное положительное число, а C не зависит от h и ε.

Полагая в (2.20) $\delta = h^{1+\gamma/2} < 1$, с помощью (2.18) - (2.21) получаем при $\varepsilon << h^{1+\gamma/2} < 1$

$$\left| I^{\varepsilon}_{1h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right| \le C h^{n/2+\gamma/4} \left(I^{\varepsilon}_{0h}[w^{\varepsilon}_{h}] \right)^{1/2}. \tag{2.22}$$

Из (2.16), (2.17) и (2.22) следует, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} I^{\varepsilon}_{0h}[w^{\varepsilon}_{h}] = O\left(h^{n+\gamma/2}\right). \tag{2.23}$$

Согласно (2.13), (2.14) и (2.23) при малых h и $\varepsilon << h$ коэффициенты $a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h)$ можно вычислять с помощью функции $\hat{v}^{\varepsilon}_{\alpha}(x)$. Подставляя (2.15) в (2.13), получаем

$$a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,h) = \sum_j \int_{\Pi^{\varepsilon}_j \setminus F^{\varepsilon}_j} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_\alpha - z_\alpha}{\varepsilon} - v_\alpha(x/\varepsilon)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_\beta - z_\beta}{\varepsilon} - v_\beta(x/\varepsilon)\right) dx =$$

$$= \frac{h^n}{|\Pi|} \int_{\Pi \setminus F} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_\alpha - v_\alpha(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_\beta - v_\beta(x)\right) dx + O(\varepsilon) = \delta_{\alpha\beta} \frac{|\Pi \setminus F|}{|\Pi|} h^n +$$

$$+ \frac{h^n}{|\Pi|} \int_{\Pi \setminus F} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} dx - \frac{h^n}{|\Pi|} \int_{\Pi \setminus F} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right) dx + O(\varepsilon).$$

В силу свойств функции $v_\alpha(x)$

$$\int_{\Pi \setminus F} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = - \int_{\partial F} v_\alpha (\nu, e^\beta)\, dS = - \int_{\partial F} v_\alpha \frac{\partial v_\beta}{\partial \nu} dS = \int_{\Pi \setminus F} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} dx.$$

Поэтому

$$\frac{a_{\alpha\beta}(z,\varepsilon,n)}{h^n} = \frac{|\Pi \setminus F|}{|\Pi|} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{|\Pi \setminus F|} \int_{\Pi \setminus F} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} dx \right) + O(\varepsilon)$$

равномерно относительно z, принадлежащих любому компактному подмножеству $\Omega' \subset \Omega_0$. Это доказывает лемму 2 при $\Theta = 1$.

В случае $\Theta > 1$ доказательство аналогично.

Лемма 3. *Пусть* $v^{\varepsilon}_{\alpha}(x)$ *— функция, минимизирующая* (2.11) *в кубе* K^z_h, *и пусть* $K^z_{1h} \subset K^z_h$ *— концентрический с* K^z_h *куб со стороной длиной* $h_1 = h - 2\delta$, $\delta = o(h)$. *Положим* $\Pi^z_{1h} = K^z_h \setminus K^z_{1h}$. *Справедливы следующие оценки при* $h \to 0$, $\varepsilon > \varepsilon(h)$:

$$\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|^2\,dx = O(h^{n+2+\gamma}),$$

$$\int\limits_{\Pi_{1h}^z\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla v_\alpha^\varepsilon|^2\,dx = o(h^n),$$

$$\int\limits_{\Pi_{1h}^z\cap\Omega^\varepsilon} |v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|^2\,dx = O(h^{n+2+\gamma}),$$

$$|v_\alpha^\varepsilon(x)| \le \frac{h}{2}, \qquad x\in K_h^z\cap\Omega^\varepsilon .$$

Эти оценки равномерны относительно z, принадлежащих любому компактному подмножеству в Ω_0.

Доказательство. Первая оценка немедленно следует из леммы 2. Учитыв‥ это, запишем

$$\int\limits_{\Pi_{1h}^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla v_\alpha^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma}|v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|^2\right\}dx =$$

$$= \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla v_\alpha^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma}|v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|^2\right\}dx -$$

$$- \int\limits_{K_{1h}^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla v_\alpha^\varepsilon| + h_1^{-2-\gamma}|v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|\right\}dx + O(\delta h^{n-1}).$$

Согласно (2.11) и (2.13) первый интеграл в правой части равен $a_{\alpha\alpha}(z,\varepsilon,h_1)$,а второй не меньше чем $a_{\alpha\alpha}(z,\varepsilon,h_1)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Pi_{1h}^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla v_\alpha^\varepsilon|^2 + h_1^{-2-\gamma}|v_\alpha^\varepsilon - (x_\alpha - z_\alpha)|^2\right\}dx \le$$

$$\le a_{\alpha\alpha}(z,\varepsilon,h) - a_{\alpha\alpha}(z,\varepsilon,h_1) + O(\delta h^{n-1}),$$

откуда, пользуясь леммой 2, получаем вторую и третью оценки. Последнее неравенство следует из принципа максимума для вариационной задачи (2.11) при $b = e^\alpha$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что предел $u(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon_i}(x)$ минимизирует следующий функционал в классе $W^1(\Omega,I)^m = L^2(\Omega,I)^m \cap W_2^1(\Omega)^m$:

$$J[u] = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{r=1}^{S} \left\{ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x_\beta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^{S} C_{qr} (\hat{u}_r - \hat{u}_q)^2 + \lambda b_r \hat{u}_r^2 - 2 b_r F_r \hat{u}_r \right\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega \backslash \Omega_0} \sum_{k=1}^{m} \{ | u_k |^2 + \lambda u_k^2 - 2 f_k u_k \} \, dx, \tag{2.24}$$

где $b_r = m_r \left(1 - \delta_\Theta \, | F | / | \Pi | \right)$, $\quad a^r_{\alpha\beta} = b_r a_{\alpha\beta}$, $\quad F_r = 1/m_r \sum\limits_{k \in M_r} f_k$.

Обозначим через $C_0^2(\Omega, I)^m$ класс вектор-функций $u(x) = \{ u_1(x), \ldots, u_m(x) \}$ из $C_0^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условию: если $lk \in M_r$, то $u_l(x) = u_k(x)$ в некоторой окрестности Ω_u множества $\overline{\Omega}_0$. Ясно, что класс $C_0^2(\overline{\Omega}, I)^m$ плотен в $W_2^1(\Omega, I)^m$.

Покроем область Ω_0 кубами $K_h^j = K(x^j, h)$ со стороной длиной $h > 0$ и центрами x^j, образующими периодическую решетку периода $h_1 = h - h^{1+\gamma/2}$. Введем разбиение единицы $\{ \varphi_j(x) \}$, связанные с этим покрытием, т.е. систему функций $\varphi_j(x)$, удовлетворяющую условиям: $\sum\limits_{j=1} \varphi_j(x) = 1$ при $x \in \Omega_0$, $\varphi_j(x) = 0$ при $x \notin K_h^j$, $0 \le \varphi_j(x) \le 1$, $\quad | D\varphi_j(x) | < C h^{-1-\gamma/2}$. Для любой вектор-функции $w(x) \in C_0^2(\Omega, I)^m$ положим

$$w_h^\varepsilon(x) = w(x) + \sum_j \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial w(x)}{\partial x_j} [v_\alpha^j(x) - (x_\alpha - x_\alpha^j)] \, \varphi_j(x), \tag{2.25}$$

где $v_\alpha^j(x)$ — функция, минимизирующая (2.11) при $b = e^\alpha$, $K_h^z = K_h^j$, если $K_h^j \in \Omega$ и $v_\alpha^j(x) = x_\alpha - x_\alpha^j$, если $K_h^j \not\subset \Omega$.

Ясно, что $w_h^\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)^m$ и удовлетворяет условиям $w_{hk}^\varepsilon(x) = w_{hl}^\varepsilon(x)$, если $x \in F_j^\varepsilon$ и $C_{kl}^j = \infty$ (заметим, что согласно условию II $C_{kl}^j \neq \infty$, если $k \in M_q$, $l \in M_p$, $p \neq q$).

Поэтому $w_h^\varepsilon(x)$ принадлежит классу $\hat{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$, в котором $u^\varepsilon(x)$ минимизирует функционал (2.3) и, следовательно,

$$J^2[u^\varepsilon] \le J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]. \tag{2.26}$$

Учитывая (2.25) и пользуясь леммой 3, свойствами функций φ_j^ε и условиями II и IV, получаем

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} J^\varepsilon[w_h^\varepsilon] = J[w], \tag{2.27}$$

где функционал J определяется равенством (2.24). Из (2.26) и (2.27) следует, что для любой вектор-функции $w(x) \in C_0^2(\Omega,I)^m$

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} J^\varepsilon[u^\varepsilon] \le J[w]. \tag{2.28}$$

Так как класс $C_0^2(\Omega,I)^m$ плотен в $\dot{W}_2^1(\Omega,I)^m$, то это неравенство справедливо и при $w(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega,I)^m$.

Покажем, что если вектор-функция $u(x)$ есть слабый предел $u^\varepsilon(x)$ в $W_2^1(\Omega)^m$ при $\varepsilon_i \to 0$, то справедливо обратное неравенство

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_i \to 0} J^\varepsilon[u^\varepsilon] \ge J[u]. \tag{2.29}$$

Пусть $u_\delta(x) \in C_0^2(R^n,I)^m$— вектор-функция такая, что

$$\left\| u_\delta - u \right\|_{1,\Omega} < \delta. \tag{2.30}$$

Рассмотрим вектор-функции $\widetilde{u}_\delta^\varepsilon = \widetilde{u}^\varepsilon + u_\delta - u \in W_2^1(\Omega,I)^m$ и $u_\delta^\varepsilon = \widetilde{u}_\delta^\varepsilon |_{\Omega^\varepsilon} = u^\varepsilon + u_\delta - u \in W_2^1(\Omega)^m$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\widetilde{u}_\delta^\varepsilon$ сходится к u_δ в $L^2(\Omega)^m$ и слабо в $W_2^1(\Omega)^m$, когда $\varepsilon = \varepsilon_i \to 0$ и согласно (2.30)

$$\left\| u_\delta^\varepsilon - u^\varepsilon \right\|_{1,\Omega^\varepsilon} < \delta. \tag{2.31}$$

Выберем кубы K_h^j, содержащиеся в области Ω_u $(j = 1,\ldots,N(h,\delta))$, и рассмотрим вектор-функции

$$v_\delta^{j\varepsilon}(x) = u_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x^j) \tag{2.32}$$

в областях $K_h^j \cap \Omega^\varepsilon$ $(j = 1,\ldots,N(h,\delta))$. Так как $u_\delta \in C_0^2(\Omega,I)^m$,то для любого фиксированного $\delta > 0$ и любого вектора $b \in R^n$

$$\int_{K_h^j \cap \Omega^\varepsilon} \left| v_\delta^{j\varepsilon} - (x - x^j, b) \right|^2 dx \le 3 \int_{K_h^j \cap \Omega^\varepsilon} \left| u_{\delta k}^\varepsilon - u_{\delta k} \right|^2 dx +$$

$$+ 3 \int_{K_h^j \cap \Omega^\varepsilon} \left[\left(\nabla u_{\delta k}(x^j), x - x^j \right) - \left(x - x^j, b \right) \right]^2 dx + O(h^{n+4}) \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Выбирая $b = b^{jk} = \nabla u_{\delta k}(x^j)$ и учитывая, что $u_{\delta k}^\varepsilon(x)$ сходится к $u_{\delta k}(x)$ в смысле (1.4), получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_i \to 0}} \int_{K_h^j} \left| v_{\delta k}^{j\varepsilon} - (x - x^j, b^{jk}) \right|^2 dx = O(h^{n+1}). \tag{2.33}$$

Из определения тензора $\{ a_{\alpha\beta}(x,\varepsilon,h) \}_{\alpha,\beta=1}^{n}$ следует, что

$$\int\limits_{K_h^j} \left\{ \left| \nabla v_{\delta k}^{j\varepsilon} \right|^2 + h^{-2-\gamma} \left| v_{\delta k}^{j\varepsilon} - (x - x^j, b^{jk}) \right|^2 \right\} dx \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x^j,\varepsilon,h) \frac{\partial u_{\delta k}}{\partial x_\alpha}(x^j) \frac{\partial u_{\delta k}}{\partial x_\beta}(x^j) \quad .$$

и, следовательно, в силу (2.32), (2.33)

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_i \to 0} \int\limits_{K_h^j \cap \Omega^\varepsilon} \left| \nabla u_{\delta k} \right|^2 dx \geq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x^j,\varepsilon,h) \frac{\partial \hat{u}_{\delta r}}{\partial x_\alpha}(x^j) \frac{\partial \hat{u}_{\delta r}}{\partial x_\beta}(x^j) h^n + O(h^{n+2-\gamma})$$

$$k \in M_r, \qquad j = 1,\dots,N(\delta,h). \tag{2.34}$$

Поскольку u_δ^ε сходится к u_δ слабо в $W_2^1(\Omega\backslash\Omega_0)$, $u_\delta^\varepsilon(x)$ сходится к $u_\delta(x)$ и $f_\varepsilon(x)$ к $f(x)$ в смысле (1.4), то,учитывая лемму 2, получаем

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_i \to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \nabla u_{\delta k}^\varepsilon \right|^2 + \lambda (u_{\delta k}^\varepsilon)^2 - 2 f_k^\varepsilon u_{\delta k}^\varepsilon \right\} dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_0} \left\{ \left| \nabla u_{\delta k} \right|^2 + \lambda (u_{\delta k})^2 - 2 f_k u_{\delta k} \right\} dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N(\delta,h)} \sum_{r=1}^{S} m_r \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{u}_{\delta r}}{\partial x_\alpha}(x^j) \frac{\partial \hat{u}_{\delta r}}{\partial x_\beta}(x^j) h^n +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} \left(\lambda b_r \hat{u}_{\delta r}^2 + 2 b_r F_r \hat{u}_{\delta r} \right) dx - O(h^{2-\gamma}), \tag{2.35}$$

где $\hat{u}_{\delta r} = u_{\delta k}$, если $k \in M_r$ и $x \in \Omega_0$; $b_r = m_r\left(1 - \delta_\Theta \left| F \right| / \left| \Pi \right| \right)$, $F_r = \dfrac{1}{m_r} \sum\limits_{k \in M_r} f_k$, $0 < \gamma < 2$.

Рассмотрим теперь поверхностные интегралы в (2.3). Для $l \in M_p$, $k \in M_q$ $(p \neq q)$ запишем

$$\int\limits_{\partial F_j^\varepsilon} \sum_{k,l=1}^{m} \hat{C}_{kl}^j (u_{\delta k}^\varepsilon - u_{\delta l}^\varepsilon)^2 dS^\varepsilon \geq \int\limits_{\partial F_j^\varepsilon} \sum_{k,l=1}^{m} C_{kl}^j (u_{\delta k} - u_{\delta l})^2 dS_j +$$

$$+ 2 \sum_{k,l=1}^{m} \int\limits_{\partial F_j^\varepsilon} C_{kl}^j v_{kl} w_{kl}^\varepsilon dS^\varepsilon, \tag{2.36}$$

где $v_{kl} = u_{\delta k} - u_{\delta l}$, $w^{\varepsilon}_{kl} = \left(\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta k} - u^{\varepsilon}_{\delta l}\right) - \left(u_{\delta k} - u_{\delta l}\right)$. Используя известное неравенство для функций $u \in W^1_2(F)$ и масштабные соображения, получаем

$$\int\limits_{\partial F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dS^{\varepsilon} \leq C\Big[\varepsilon^{-\Theta} \int\limits_{F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dx + \varepsilon^{\Theta} \int\limits_{F^{\varepsilon}_j} |\nabla w^{\varepsilon}_{kl}|^2 dx\Big]. \tag{2.37}$$

Пусть K^j_{δ} — куб с центром x^j и стороной длиной $\delta > 0$. Справедливо неравенство [11]:

$$\int\limits_{F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dx \leq C\Big[\varepsilon^{n\Theta}\delta^{-n} \int\limits_{K^j_{\delta}} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dx + \varepsilon^{\Theta}\delta \int\limits_{K^j_{\delta}} |\nabla w^{\varepsilon}_{kl}|^2 dx\Big]. \tag{2.38}$$

Полагая $\delta = \varepsilon^{\Theta(n-1)/n}$ из (2.37) и (2.38) получаем

$$\int\limits_{\partial F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dS^{\varepsilon} \leq C\Big[\int\limits_{K^j_{\delta}} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dx + \varepsilon^{\Theta(n-1)/n} \int\limits_{K^j_{\delta}} |\nabla w^{\varepsilon}_{kl}|^2 dx\Big]. \tag{2.39}$$

Согласно условию III кубы $\{ K^j_{\delta} : \delta = \varepsilon^{\Theta(n-1)/n},\ C^j_{kl} > 0,\ k \in M_q,\ l \in M_p \}$ могут пересекаться с конечной кратностью N, не зависящей от ε. Поэтому из (2.39) следует, что при $k \in M_q$, $l \in M_p$

$$\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}} C^j_{kl} \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dS^{\varepsilon} \leq C\left(\left\|w^{\varepsilon}_{kl}\right\|^2_{\Omega} + \varepsilon^{\Theta(n-1)/n}\left\|w^{\varepsilon}_{kl}\right\|^2_{1,\Omega}\right), \tag{2.40}$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon > 0$, $k \in M_p$, $l \in M_q$. Так как $\widetilde{u}^{\varepsilon i}_{\delta}(x)$ сходится к $u_{\delta}(x)$ в $L^2(\Omega)^m$ и множество функций $\{ \widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x), \varepsilon > 0 \}$ ограничено в $W^1_2(\Omega)^m$, то отсюда получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}} C^j_{kl} \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}_j} (w^{\varepsilon}_{kl})^2 dS^{\varepsilon} = 0.$$

Следовательно, согласно (2.36) и условию II

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}} \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}_j} \widehat{C}^j_{kl}(u^{\varepsilon}_{\delta k} - u^{\varepsilon}_{\delta l})^2 dS^{\varepsilon} \geq \int\limits_{\Omega} \sum_{r,q=1}^{S} C_{rq}(u_{\delta r} - u_{\delta q})^2 dx.$$

Учитывая это неравенство, а также (2.3), (2.24) и переходя к пределу в (2.35) при $h \to 0$, заключаем, что при любом $\delta > 0$

$$\varliminf_{\varepsilon = \varepsilon_i \to 0} J^{\varepsilon}[u^{\varepsilon}_{\delta}] = J[u_{\delta}].$$

Отсюда, после перехода к пределу при $\delta \to 0$ с учетом (2.30), (2.31) и (2.40), получаем неравенство (2.29).

Согласно (2.28) и (2.29) $J[u] \le J[w]$ для любой вектор-функции $w \in W_2^1(\Omega, I)^m$ и, значит, вектор-функция $u(x) = \lim\limits_{\varepsilon=\varepsilon_l \to 0} u^\varepsilon(x)$ минимизирует функционал (2.24) в классе $W_2^1(\Omega, I)^m$. Следовательно, $u(x)$ есть решение задачи (2.2). В силу положительной определенности тензора $\{a_{\alpha\beta}(x)\}_{\alpha,\beta=1}^m$ и неотрицательности функций $C_{rq}(x)$ $(r,q = 1,\ldots,s)$ решение этой задачи единственно. Следовательно, $u^\varepsilon(x)$ сходится (в смысле(1.4)) к единственному решению $u(x)$ задачи (2.2) при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

§ 3. Сходимость спектральных проекторов, окончание доказательства теоремы 1

Здесь мы будем придерживаться обозначений, принятых в § 1. Отождествим $L^2(\Omega^\varepsilon)^m$ $\left(\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash F^\varepsilon\right)$ с подпространством вектор-функций из $L^2(\Omega)^m$, равных нулю на $F^\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{N^\varepsilon} F_j^\varepsilon$. Обозначим через Q^ε оператор ограничения $L^2(\Omega)^m \to L^2(\Omega^\varepsilon)^m$, а через $\hat{Q}^\varepsilon$ — оператор, отражающий $L^2(\Omega^\varepsilon)^m$ в $L^2(\Omega)^m$ согласно формуле

$$\left[\hat{Q}^\varepsilon\right] u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u^\varepsilon(x) & \text{при } x \in \Omega^\varepsilon \\ 0 & \text{при } x \in F^\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{N^\varepsilon} F_j^\varepsilon . \end{cases}$$

Таким образом, ортопроектор P^ε на подпространство $L^2(\Omega^\varepsilon)^m \subset L^2(\Omega)^m$ равен $P^\varepsilon = \hat{Q}^\varepsilon Q^\varepsilon$.

Пусть A^ε — замыкание оператора Δ, определенного на вектор-функциях из $C^2(\overline{\Omega}^\varepsilon)$, удовлетворяющих граничным условиям задачи (1.1), (1.1′). В силу свойств матриц $\left\{C_{kl}^j\right\}_{k,l=1}^m$ оператор A^ε самосопряжен и положителен в пространстве $L^2(\Omega^\varepsilon)^m$.

Пусть $R^\varepsilon(\mu) = \left(A^\varepsilon - \mu I^\varepsilon\right)^{-1}$ — резольвента оператора A^ε: при $\mu < 0$ это ограниченный, положительно определенный оператор в $L^2(\Omega^\varepsilon)^m$. Обозначим через $\{E_\lambda^\varepsilon\}$ и $\{E_\lambda^\varepsilon(\mu)\}$ спектральные семейства операторов A^ε и R^ε соответственно. Известно, что в каждой точке непрерывности оператора E_λ^ε справедливо равенство

$$E_\lambda^\varepsilon = I^\varepsilon - E_\tau^\varepsilon(\mu), \qquad \tau = (\lambda - \mu)^{-1}. \tag{3.1}$$

Положим

$$\hat{R}^\varepsilon(\mu) = \hat{Q}^\varepsilon R^\varepsilon(\mu) Q^\varepsilon \qquad \text{и} \qquad \hat{E}_\lambda^\varepsilon(\mu) = \hat{Q}^\varepsilon E_\lambda^\varepsilon(\mu) Q^\varepsilon.$$

Ясно, что $R^\varepsilon(\mu)$ — самосопряженный оператор в $L^2(\Omega)^m$ и $\{\hat{E}_\lambda^\varepsilon(\mu)\}$ — его спектральное семейство. Кроме того,

$$P^\varepsilon \hat{R}^\varepsilon(\mu) = \hat{R}^\varepsilon(\mu) P^\varepsilon \tag{3.2}$$

и согласно (2.4)

$$\left\|\widehat{R}^{\varepsilon}(\mu)\right\| < 2\,|\mu|^{-1}. \tag{3.3}$$

Обозначим снова через $L^2(\Omega,I)^m$ подпространство в $L^2(\Omega)^m$, состоящее из вектор-функций $u(x)$ таких, что $u_k(x) = u_l(x)$ при $x \in \Omega_0$, если $k \sim l$, т.е. k, l принадлежат классу эквивалентности M_r для некоторого $r = 1,\ldots,s$, а через P_I — ортогональный проектор на $L^2(\Omega,I)^m$:

$$[P_I u]_k(x) = \begin{cases} u_k(x) & x \in \Omega\backslash\Omega_0 \\ \dfrac{1}{m_r} \sum\limits_{i \in M_r} u_i(x) = \widehat{u}_r(x) & x \in \Omega,\ k \in M_r, \end{cases} \tag{3.4}$$

где m_r — число элементов класса M_r.

На подпространстве $L^2(\Omega,I)^m$ введем скалярное произведение

$$(u,v)_I = \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_0} \sum_{k=1}^{m} u_k \bar{v}_k dx + \int\limits_{\Omega_0} \sum_{r=1}^{s} b_r \widehat{u}_r \bar{\widehat{v}}_r dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} u_k \bar{v}_k \rho_k(x) dx, \tag{3.5}$$

где $b_r = \left(1 - \delta_0\,|F|/|\Pi|\right) m_r$; $u_k(x) = \widehat{u}_r(x)$ при $x \in \Omega_0$, $k \in M_r$,

$$\rho_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega\backslash\Omega_0 \\ b_r & \text{при } x \in \Omega_0,\ k \in M_r. \end{cases}$$

Пусть D' — множество вектор-функций $u(x)$ из $L^2(\Omega,I)^m$ таких, что $u(x) \in C^2\overline{(\Omega\backslash\Omega_0)} \cap C_0^1(\Omega)$ и удовлетворяющих граничным условиям задачи (1.7), (2.2) на $\partial\Omega_0$: $u_k = \widehat{u}_r$, $1/m_r \sum\limits_{k \in M_r} \partial u_k/\partial\nu = \sum (\nu, e^{\alpha}) a_{\alpha\beta} \partial\widehat{u}_r/\partial x_\beta$. Обозначим через A' оператор, определенный на D' равенствами

$$\left[A'u\right]_k(x) = \begin{cases} -\Delta u_k(x) & x \in \Omega\backslash\Omega_0,\ k = 1,\ldots,m, \\ -\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_r}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ + \dfrac{1}{b_r} \sum\limits_{q=1}^{s} C_{rq} \left[\widehat{u}_r - \widehat{u}_q\right], & x \in \Omega_0,\ k \in M_r,\ r = 1,\ldots,s. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что A' — симметричный положительно определенный оператор в $L^2(\Omega,\Gamma)^m$ относительно скалярного произведения (3.5).

Пусть A — замыкание в $L^2(\Omega,\Gamma)^m$, $R(\mu) = (A - \mu E)^{-1}$ — резольвента оператора A, а $\{ E_\lambda \}$ и $\{ E_\lambda(\mu) \}$ — спектральные семейства операторов A и $R(\mu)$ соответственно. Положим $\widehat{R}(\mu) = P_\Gamma R(\mu) P_\Gamma$, $\widehat{E}_\lambda(\mu) = P_\Gamma E_\lambda(\mu) P_\Gamma$, $\widehat{E}_\lambda = P_\Gamma E_\lambda P_\Gamma$, где P_Γ — ортопроектор в $L^2(\Omega,\Gamma)^m$.

Ясно, что $R(\mu)$ — самосопряженный оператор в пространстве $L^2(\Omega,\Gamma)^m$, $\{ \widehat{E}_\lambda(\mu) \}$ — его спектральное семейство и для любой точки непрерывности $\widehat{E}_\lambda$ справедливо равенство

$$E_\lambda = E - E_\tau(\mu), \qquad \tau = (\lambda - \mu)^{-1}. \tag{3.6}$$

Теперь воспользуемся следующей леммой, которая является обобщением теоремы Реллиха. Пусть H — гильбертово пространство, P^ε — ортогональные проекторы на подпространство $H^\varepsilon \subset H$, B^ε — ограниченный самосопряженный оператор в H. Пусть $\{ E^\varepsilon_\lambda \}$ и $\{ E_\lambda \}$ — спектральные семейства операторов B^ε и B соответственно.

Лемма R. *Предположим, выполняются следующие условия:*

i) $P^\varepsilon B^\varepsilon = B^\varepsilon P^\varepsilon$,

ii) $\|B^\varepsilon\| < C$,

iii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|P^\varepsilon (B^\varepsilon - B) f\| = 0 \ \forall f \in H$.

Тогда для любого λ, не являющегося точкой дискретного спектра оператора B, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P^\varepsilon (E^\varepsilon_\lambda - E_\lambda) f\| = 0 \ \forall f \in H.$$

Доказательство этой леммы подобно доказательству теоремы Реллиха (см. [12]). Для удобства воспроизведем его здесь.

Из условий i)-iii) следует, что для любого многочлена $\Pi(x) (x \in R)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P^\varepsilon (\Pi(B^\varepsilon) - \Pi(B)) f\| = 0 \ \forall f \in H. \tag{3.7}$$

Пусть $F(x) (x \in R)$ — непрерывная функция и $\{ \Pi_k(x), k = 1, \dots \}$ — последовательность многочленов такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \max_{|x| < C} | F(x) - \Pi_k(x) | = 0, \tag{3.8}$$

где $C = \max\left\{ \sup\limits_{\varepsilon > 0} \|B^\varepsilon\|, \|B\| \right\}$. Так как

$$\|P^\varepsilon (F(B^\varepsilon) - F(B)) f\| \le \|P^\varepsilon (F(B^\varepsilon) - \Pi_k(B^\varepsilon)) f\| +$$
$$+ \|P^\varepsilon (F(B) - \Pi_k(B)) f\| + \|P^\varepsilon (\Pi_k(B^\varepsilon) - \Pi_k(B)) f\|,$$

то учитывая (3.7), (3.8), получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^{\varepsilon}(F(B^{\varepsilon}) - F(B))f \right\| = 0 \ \forall f \in H. \tag{3.9}$$

Положим

$$F(x) = F_{\lambda}(x) = \chi_{\lambda}(x)(x - \lambda),$$

где $\chi_{\lambda}(x)$ — характеристическая функция множества $(-\infty, \lambda) \in R^1$, а λ не принадлежит дискретному спектру оператора B. Тогда

$$F_{\lambda}(B^{\varepsilon}) = E^{\varepsilon}_{\lambda}(B^{\varepsilon} - \lambda E), \qquad F_{\lambda}(B) = E_{\lambda}(B - \lambda E)$$

и согласно условию i) справедливо равенство $P^{\varepsilon} E^{\varepsilon}_{\lambda} = E^{\varepsilon}_{\lambda} P^{\varepsilon}$, с помощью которого получаем

$$\begin{aligned} \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda}(B - \lambda E) - E_{\lambda}(B - \lambda E))f \right\| &\le \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda}(B^{\varepsilon} - \lambda E) - E_{\lambda}(B - \lambda E))f \right\| + \\ &+ \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda} P^{\varepsilon}(B - \lambda E) - E^{\varepsilon}_{\lambda} P^{\varepsilon}(B - \lambda E))f \right\| \le \\ &\le \left\| P^{\varepsilon}(F_{\lambda}(B^{\varepsilon}) - F_{\lambda}(B))f \right\| + \left\| P^{\varepsilon}(B^{\varepsilon} - B)f \right\|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) и условия iii) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda} - E_{\lambda})(B - \lambda E)f \right\| = 0 \quad \forall f \in H. \tag{3.11}$$

Предположим, f принадлежит области определения D_{λ} оператора $(B - \lambda E)^{-1}$. Тогда

$$\left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda} - E_{\lambda})f \right\| = \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda} - E_{\lambda})(B - \lambda E)(B - \lambda E)^{-1} f \right\|$$

и, следовательно, в силу (3.11)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^{\varepsilon}(E^{\varepsilon}_{\lambda} - E_{\lambda})f \right\| = 0 \qquad \forall f \in D_{\lambda}. \tag{3.12}$$

Область определения D_{λ} самосопряженного оператора $(B - \lambda E)^{-1}$ плотна в H, поскольку точки $\lambda(\mathrm{Im}\lambda = 0)$ не принадлежат дискретному спектру оператора B. Поэтому равенство (3.12) справедливо для любого $f \in H$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим теперь операторы $B^{\varepsilon} = \hat{R}^{\varepsilon}(\mu) = \hat{Q}^{\varepsilon}(A^{\varepsilon} - \mu E^{\varepsilon})^{-1} Q^{\varepsilon}$ и $B = \hat{R}(\mu) = P_I (A - \mu E)^{-1} P_I$ в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega)^m$. Из теоремы 2 следует, что для любого $f \in L_2(\Omega)^m$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^{\varepsilon}(\hat{R}^{\varepsilon}(\mu) - \hat{R}(\mu))f \right\|_{\Omega} = 0,$$

где $\| \ \|_{\Omega}$ — норма в $L^2(\Omega)^m$.

Таким образом, условие iii) леммы R выполняется при $H^{\varepsilon} = L_2(\Omega^{\varepsilon})^m \subset L_2(\Omega)^m$. Согласно (3.2), (3.3) условия i) и ii) также выполняются. Поэтому из леммы R, (3.1) и (3.6) следует, что для любой вектор-функции $\varphi \in L_2(\Omega)^m$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^{\varepsilon}(\hat{Q}^{\varepsilon} E^{\varepsilon}_{\Delta} Q^{\varepsilon} - P_I E_{\Delta} P_I)_{\varphi} \right\|_{\Omega} = 0, \tag{3.13}$$

где $E^\varepsilon_\Delta = E^\varepsilon_{\lambda''} - E^\varepsilon_{\lambda'}$, $E_\Delta = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$, а $\left\{E^\varepsilon_\lambda\right\}$, $\left\{E_\lambda\right\}$ — спектральные семейства операторов A^ε и A, λ'' и λ' — произвольные числа, поскольку оператор A не имеет дискретного спектра.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся спектральными представлениями для решений $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$ и $u = u(x,t)$ задач (1.1) и (1.7) соответственно

$$u^\varepsilon = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} dE^\varepsilon_\lambda \varphi^\varepsilon, \qquad u = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda \varphi .$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| Q^\varepsilon u^\varepsilon - P^\varepsilon u \right\|_\Omega \le \left\| P^\varepsilon \left(\int\limits_0^\Lambda e^{-\lambda t} d\lambda \left[\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon\right]\varphi - \int\limits_0^\Lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda \varphi \right) \right\|_\Omega + \\ + \left\| P^\varepsilon \int\limits_\Lambda^\infty d\lambda \left[\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon\right]\varphi \right\|_\Omega + \left\| \int\limits_\Lambda^\infty dE_\lambda \varphi \right\|_\Omega + \left\| \hat{Q}^\varepsilon \varphi^\varepsilon - Q^\varepsilon \varphi \right\|_\Omega , \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \left\| P^\varepsilon \int\limits_\Lambda^\infty d\lambda \left[\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon\right]\varphi \right\|^2_\Omega \le \left\| \int\limits_\Lambda^\infty dE_\lambda \varphi \right\|^2_\Omega + \\ + 2\left\|\varphi\right\|_\Omega \left\| P^\varepsilon \left(\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon - E_\lambda\right)\varphi \right\|_\Omega , \end{aligned} \tag{3.15}$$

где Λ — произвольное число. Из (3.13) и (3.15) следует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int\limits_0^\Lambda e^{-\lambda t} d\lambda \left[\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon\right]\varphi - \int\limits_0^\Lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda \varphi \right\|_\Omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| P^\varepsilon \int\limits_0^\Lambda d\lambda \left[\hat{Q}^\varepsilon E^\varepsilon_\lambda Q^\varepsilon\right]\varphi \right\|_\Omega \le \left\| \int\limits_\Lambda^\infty dE_\lambda \varphi \right\|_\Omega = o(1) \qquad (\Lambda \to \infty).$$

Учитывая эти равенства, а также (3.14) и условие IV теоремы 1, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \hat{Q}^\varepsilon u^\varepsilon - P^\varepsilon u \right\|_\Omega = 0,$$

что и доказывает теорему 1.

Список литературы

1. *В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов*, Краевые задачи с мелкозернистой границей.— Мат. сб. (1964), т. 65(107), № 3, с. 458—472.
2. *В. А. Марченко, Г. В. Сузиков*, Вторая краевая задача в областях со сложной границей.— Мат. сб. (1966), т. 69(111), № 1, с. 35—60.
3. *В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов*, Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Наукова думка, Киев (1974), 279 с.
4. *Е. Я. Хруслов*, Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области.— Мат. сб. (1978), т. 106(148), № 4, с. 604—621.

5. *D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin*, Homogenization in Open Sets with Holes.— J. Math. Anal. Appl. (1979), v. 71, № 2, p. 590—607.
6. *М. В. Гончаренко, Л. В. Берлянд*, Осреднение уравнения диффузии в пористой среде с поглощением.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), вып. 52, с. 112—121.
7. *E. De Giorgy, S. Spagnolo*, Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellеptici del 2 ordine.— Boll. Un. Mat. Ital. (1973), v. 8, p. 391—411.
8. *A. Bensousson, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou*, Asymptotic methods in periodic structures. North Holland, Amsterdam (1978), 700 p.
9. *E. Sanches Palencia*, Non-homogeneous media and vibration theory. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag (1980), 427 p.
10. *В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник*, Усреднение параболических операторов.— Труды Моск. матем. об-ва (1982), № 45, с. 182—236.
11. *В. А. Кондратьев*, О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений.— Труды Моск. матем. об-ва (1967), т. 16, № 1, с. 293—318.
12. *Л. В. Берлянд*, О сходимости разложений единицы оператора второй краевой задачи.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1980), вып. 3, с. 3—8.

Homogenized model for the diffusion of coloured particles in domains with small obstacles

L. Boutet de Monvel and E. Ya. Khruslov

The diffusion of coloured particles (m colours) in a domain containing a large number N^{ε} of obstacles of small diameter d^{ε} is considered: if particle meets an obstacle then it is reflected and it changes its colour to one of the m given colours with some probability. The asymptotic behaviour of the solution $u^{\varepsilon}(x,t)$ of initial boundary value problem describing the densities of particles is studied as $\varepsilon \to 0$ ($N^{\varepsilon} \to \infty$, $d^{\varepsilon} \to 0$). Homogenized system of equations for limit densities is derived.