Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 102–115

УДК 517.53

Геометрические критерии существования полосных и угловых производных для некоторых классов конформных отображений

О. Е. Гентош, А. А. Гольдберг, О. Н. Моравецкая

Львовский государственный университет им. И. Франко, Украина, 290602, Львов

Статья поступила в редакцию 11 октября 1993 г.

С помощью понятий Δ-оболочки и Δ-ядра множества получены необходимые и достаточные условия для существования асимптотики определенного вида у конформных отображений односвязных областей, принадлежащих некоторым классам, на полуполосу или на полуплоскость. Указаны некоторые приложения к теории целых функций.

За допомогою понять Δ-оболонки та Δ-ядра множини одержано необхідні й достатні умови існування асимптотики певного виду у конформних відображень однозв'язних областей, що належать деяким класам, на півсмугу або півплощину. Вказано деякі застосування до теорії цілих функцій.

1. В статье без дополнительных пояснений будут использоваться обозначения для $z, w, \zeta \in \mathbf{C}$: $\mathrm{Re}z = x$, $\mathrm{Im}z = y$, $\mathrm{Re}w = u$, $\mathrm{Im}w = v$, $\mathrm{Re}\zeta = \xi$, $\mathrm{Im}\zeta = \eta$. Пусть $S(z) = \{z: | y | < 1/2\}$, $P(z) = \{z: | y | < 1/2, x > 0\}$. Всюду в статье G — односвязная область в $\mathbf{C}$, отличная от $\mathbf{C}$, $\{w: u > 0, v = 0\} \subset G$. Символом ∞ обозначается граничный элемент области G, к которому ведет путь $w = u \to +\infty$. Пусть $z = z(w)$ — конформное однолистное отображение G на $P(z)$ такое, что $\mathrm{Re}z(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$. Скажем, что функция $z(w)$ имеет полосную производную в ∞, равную $C \in \mathbf{R}$, если выполнены два условия: для любого δ, $0 < \delta < 1/2$, 1) существует $u_0 > 0$ такое, что $S_\delta(w) = \{w: | v | < \delta, u > u_0\} \subset G$, и 2) $z(w) - w \to C$ при $u \to +\infty$, $w \in S_\delta(w)$.

Это определение было сформулировано Родином и Варшавским в работе [1], в которой они величину C назвали угловой производной. Но мы этот термин «угловая производная» сохраним для других отображений и используем там, где он будет более уместным.

З а м е ч а н и е. Отображение $G \to P(z)$, очевидно, без дополнительной нормировки однозначно не определяется. Но само существование полосной производной зависит только от вида G в окрестности граничного элемента ∞. Действительно, пусть G_1 и G_2 — две односвязные области в C, отличные от C и содержащие луч $\{w : u > 0, v = 0\}$, причем эти области такие, что некоторые окрестности граничного элемента ∞, соответственно $g_1 \subset G_1$ и $g_2 \subset G_2$, совпадают, $g_1 = g_2 = g$. Пусть $z_1(w)$ и $z_2(w)$ — некоторые конформные и однолистные отображения G_1 и G_2 на $P(z)$, такие, что $z_1(\infty) = \infty$ и $z_2(\infty) = \infty$. Обозначим $\zeta_j(w) = \exp(-\pi z_j(w))$, $j = 1, 2$. Функция ζ_j конформно и однолистно отображает G_j на $\{\zeta: | \zeta | < 1, \xi > 0\}$, $\zeta_j(\infty) = 0$. В $\zeta_1(g)$

определяется конформное и однолистное отображение $\zeta_2(\zeta_1^{-1})$ окрестности $\zeta = 0$ — области $\zeta_1(g)$ на окрестность $\zeta = 0$ — область $\zeta_2(g)$. Границы областей $\zeta_1(g)$ и $\zeta_2(g)$ содержат некоторые интервалы I_1 и I_2 на мнимой оси, $0 \in I_1$, $0 \in I_2$. В соответствии с известными свойствами конформных отображений отображение $\zeta_2(\zeta_1^{-1})$ непрерывно продолжается на I_1, поэтому к функции $\omega = \zeta_2(\zeta_1^{-1}(\zeta))$ можно применить принцип симметрии Римана–Шварца. В результате обнаруживаем, что существует положительная производная $\omega'(0) = K$. Так как $\omega(0) = 0$, то $\lim\limits_{\zeta \to 0} \zeta_2(\zeta_1^{-1}(\zeta))/\zeta = K$, откуда $\lim\limits_{w \to 0} \zeta_2(w)/\zeta_1(w) = K$, $\lim\limits_{w \to \infty} (-\pi z_2(w) + \pi z_1(w)) = \ln K$.

Следовательно, если $z_2(w)$ имеет полосную производную C_2, то $z_1(w)$ имеет полосную производную $C_1 = (\ln K)/\pi + C_2$ и наоборот. Поэтому, следуя работе [1], будем говорить о существовании полосной производной для области G, а не для конкретного отображения.

В работах [2,3] определены необходимые и достаточные условия для существования полосной производной у области G. Эти условия сформулированы в терминах асимптотического поведения экстремальной длины некоторых семейств кривых в G. Возникает задача, которая заключается в том, чтобы получить соответствующие условия в чисто геометрических терминах ("евклидовы условия", по выражению Родина и Варшавского [1]). В полном объеме эта задача не решена до сих пор. Для тех важных случаев, когда $G \subset P(w)$ или $P(w) \subset G$, в работе [1] получены критерии существования полосной производной в геометрических терминах, однако, на наш взгляд, эти критерии не всегда достаточно эффективны. Здесь рассматриваются те же случаи $G \subset P(w)$ и $P(w) \subset G$, и на основе критериев Родина и Варшавского определяются новые критерии, которыми, по-видимому, легче пользоваться. Это можно видеть в разделах 4 и 5 настоящей статьи на примерах двух задач нахождения необходимых и достаточных условий существования угловых производных при некоторых конформных отображениях. Указанные отображения используются, в частности, во многих задачах теории целых функций [4-8].

2. Рассмотрим случай $G \subset P(w)$. Обозначим через $\Theta(u')$ интервал множества $G \cap \{w\colon u = u'\}$, который пересекается с действительной осью. Разбиением $\{u_n\}$ области G будем называть последовательность $0 = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots \to \infty$. Обозначим

$$\delta_n = u_{n+1} - u_n, \quad v^-(u) = \inf\{v\colon w \in \Theta(u)\}, \quad v^+(u) = \sup\{v\colon w \in \Theta(u)\},$$
$$v_n^- = \max\{v^-(u)\colon u_n \le u \le u_{n+1}\}, \quad v_n^+ = \min\{v^+(u)\colon u_n \le u \le u_{n+1}\},$$
$$\Theta_n^- = v_n^- + 0{,}5, \quad \Theta_n^+ = 0{,}5 - v_n^+.$$

Теорема А [1]. *Пусть $G \subset P(w)$. Для существования полосной производной области G необходимо и достаточно каждое из следующих условий*:

1) *для произвольного разбиения $\{u_n\}$, такого, что $\sum\limits_1^\infty \delta_n^2 < \infty$, выполняется*

$$\sum_1^\infty \delta_n \Theta_n^- < \infty, \qquad \sum_1^\infty \delta_n \Theta_n^+ < \infty; \tag{1}$$

2) *существует покрытие множества* $P(w)\backslash G$ *последовательностью полукругов с радиусами* r_n *и диаметрами на* $\partial S(w)$, *такое, что*

$$\sum_1^\infty r_n^2 < \infty.$$

Обозначим через S класс замкнутых областей — равнобедренных прямоугольных треугольников $t \subset \overline{S}(w)$, гипотенуза которых лежит на $\partial S(w)$ и $t \cap \mathbb{R} = 0$. Через $t(w)$ обозначим $t \in S$ с вершиной прямого угла в точке w. Пусть $E \subset P(w)$, $E \cap \mathbb{R} = 0$. Δ-оболочкой множества E назовем $\Delta\text{-env}\ E = \bigcup\{t(w)\colon w \in E\}$. Очевидно, $E \subset \Delta$-env E, $\Delta\text{-env}\ E = \bigcap\{t \in S\colon t \cap E \neq 0\}$. Если $E \subset \bigcup\limits_1^\infty t_n$, $t_n \in S$, то и $\Delta\text{-env}\ E \subset \bigcup\limits_1^\infty t_n$, так как если $w \in t_n$, то $t(w) \subset t_n$. Для любого измеримого множества $M \subset \mathbb{C}$ через $\mu(M)$ будем обозначать его плоскую меру Лебега.

Теорема 1. *Для того, чтобы* $G \subset P(w)$ *имела полосную производную, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu(\Delta\text{-env}\ (P(w)\backslash G)) < \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть G имеет полосную производную. Тогда выполняется второе условие теоремы А. Обозначим полукруги, о которых говорится в этом условии, через C_n. Не уменьшая общности, можно считать, что все $r_n < 1/4$. Опишем вокруг C_n треугольник $t_n \in S$, середина гипотенузы которого совпадает с центром C_n, а длина гипотенузы равна $2\sqrt{2}r_n$. Очевидно, $P(w)\backslash G \subset \bigcup\limits_1^\infty t_n$, следовательно, $\Delta\text{-env}\ (P(w)\backslash G) \subset \bigcup\limits_1^\infty t_n$ и $\mu(\Delta\text{-env}\ (P(w)\backslash G)) \le \sum\limits_1^\infty \mu(t_n) = 2\sum\limits_1^\infty r_n^2 < \infty$.

Предположим теперь, что выполняется условие (2) теоремы 1. Докажем сходимость первого ряда в условии (1) теоремы А для любого разбиения с $\sum\limits_1^\infty \delta_n^2 < \infty$. Обозначим $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N}\colon \Theta_n^- \le \delta_n\}$, $\mathbb{N}'' = \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}'$. Ясно, что

$$\sum_{n\in\mathbb{N}'} \delta_n \Theta_n^- \le \sum_{n\in\mathbb{N}'} \delta_n^2 < \infty.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}''$. Обозначим через $A_nB_nC_nD_n$ прямоугольник $\{w\colon u_n \le u \le u_{n+1},\ -0{,}5 \le v \le v_n^-\}$, $A_n = u_n - 0{,}5i$, $B_n = u_n + iv_n^-$, $C_n = u_{n+1} + iv_n^-$, $D_n = u_{n+1} - 0{,}5i$. На стороне B_nC_n существует точка $O_n = u_n^* + iv_n^- \in \partial G$, $u_n \le u_n^* \le u_{n+1}$. В силу того, что $n \in \mathbb{N}''$, стороны прямого угла треугольника $t(O_n) \in S$ пересекают стороны A_nB_n и C_nD_n в некоторых точках K_n и M_n соответственно ($K_n = B_n$, если $O_n = B_n$, и $M_n = C_n$, если $O_n = C_n$). Так как $t(O_n) \subset \Delta\text{-env}\ (P(w)\backslash G)$, то

$$\mu_n = \mu(\Delta\text{-env}\ (P(w)\backslash G) \cap \{w\colon u_n \le u \le u_{n+1}, v < 0\}) \ge \mu(A_nK_nO_nM_nD_n).$$

Легко проверить, что наименьшее значение $\mu(A_n K_n O_n M_n D_n)$ принимает в тех случаях, когда $O_n = B_n$ или $O_n = C_n$, и это наименьшее значение равно $\delta_n \Theta_n^- - \delta_n^2/2$. Таким образом, $\delta_n \Theta_n^- \le \mu_n + \delta_n^2/2$. Следовательно,

$$\sum_{n \in \mathbf{N}''} \delta_n \Theta_n^- \le \sum_{n \in \mathbf{N}''} \mu_n + 0{,}5 \sum_{n \in \mathbf{N}''} \delta_n^2 \le \mu(\Delta\text{-env}\,(P(w) \setminus G)) + 0{,}5 \sum_1^\infty \delta_n^2 < \infty.$$

Сходимость первого ряда в (1) доказана. Сходимость второго ряда доказывается аналогично. Из первого условия теоремы А следует, что у области G существует полосная производная.

Следствие. *Пусть $G \subset P(w)$ и $G_1 = P(w) \setminus \Delta$-env $(P(w) \setminus G)$. Тогда G_1 и G имеют или не имеют полосную производную одновременно.*

Это следует из равенства $\Delta\text{-env}(\Delta\text{-env}\, E) = \Delta\text{-env} E$ для любого множества $E \subset P(w) \setminus \mathbf{R}$.

3. В этом разделе будем рассматривать области G, такие, что $P(w) \subset G \subset \{w\colon u > 0\}$. Последнее включение не ограничивает общности результатов (см. замечание в разделе 1). В работе [1] приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема Б [1]. *Пусть $P(w) \subset G$. Для существования полосной производной у области G, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:*

1) *для всяких прямоугольников*

$$q_n^+ = \{w\colon a_n < u < b_n,\ 1/2 \le v \le 1/2 + 0{,}5(b_n - a_n)\},$$

$$q_n^- = \{w\colon a_n < u < b_n,\ -1/2 \ge v > -1/2 - 0{,}5(b_n - a_n)\}, \qquad 0 \le a_n < b_n,$$

которые попарно не пересекаются и

$$P(w) \cup \left(\bigcup_1^\infty q_n^+\right) \cup \left(\bigcup_1^\infty q_n^-\right) \subset G,$$

выполняется

$$\sum_1^\infty \mu(q_n^+) < \infty \quad , \sum_1^\infty \mu(q_n^-) < \infty; \tag{3}$$

2) *существует такое разбиение $\{u_n\}$, что*

$$\sum_1^\infty \delta_n^2 < \infty, \qquad \sum_1^\infty \delta_n \mid \Theta_n^- \mid < \infty, \qquad \sum_1^\infty \delta_n \mid \Theta_n^+ \mid < \infty. \tag{4}$$

Формулируя первое условие в теореме Б, мы несколько изменили условие (II) в теореме 2 из работы [1], учитывая замечание, которое приводится там же на с. 7.

Обозначим через S' класс областей — равнобедренных прямоугольных треугольников $t \subset \{w\colon |v| > 1/2\}$, гипотенузы которых лежат на $\partial S(w)$. Пусть E — некоторое множество, $E \subset \{w\colon u \ge 0,\ |v| > 1/2\}$, его Δ-ядром назовем

$$\Delta\text{-ker } E = \bigcup \{t \in S'\colon t \subset E\}.$$

Очевидно, $\Delta\text{-ker } E \subset E$ и $\Delta\text{-ker}(\Delta\text{-ker } E) = \Delta\text{-ker } E$.

Теорема 2. *Для того, чтобы область G, $P(w) \subset G$, имела полосную производную, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu(\Delta\text{-ker}(G \setminus P(w))) < \infty.$$

Предположим, что область G имеет полосную производную. Тогда выполняется второе условие из теоремы Б. Пусть $A_n B_n C_n D_n$ — прямоугольник

$$\{w\colon u_n \le u \le u_{n+1},\ -1/2 + \Theta_n^- \le v \le -1/2\}, \quad A_n = u_n - 0{,}5i,$$
$$B_n = u_n + iv_n^-, \quad C_n = u_{n+1} + iv_n^-, \quad D_n = u_{n+1} - 0{,}5i.$$

На стороне $B_n C_n$ существует точка $O_n = u_n^* + iv_n^- \in \partial G$, $u_n \le u_n^* \le u_{n+1}$. Проведем из точки O_n лучи $O_n K_n$ и $O_n M_n$ соответственно под углами $-3\pi/4$ и $-\pi/4$ к положительному направлению действительной оси. Эти лучи пересекут вертикальные прямые $\{w\colon u = u_n\}$ и $\{w\colon u = u_{n+1}\}$ в точках K_n и M_n ($K_n = B_n$, если $O_n = B_n$, и $M_n = C_n$, если $O_n = C_n$). Легко видеть, что

$$\Delta\text{-ker}(G \setminus P(w)) \cap \{w\colon u_n \le u \le u_{n+1}, v < 0\} \subset A_n K_n O_n M_n D_n.$$

Так как $|O_n B_n| + |O_n C_n| = \delta_n$, то $\mu(O_n B_n K_n) + \mu(O_n C_n M_n) \le 0{,}5\delta_n^2$ и $\mu\left(A_n K_n O_n M_n D_n\right) \le \delta_n |\Theta_n^-| + 0{,}5\delta_n^2$.

Аналогично оценивается

$$\mu\left(\Delta\text{- ker}(G \setminus P(w)) \cap \{w\colon u_n \le u \le u_{n+1}, v > 0\}\right) \le \delta_n |\Theta_n^+| + 0{,}5\delta_n^2.$$

Таким образом, в силу условия (4), имеем

$$\mu(\Delta\text{-ker}(G \setminus P(w))) \le \sum_1^\infty \delta_n |\Theta_n^-| + \sum_1^\infty \delta_n |\Theta_n^+| + \sum_1^\infty \delta_n^2 < \infty.$$

Докажем теперь достаточность. Пусть q_n^+ и q_n^- — любые прямоугольники, о которых говорится в первом условии теоремы Б. Треугольники $t_n^\pm$ с вершинами в точках $w = a_n \pm i/2$, $w = b_n \pm i/2$, $w = 0{,}5(b_n + a_n) \pm 0{,}5i(b_n - a_n)$, очевидно, принадлежат классу S', $t_n^\pm \subset q_n^\pm$. Поэтому $t_n^\pm \subset G \setminus P(w)$ и $\bigcup_1^\infty t_n^\pm \subset (\Delta - \ker(G \setminus P(w))$. Но $\sum_1^\infty \mu(t_n^\pm) = \mu\left(\bigcup_1^\infty t_n^\pm\right) \le \mu(\Delta\text{-ker}(G \setminus P(w))) < \infty$. Так как $\mu(q_n^\pm) = 2\mu(t_n^\pm)$, то выполняется условие (3), следовательно, у области G имеется полосная производная.

4. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, отличная от $\mathbb{C}$; $\{w\colon u = 0, v > 1\} \subset D$; ∞ — граничный элемент D, к которому ведет путь $w = iv$, $v \to +\infty$; $0 \in D$. Пусть

$z = z(w)$ — конформное однолистное отображение D на $Q(z) = \{z\colon |z| > 1, y > 0\}$, такое, что $\operatorname{Im} z(iv) \to +\infty$ при $v \to +\infty$.

Скажем, что функция $z(w)$ имеет угловую производную в ∞, равную $K > 0$, если выполнены два условия: для любого δ, $0 < \delta < \pi/2$,

1) существует $r_0 > 1$, такое, что $Q_\delta(w) = \{w\colon |w| > r_0, \delta < \arg w < \pi - \delta\} \subset D$;

2) $z(w)/w \to K$ при $w \to \infty$, $w \in Q_\delta$.

По поводу этого определения можно сделать замечание, аналогичное замечанию в разделе 1, и говорить о существовании угловой производной для области D.

Пусть $\zeta = \ln w$ — однозначная ветвь логарифма в D, $\ln w \,\big|_{w=2i} = \ln 2 + i\pi/2$, G — образ D при отображении $\zeta = L(w) = (\ln w)/\pi - 0{,}5i$. Очевидно, область D имеет угловую производную тогда и только тогда, когда G имеет полосную производную. Это позволяет, используя теоремы 1 и 2, получить достаточно эффективные критерии существования угловой производной у некоторых областей D.

П р и м е р 1. Пусть $0 \le h_n^{\pm} < +\infty$, $S_n^{\pm} = \{w = \pm n + iv,\ 0 \le v \le h_n^{\pm}\}$, $n \in \mathbf{N}$, $D = Q(w) \setminus \left\{\left(\bigcup\limits_1^\infty S_n^+\right) \cup \left(\bigcup\limits_1^\infty S_n^-\right)\right\}$. Обозначим

$$\alpha_n^+ = \arg(n + ih_n^+), \qquad \alpha_n^- = -\arg(-n + ih_n^-) + \pi, \qquad n \in \mathbf{N},$$

$$\beta_n^{\pm} = \max\{\alpha_m^{\pm} - |\ln m - \ln n| : m \in \mathbf{N}\} =$$

$$= \max\{\alpha_m^{\pm} - |\ln m - \ln n| : 1 \le m \le n\exp(\pi/2)\} =$$

$$= \max\{\alpha_m^{\pm} - |\ln m - \ln n| : \alpha_m^{\pm} \ge \alpha_n^{\pm}\}.$$

Из первого условия в определении угловой производной видим, что можно ограничиться случаем, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^- = 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $0 \le \alpha_n^{\pm} < \pi/4$, $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы область D имела угловую производную, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_1^\infty \beta_n^+/n < \infty, \qquad \sum_1^\infty \beta_n^-/n < \infty. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $G = L(D)$, $\sigma_n^{\pm} = L(S_n^{\pm})$. Параметрическое уравнение σ_n^+ имеет вид: $\xi = (1/\pi)(\ln n - \ln\cos t)$, $\eta = t/\pi - 0{,}5$, $0 \le t \le \alpha_n^+$, и $d\eta/d\xi = \operatorname{ctg} t > 1$ при $0 < t \le \alpha_n^+$. Параметрическое уравнение σ_n^- имеет аналогичный вид: $\xi = (1/\pi)(\ln n - \ln\cos t)$, $\eta = 0{,}5 - t/\pi$, $0 \le t \le \alpha_n^-$, и $d\eta/d\xi = -\operatorname{ctg} t < -1$ при $0 < t \le \alpha_n^-$. Поэтому треугольники $t \in S$ с вершинами прямых углов в концах разрезов $\sigma_n^{\pm}$ покрывают $P(\zeta)\setminus G$. Обозначим $\Delta_n^{\pm} = t(L(\pm n + ih_n^{\pm}))$. Тогда

$$\Delta\text{-env}\,(P(\zeta) \setminus G) = \bigcup_1^\infty \left(\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-\right).$$

В соответствии с теоремой 1, для того, чтобы область G имела полосную производную и, что равносильно, чтобы область D имела угловую производную, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty \left(\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-\right)\right) < \infty. \tag{6}$$

Согласно следствию из теоремы 1 области $G = P(\zeta)\setminus\bigcup_1^\infty \left(\sigma_n^+ \cup \sigma_n^-\right)$ и $G_1 = P(\zeta)\setminus\bigcup_1^\infty \left(\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-\right)$ имеют или не имеют полосную производную одновременно. Обозначим

$$\Delta_{n1}^+ = t(\pi^{-1}\ln n + i(\alpha_n^+/\pi - 0{,}5)), \quad \Delta_{n1}^- = (\pi^{-1}\ln n + i(0{,}5 - \alpha_n^-/\pi)),$$

$$\Delta_{n2}^+ = t(\pi^{-1}(\ln n - \ln\cos\alpha_n^+) + i(2\alpha_n^+/\pi - 0{,}5)),$$

$$\Delta_{n2}^- = t(\pi^{-1}(\ln n - \ln\cos\alpha_n^-) + i(0{,}5 - 2\alpha_n^-/\pi)).$$

Так как $-\ln\cos\alpha_n^\pm \le \alpha_n^\pm$, то $\Delta_{n1}^\pm \subset \Delta_{n2}^\pm$.

Лемма. *Для того, чтобы выполнялось условие (6), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty \left(\Delta_{n1}^+ \cup \Delta_{n1}^-\right)\right) < \infty \tag{7}$$

Необходимость. Если выполняется условие (6), то область G_1 имеет полосную производную. По второму условию из теоремы 1 существует последовательность полукругов C_ν с диаметрами на $\partial S(\zeta)$, радиусами r_ν, $\sum_1^\infty r_\nu^2 < \infty$, такая, что

$$\bigcup_1^\infty \left(\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-\right) \subset \bigcup_1^\infty C_\nu.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что все $r_\nu < 1/8$. Заключим C_ν в треугольники $t_\nu' \in S$ и $t_\nu \in S$, середины гипотенуз которых совпадают с центром C_ν, а длины гипотенуз равны соответственно $2\sqrt{2}r_\nu$ и $4\sqrt{2}r_\nu$. Очевидно, если $\Delta_n^+ \subset t_\nu'$, то $\Delta_{n2}^+ \subset t_\nu$, и если $\Delta_n^- \subset t_\nu'$, то $\Delta_{n2}^- \subset t_\nu$. Поэтому, поскольку $\bigcup_1^\infty \left(\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-\right) \subset \bigcup_1^\infty t_\nu'$, то $\bigcup_1^\infty \left(\Delta_{n2}^+ \cup \Delta_{n2}^-\right) \subset \bigcup_1^\infty t_\nu$ и $\mu\left(\bigcup_1^\infty \left(\Delta_{n2}^+ \cup \Delta_{n2}^-\right)\right) \le \mu\left(\bigcup_1^\infty t_\nu\right) \le \sum_1^\infty \mu(t_\nu) = 4\sum_1^\infty r_\nu^2 < \infty.$
Но

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty \left(\Delta_{n1}^+ \cup \Delta_{n1}^-\right)\right) \le \mu\left(\bigcup_1^\infty \left(\Delta_{n2}^+ \cup \Delta_{n2}^-\right)\right) < \infty.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется условие (7). В этом случае, согласно теореме 1, область $G_2 = P(\zeta)\setminus\bigcup\limits_{1}^{\infty}\left(\Delta_{n1}^{+}\cup\Delta_{n1}^{-}\right)$ имеет полосную производную. Далее рассуждаем так же, как и при доказательстве необходимости, но теперь в роли G_1 будет выступать G_2, а вместо $\Delta_{n2}^{\pm}$ используем треугольники

$$\Delta_{n3}^{+} = t(\pi^{-1}\ln n + i(2\alpha_n^{+}/\pi - 0{,}5)), \qquad \Delta_{n3}^{-} = t(\pi^{-1}\ln n + i(0{,}5 - 2\alpha_n^{+}/\pi))$$

и тот факт, что $\Delta_n^{\pm}\subset\Delta_{n3}^{\pm}$. Лемма доказана.

Обозначим через Λ^{+} и Λ^{-} ломаные, которым отвечают уравнения ($\xi\ge 0$)

$$\tau = V^{+}(\xi) = \max\left\{\eta\colon \xi + i\eta \in \left(\bigcup_{1}^{\infty}\Delta_{n1}^{+}\right)\cup\{\zeta\colon\eta = -1/2\}\right\}$$

и

$$\tau = V^{-}(\xi) = \min\left\{\eta\colon \xi + i\eta \in \left(\bigcup_{1}^{\infty}\Delta_{n1}^{-}\right)\cup\{\zeta\colon\eta = 1/2\}\right\}$$

соответственно.

Для $x\in\mathrm{R}$ через $\{x\}^{+}$ обозначим $\max\{x,0\}$. Легко проверить, что если

$$L^{\pm}(\xi) = \max\{\{\alpha_m^{\pm} - |\ln m - \xi|\}^{+}\colon m\in\mathrm{N}\}, \qquad \xi\ge 0,$$

то

$$V^{+}(\xi) = -0{,}5 + L^{+}(\xi), \qquad V^{-}(\xi) = 0{,}5 - L^{-}(\xi), \qquad \beta_n^{\pm} = L^{\pm}(\ln n).$$

Звенья ломаных Λ^{+} и Λ^{-} имеют угловые коэффициенты $+1$или -1.

Нам требуется доказать равносильность условий (5) и (7). Пусть выполняется условие (7). Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty}\Delta_{n1}^{+}\right) = \int_{0}^{\infty} L^{+}(\xi)d\xi < \infty. \tag{8}$$

Так как точки, где $L^{+}(\xi)$ имеет локальный максимум, принадлежат множеству $\{\ln n\colon n\in\mathrm{N}\}$, то на интервале $[\ln n, \ln(n+1)]$ функция $L^{+}(\xi)$ всегда выпукла и либо a) линейна, либо b) имеет минимум в единственной точке

$$\xi_n = 0{,}5(\beta_n^{+} - \beta_{n+1}^{+} + \ln n + \ln(n+1)),$$
$$\eta_n = L^{+}(\xi_n) = 0{,}5(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+}) - 0{,}5\ln(1 + 1/n),$$

либо c) на отрезке $[\ln n + \beta_n^{+}, \ln(n+1) - \beta_{n+1}^{+}]$ равна нулю. Случай a) имеет место тогда, когда $|\beta_{n+1}^{+} - \beta_n^{+}| \ge \ln(1 + 1/n)$; случай b) — когда $|\beta_{n+1}^{+} - \beta_n^{+}| <$ $< \ln(1 + 1/n)$ и $\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+} \ge \ln(1 + 1/n)$ и случай c) — когда $\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+} <$ $< \ln(1 + 1/n)$.

В случае a)

$$\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} L^{+}(\xi)d\xi = 0{,}5(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n). \qquad (9)$$

В случае b)

$$0{,}5(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n) \geq \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} L^{+}(\xi)d\xi \geq 0{,}25(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n). \qquad (10).$$

Левая часть (10) очевидна, докажем правую часть. Имеем

$$\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} L^{+}(\xi)d\xi = 0{,}5(\beta_n^{+} - \eta_n)^2 + 0{,}5(\beta_{n+1}^{+} - \eta_n)^2 + \eta_n \ln(1 + 1/n) =$$

$$= 0{,}5\{(\beta_n^{+})^2 + (\beta_{n+1}^{+})^2\} - 0{,}25(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})^2 + 0{,}5(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n) -$$

$$- 0{,}25\ln^2(1 + 1/n) = 0{,}25(\beta_n^{+} - \beta_{n+1}^{+})^2 - 0{,}25\ln^2(1 + 1/n) +$$

$$+ 0{,}5(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n) \geq 0{,}25(\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n),$$

поскольку $\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+} \geq \ln(1 + 1/n)$.

В случае c)

$$\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} L^{+}(\xi)d\xi = 0{,}5\{(\beta_n^{+})^2 + (\beta_{n+1}^{+})^2\}. \qquad (11)$$

Будем записывать $n \in \mathrm{N}(a)$, $n \in \mathrm{N}(b)$ или $n \in \mathrm{N}(c)$ в зависимости от того, какой из трех случаев a), b) или c) имеет место на отрезке $[\ln n, \ln(n + 1)]$. Из (8) и (9) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n \in \mathrm{N}(a)} \beta_n^{+} \ln(1 + 1/n)$, а значит, и ряда $\sum\limits_{n \in \mathrm{N}(a)} \beta_n^{+}/n$. Сходимость ряда $\sum\limits_{n \in \mathrm{N}(b)} \beta_n^{+}/n$ доказывается аналогично с использованием правой части (10) вместо (9). В случае c) $\beta_n^{+} < \ln(1 + 1/n) < 1/n$ и $\sum\limits_{n \in \mathrm{N}(c)} \beta_n^{+}/n \leq \sum\limits_{n \in \mathrm{N}(c)} n^{-2} < \infty$. Так как $\mathrm{N}(a) \cup \mathrm{N}(b) \cup \mathrm{N}(c) = \mathrm{N}$, то, следовательно, сходимость первого ряда из (5) доказана, сходимость второго доказывается так же.

Пусть теперь выполняется условие (5). Очевидно, что тогда

$$\sum_{1}^{\infty} (\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n) < \infty.$$

В случае c) $(\beta_n^{+})^2 + (\beta_{n+1}^{+})^2 \leq (\beta_n^{+} + \beta_{n+1}^{+})\ln(1 + 1/n)$. Из (9), (10), (11) следует соотношение (8). Аналогично можно показать, что $\mu\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} \Delta_{n1}^{-}\right) < \infty$, а это говорит о том, что выполняется условие (7) и, следовательно, теорему 3 можно считать доказанной.

Отметим, что в теореме 3 используются не последовательности $(\alpha_n^{\pm})$, а последовательности $(\beta_n^{\pm})$. Можно получить критерий, в котором не используются $\beta_n^{\pm}$, но в таком случае необходимо знать последовательности (n_k) и (m_p) натуральных чисел, такие, что в точках $\ln n_k$ функция V^+ имеет локальный максимум, а в точках $\ln m_p$ функция V^- имеет локальный минимум (другими словами, $\ln n_k$ и $\ln m_p$ — абсциссы вершин ломаной, соответственно Λ^+ и Λ^-, прямые углы в которых направлены к действительной оси).

Теорема 4. *Для того, чтобы область D имела угловую производную, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_k (\alpha^+_{n_{k+1}} + \alpha^+_{n_k}) \min \left\{\ln \frac{n_{k+1}}{n_k}, \alpha^+_{n_{k+1}} + \alpha^+_{n_k}\right\} < \infty \tag{12}$$

и

$$\sum_p (\alpha^-_{m_{p+1}} + \alpha^-_{m_p}) \min \left\{\ln \frac{m_{p+1}}{m_p}, \alpha^-_{m_{p+1}} + \alpha^-_{m_p}\right\} < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Здесь так же, как и при доказательстве теоремы 3, устанавливается, что существование угловой производной области D равносильно сходимости интегралов $\int_0^\infty L^{\pm}(\xi)d\xi$. Покажем, например, что сходимость интеграла $\int_0^\infty L^+(\xi)d\xi$ эквивалентна сходимости ряда (12). Рассмотрим функцию $L^+(\xi)$ на отрезке $[\ln n_k, \ln n_{k+1}]$. Рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве теоремы 3, но с тем отличием, что случай a) не может встретиться. В случае b), когда $|\alpha^+_{n_{k+1}} - \alpha^+_{n_k}| < \ln (n_{k+1}/n_k)$ и $\alpha^+_{n_k} + \alpha^+_{n_{k+1}} \geq \ln (n_{k+1}/n_k)$, имеем (ср. (10))

$$0{,}5(\alpha^+_{n_k} + \alpha^+_{n_{k+1}})\ln (n_{k+1}/n_k) \geq \int_{\ln n_k}^{\ln n_{k+1}} L^+(\xi)d\xi \geq 0{,}25(\alpha^+_{n_k} - \alpha^+_{n_{k+1}})\ln (n_{k+1}/n_k),$$

а в случае c), когда $\alpha^+_{n_k} + \alpha^+_{n_{k+1}} < \ln (n_{k+1}/n_k)$, выполняется (ср. (11))

$$0{,}5(\alpha^+_{n_k} + \alpha^+_{n_{k+1}})^2 \geq \int_{\ln n_k}^{\ln n_{k+1}} L^+(\xi)d\xi = 0{,}5\{(\alpha^+_{n_k})^2 + (\alpha^+_{n_{k+1}})^2\} \geq 0{,}25(\alpha^+_{n_k} + \alpha^+_{n_{k+1}})^2.$$

Если обозначим через T сумму ряда (12), то $0{,}5T \geq \int\limits_{n_1}^{\infty} L^+(\xi)d\xi \geq 0{,}25T$. Теперь очевидно, что интеграл $\int\limits_0^{\infty} L^+(\xi)d\xi$ и ряд (12) сходятся или расходятся одновременно.

5. Пример 2. Пусть теперь $D = \{w: |w| > 1\} \setminus \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} S_m$, где

$$S_m = \{w: u = m, -\infty < v \leq k_m\}, \qquad -\infty \leq k_m \leq 0, \qquad m \in \mathbb{Z}, \qquad k_0 = 1;$$

если $k_m = -\infty$, то $S_m = 0$. Обозначим ($\xi \in \mathbb{R}_+$)

$$M^{\pm}(\xi) = \min\{ \left| \xi - 0{,}5\ln(k_m^2 + m^2) \right| + \operatorname{arctg} \left| k_m/m \right| : \pm m \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы область D имела угловую производную, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^{\infty} M^+(\xi)d\xi < \infty \text{ и } \int\limits_0^{\infty} M^-(\xi)d\xi < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть G — образ D при отображении функцией $\zeta = L(w)$ (см. начало раздела 4). Если $\sigma_m = L(S_m)$, то $G = \{\zeta: \xi > 0, |\eta| < 1\} \setminus \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \sigma_m$ (штрих означает, что элемент с $m = 0$ пропускается). Параметрические уравнения σ_m имеют вид: $\xi = \pi^{-1}(\ln|m| - \ln\cos t)$, $\eta = -(0{,}5 + t/\pi)\operatorname{sgn} m$, $\operatorname{arctg}\left| k_m/m \right| \leq t < \pi/2$, $m \neq 0$.

При $m \in \mathbb{N}$ для σ_m имеем $d\eta/d\xi = -\operatorname{ctg} t$, а для σ_{-m} выполняется $d\eta/d\xi = \operatorname{ctg} t$, кривая σ_m выпуклая, а σ_{-m} вогнутая. Начальная точка разреза σ_m — это $(1/2\pi)\ln(k_m^2 + m^2) - i(0{,}5 + \pi^{-1}\operatorname{arctg}\left| k_m/m \right|)\operatorname{sgn} m$, $m \neq 0$. Проведем луч s_m из этой точки под углом $-(\pi/4)\operatorname{sgn} m$ к действительной оси. Пусть $G_1 = \{\zeta: \xi > 0\} \setminus \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}{}' s_m$. Прежде всего покажем, что $\mu(\Delta\text{-ker}(G \setminus Q(\zeta)))$ и $\mu(\Delta\text{-ker}(G_1 \setminus Q(\zeta)))$ одновременно конечны или бесконечны. Если одно из множеств $(\Delta\text{-ker}(G \setminus Q(\zeta))) \cap \{\zeta: |\eta| \geq 3/4\}$ или $(\Delta\text{-ker}(G_1 \setminus Q(\zeta))) \cap \{\zeta: |\eta| \geq 3/4\}$ неограниченное, то неограниченное и второе, поскольку если треугольник $t \in S'$ содержится в одном из двух Δ-ядер, то другое Δ-ядро содержит $t \cap \{\zeta: |\eta| \leq 3/4\}$. Тогда площади обоих Δ-ядер бесконечны. Не уменьшая общности, можно считать, что $\Delta\text{-ker}(G \setminus Q(\zeta)) \subset \{\zeta: |\eta| < 3/4\}$ и $\Delta\text{-ker}(G_1 \setminus Q(\zeta)) \subset \{\zeta: |\eta| < 3/4\}$. Но при $|\eta| < 3/4$ угол наклона σ_m, $m \neq 0$, к положительному направлению действительной оси в любой точке по модулю $> \pi/4$. Поэтому $\Delta\text{-ker}(G \setminus Q(\zeta)) = \Delta\text{-ker}(G_1 \setminus Q(\zeta))$. Для $G_1 \setminus Q(\zeta)$ легко построить Δ-ядро. Часть его границы, лежащая в $\{\zeta: \eta < -1/2\}$, имеет уравнение

$$\eta = -0{,}5 - \min\{\ \left|\ \xi - \frac{1}{2\pi}\ln(k_m^2 + m^2)\ \right| + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\ \left|\ k_m/m\ \right| : m \in \mathbf{N}\},$$

а часть границы, лежащая в $\{\zeta:\eta > 1/2\}$, имеет уравнение

$$\eta = 0{,}5 + \min\{\ \left|\ \xi - \frac{1}{2\pi}\ln(k_m^2 + m^2)\right| + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\ \left|\ k_m/m\ \right| : -m \in \mathbf{N}\}.$$

Ясно, что условие (14) равносильно $\mu(\Delta\text{-ker}(G_1 \setminus Q(\zeta))) < \infty$, и, таким образом, теорема 5 следует из теоремы 2.

6. Приведем некоторые примеры использования результатов, о которых сообщается в разделах **4** и **5**, в теории целых функций. Обозначим через L класс действительных целых функций, через L_1 — подкласс функций из L, все нули которых действительны, а множество нулей не ограничено ни слева, ни справа. Через L_2 обозначим класс функций из L_1, допускающих представление в виде

$$f(z) = \exp(-\alpha z^2 + \beta z + \gamma) z^q \prod_{k=-\infty}^{\infty} E(z/x_k, 1),$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\alpha \geq 0$, $q \in \mathbf{Z}_+$, $E(z, 1)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода 1, $x_k \neq 0$, $\sum\limits_k x_k^{-2} < \infty$. Комбинируя результаты, полученные Марченко и Островским [8] и Мак-Лейном [9], получаем эквивалентность следующих условий:

а) $f \in L$ и $f^2 - 1 \in L$;

б) $f \in L$, $f' \in L_2$; если $(b_k)_{-\infty}^{\infty}$ — возрастающая последовательность нулей f', $a_k = f(b_k)$, то или для всех $k \in \mathbf{Z}$ выполняется $(-1)^k a_k \geq 1$, или для всех k выполняется $(-1)^k a_k \leq -1$.

в) существует такое конформное однолистное отображение ω_1 области $\mathbf{C}^+(z) = \{z:\operatorname{Im} z > 0\}$ на $D_1 = \mathbf{C}^+(\zeta) \setminus \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \{\zeta: \operatorname{Re}\zeta = k, 0 \leq \operatorname{Im}\zeta \leq h_k\}$, $0 \leq h_k < \infty$, $\omega_1(\infty) = \infty$, что $f(z) = \cos \pi\omega_1(z)$.

В условии в) под выражением $\cos \pi\omega_1(z)$ понимаем непосредственное аналитическое продолжение с $\mathbf{C}^+$ в $\mathbf{C}$ функции, определенной этой формулой в $\mathbf{C}^+$. Легко видеть, что h_k в условии в) и a_k в условии б) при соответствующем выборе b_0 связаны соотношением $a_k = (-1)^k \operatorname{ch} \pi h_k$. Определенный любым из условий а)-в) класс целых функций Ω_1 может быть также полностью описан [9] с помощью римановых поверхностей S_1, на которые $f \in \Omega_1$ отображают $\mathbf{C}$. Они похожи на риманову поверхность функции $\operatorname{Arccos} w$, но алгебраические точки ветвления первого порядка над ± 1, вообще говоря, отодвигаются по действительной оси от нуля. Отметим еще, что, хотя в условии б) априори $\alpha \geq 0$, из других ограничений следует, что $\alpha = 0$. Известно [8], что рост целой функции $f \in \Omega_1$ не превышает нормального типа первого порядка, а если нормальный тип первого порядка достигается, то f является целой функцией вполне регулярного роста ([10], с. 375). Известно ([11], гл. 8, п. 7; [6]), что у функций $f \in \Omega_1$ порядок может быть меньше единицы и даже равняться нулю. Для многих задач важно иметь критерии, позволяющие установить, что целая функция

$f \in \Omega_1$ имеет нормальный тип первого порядка. Для этого необходимо и достаточно, чтобы область D_1 имела угловую производную. Достаточность совершенно очевидна, а необходимость можно установить следующим образом. Используя теорему 4 из ([12], с. 125), теорему 4 из ([12], с. 205), последнюю формулу из п. 6 на с. 604 в [12], а также то, что все нули f действительны, получаем, что $\omega_1(z) = Az(1 + o(1))$, когда $z \to 0$, оставаясь внутри любого угла $\{z: \delta < \arg z < \pi - \delta\}$, $\delta > 0$, $A \neq 0$. Учитывая, что $\omega_1(\mathbf{C}^+) = D_1$, видим, что $0 < A < \infty$ и что D_1 имеет угловую производную.

В свою очередь, наличие или отсутствие угловой производной у D_1 можно установить с помощью теоремы 3 или 4 из раздела 4, где $h_n^{\pm} = h_{\pm n}$, $\alpha_n^{\pm}$ и $\beta_n^{\pm}$ определяются так же, как и в примере 1. Поскольку $h_k = (1/\pi) \operatorname{ar\,ch} |a_k|$, то необходимое и достаточное условие того, что $f \in \Omega_1$ имеет нормальный тип первого порядка, формулируется с использованием лишь последовательности $\left(|a_k|\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. модулей проекций алгебраических точек ветвления римановых поверхностей S_1.

В разных вопросах теории целых функций встречаются целые функции из класса L_2, ограниченные на действительной оси. Удобно считать, что $|f(x)| \leq 1$ при $x \in \mathbf{R}$. Комбинируя результаты Винберга [7] и Мак-Лейна [9], получаем эквивалентность таких условий:

г) $f \in L_2$ и $|f(x)| \leq 1$ при $x \in \mathbf{R}$;

д) $f \in L$, $f' \in L_2$; если $(b_k)_{-\infty}^{\infty}$ — неубывающая последовательность нулей f', $a_k = f(b_k)$, то или для всех $k \in \mathbf{Z}$ выполняется $0 \leq (-1)^k a_k \leq 1$, или для всех k выполняется $0 \geq (-1)^k a_k \geq -1$;

е) существует такое конформное однолистное отображение ω_2 области $\mathbf{C}^+(z)$ на $D_2 = \mathbf{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \{\zeta: \xi = m, -\infty < \eta \leq k_m\}$, $-\infty \leq k_m \leq 0$ (не все $k_m = -\infty$), $\omega_2(\infty) = \infty$, что $f(z) = \exp(-\pi i \omega_2(z))$.

В условии е) под выражением $\infty \in \partial D_2$ понимаем тот граничный элемент, к которому ведет путь по положительной части мнимой оси, а $\exp(-\pi i \omega_2(z))$ рассматриваем как целую функцию точно так же, как и в условии в). Легко видеть, что k_m в условии е) и a_m в условии д) при соответствующем выборе b_0 связаны соотношением $|a_m| = \exp(\pi k_m)$. Определенный любым из условий г)-е) класс целых функций Ω_2 может быть также полностью описан [9] с помощью римановых поверхностей S_2, на которые $f \in \Omega_2$ отображают $\mathbf{C}$. Как и в случае S_1, поверхности S_2 можно получить из римановой поверхности функции Arccos w, но алгебраические точки ветвления первого порядка над ± 1 не отодвигаются, а придвигаются к нулю, в частности, их проекции могут принимать нулевое значение. Если несколько последовательных точек ветвления сдвигаются в 0, то над нулем появляется точка ветвления порядка ≥ 2 (в [9] требуется, чтобы все нули f' были простыми, поэтому такая возможность исключается). Функции $f \in \Omega_2$ имеют рост не ниже нормального типа первого порядка (это сразу следует из условия г) и принципа Фрагмена-Линделефа ([12], с. 71)) и не выше нормального типа второго порядка. При этом, если функция

$f \in \Omega_2$ имеет нормальный тип первого порядка, то f является целой функцией вполне регулярного роста, что следует из известной теоремы Картрайт ([12], с. 317). Пример 2 из раздела 5 и условие е) позволяют дать критерий того, что целая функция $f \in \Omega_2$ имеет нормальный тип первого порядка. Для этого необходимо и достаточно, чтобы область D_2 имела угловую производную. Достаточность очевидна, а необходимость доказывается точно так же, как и для области D_1. Наличие угловой производной устанавливается на основе теоремы 5. Для использования этой теоремы достаточно знать последовательность (k_m) или, что равносильно, последовательность $(|a_m|)$.

Результаты, приведенные в п. 6, в основном представляют собой развитие и детализацию замечания 3 из статьи А. Э. Еременко и М. Л. Содина [13]. Мы воспользовались замечанием 3 с согласия авторов.

В заключение мы хотим поблагодарить А. Э. Еременко и М. Л. Содина, которые обратили наше внимание на этот круг задач и сделали ценные замечания.

Список литературы

1. *B. Rodin and S. E. Warschawski*, Extremal length and univalent functions.— Math. Z. (1977), v.153, № 1, p. 1—17.
2. *B. Rodin and S. E. Warschawski*, Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings.— Ann. acad. sci. fenn. Ser. AI. (1976), № 2. p. 467—500.
3. *J. A. Jenkins and K. Oikawa*, Conformality and semiconformality at the boundary.— J. reine und angew. Math. (1977), v. 291. p. 92—117.
4. *Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин*, Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций. В кн.: "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного". Физматгиз, Москва (1960), с. 111—165.
5. *Б. Я. Левин*, Связь мажоранты с конформным отображением. Ч. 2.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), т. 52, с. 3—33.
6. *А. А. Гольдберг*, О разветвленных значениях целых функций.— Сиб. мат. ж. (1973), т. 14, № 4, с. 862—866.
7. *Э. Б.* Винберг, Вещественные целые функции с предписанными критическими значениями.— В сб.: "Вопросы теории групп и гомологической алгебры". Ярославль (1989), с. 127—138.
8. *В. А. Марченко, И. В. Островский*, Характеристика спектра оператора Хилла.— Мат.сб., (1975), т. 97, № 4, с. 540—606.
9. *G. R. MacLane*, Concerning the uniformization of certain Riemann surfaces allied to the inverse-cosine and inverse-gamma surfaces.— Trans. Amer. Math. Soc. (1947), v. 62, № 1, p. 99—113.
10. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Науха, Москва (1970), 592 с.
11. *Г. Виттих*, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, Москва (1960), 320 с.
12. *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956), 632 с.
13. *A. E. Eremenko and M. L. Sodin*, Parametrization of entire functions of sine-type by their critical values.— Advances in Soviet Mathematics (1992), v. 11, p. 237—242.

Geometrical criteria of the existence of strip and angular derivatives for some classes of conformal mappings

O. E. Gentosh, A. A. Goldberg, and O. N. Moravetskaya

By means of the notions of Δ-envelope and Δ-kernel of a set the necessary and sufficient conditions for the existence of certain asymptotic for conformal mappings of simply connected domains of some classes onto half-strip or half-plane are obtained. Some applications to the theory of entire functions are indicated.