Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, 116–130 УДК 514

Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников

А. Д. Милка

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина АН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 1 октября 1993 г

Рассматривается новый вид непрерывного изгибания произвольных многогранников, линейное изгибание, при котором сохраняется их кусочно-линейное строение. Изучены характерные классы линейных изгибаний правильных многогранников. Устанавливается, что икосаэдр изгибается в пятилистное накрытие тетраэдра.

Розглядається новий вид неперервного згинання довільних многогранників, лінійне згинання, при якому зберігається їх кусочно-лінійна будова. Вивчено характерні класи лінійних згинань правильних многогранників. Встановлюється, що ікосаедр згинається в п'ятилистове накриття тетраэдру.

Если многогранник при изометрической непрерывной деформации сохраняет кусочно-линейное строение, то такую его деформацию естественно называть линейным изгибанием. Линейные изгибания как закритические деформации конструкций рассматриваются в приложениях. Задача о геометрическом исследовании линейных изгибаний многогранников исходит из работ Р. Коннелли (п. I). В данной статье изучаются линейные изгибания правильных выпуклых многогранников — строятся простейшие дискретные изометрии и соответствующие им линейные изгибания произвольного правильного многогранника (п. II), устанавливается перечень более общих элементарных дискретных изгибаний правильного тетраэдра (п.III), исследуется специальное линейное изгибание куба и находятся нежесткие в бесконечно малом его реализации (п. IV). При изучении специального изгибания куба попутно получаются новые конструктивные зависимости, в терминах некоторой группы преобразований, между правильными многогранниками. Устанавливается также, что икосаэдр допускает конечное изгибание на правильный тетраэдр, образуя его многолистное накрытие (п. V). Преобразованный икосаэдр относится к типу звездчатых архимедовых многогранников с кратными элементами. Не известно, достигается ли это накрытие тетраэдра каким-нибудь линейным изгибанием икосаэдра. Распределение нежестких многогранников, полнота систем изгибающих полей, вопросы нежесткости второго порядка малости при специальном линейном изгибании куба будут рассматриваться в продолжении этой статьи.

I. Введение

Р. Коннелли в работах [1] и [2], анализируя теоретические и прикладные задачи изометрических деформаций многогранников, приводит следующую качественную характеристику взаимной зависимости таких основных понятий, как жесткость, изгибаемость, разрушение.

© А. Д. Милка, 1994

"Неизгибаемость (и жесткость) представляет собой явление, очень близкое к реальности окружающего нас мира. Если для какой-либо структуры установлена ее неизгибаемость, то эту структуру всегда можно построить и посмотреть, каким будет процесс ее разрушения. Но теоремы покажут это лучше... С другой стороны, Г. Глюк показал, что шансы построить изгибаемую структуру наугад равны нулю [3]. Однако, результат Г. Глюка ничего не говорит о близости к изгибаемой структуре. Может случиться, что какая-нибудь структура построена близко (в смысле естественной топологии, как у Г. Глюка) к изгибаемой структуре, и тогда даже малая деформация элементов вначале приведет к явлениям, присущим изгибаемой структуре, и наша первоначальная структура либо развалится, либо деформация выйдет за допустимые пределы, даже если математически этого и не должно случиться (так как в математических теоремах длины ребер не предполагаются изменяющимися)".

Изгибанием многогранника обычно называют такое его преобразование, при котором грани вращаются вокруг ребер как твердые пластины (см. С. Э. Кон-Фоссен [5]). Фактически Р. Коннелли выдвигает гипотезу о существовании переходной деформации, отличной от обычного изгибания, для неизгибаемой структуры — близкой к изгибаемой или для структуры в неустойчивом положении. Если переходную деформацию рассматривать как один из видов разрушения, то можно вести речь о сопоставлении математического эквивалента с этим основным понятием. В такой интерпретации, оказывается, уже имеется вариант переходной деформации, изученный на практике — закритическая деформация структуры (см. Э. З. Жуковский, В. В. Шугаев [6], А. В. Погорелов [7]). Для многогранника закритическая деформация представляет собой изометрическое непрерывное по параметру кусочно-линейное преобразование. Будем называть его линейным изгибанием (это есть обобщение обычного изгибания), ниже дается развернутое определение. Примером структуры, "построенной близко к изгибаемой", является модель многогранника, о котором теоретически известно, что он изгибается. Абсолютно точной модель не строится, следовательно, по Г. Глюку, она должна быть неизгибаемой, но на этой модели "наблюдаются явления, присущие изгибаемой структуре". Вероятно, они действительно вызываются "малыми деформациями элементов" — линейным изгибанием построенного многогранника, локализованным в окрестности его ребер. Неизгибаемый многогранник, даже в модели, представляет собой структуру, заведомо удаленную от изгибаемой. Для его нетривиальной изометрической деформации локализованных линейных изгибаний уже недостаточно. Однако этот многогранник может испытывать и "деформацию, которая выйдет за допустимые пределы" — глобальное линейное изгибание в изменяющейся системе вершин и ребер, переводящее модель в равновесное положение или инициирующее практическое разрушение модели. Таким образом, например, для оценки устойчивости строительной конструкции может понадобиться информация не только о жесткости, но и о возможных при данных нагрузках ее линейных изгибаниях. Глобальные линейные изгибания представляют и самостоятельный интерес, позволяя находить новые реализации известных многогранных метрик, например, нежесткие в бесконечно малом многогранники; в п. IV находятся нежесткие реализации триангулированного куба.

Пусть M — многогранник в качестве двумерного метризованного многообразия. Линейным изгибанием M будем называть однопараметрическое семейство реализованных в пространстве многогранников, изометричных многограннику M, у которых при изменении параметра сетки ребер как точечные множества деформируются непрерывно, согласованно с изометрией M, и всюду по параметру, кроме изолированных его значений, комбинаторное строение многогранников локально сохраняется. Многогранники, отвечающие этим изолированным значениям параметра, назовем дискретными изометриями, или дискретными изгибаниями многогранника M. У близких многогранников семейства, имеющих одинаковое комбинаторное строение, сетки ребер в общем случае не соответствуют по изометрии.

В теории выпуклых поверхностей с линейными изгибаниями имеют дело при исследовании выпуклых многогранников с краем и бесконечных выпуклых многогранников (см. А. Д. Александров [8]). Изучение линейных изгибаний произвольных многогранников представляет, по-видимому, сложную задачу, так как речь идет в основном о невыпуклых их реализациях. К тому же, линейное изгибание многогранника существенно отличается и от обычного изгибания, и от общего непрерывного изгибания. Поэтому вначале естественно ограничиться правильными многогранниками — их линейные изгибания допускают удобное дополнительное, внутренне геометрическое исследование. На линейные изгибания можно распространить воспрос Р. Коннелли, ставившийся для обычных изгибаний регулярных поверхностей [1]: если замкнутый многогранник жесткий, то будет ли он при том же комбинаторном строении линейно неизгибаемым. В рассматриваемом специальном линейном изгибании куба все изометричные кубу многогранники, кроме трех исключительных, являются жесткими, у нежестких многогранников изгибающие поля и поля их линейных изгибаний независимы. Некоторые другие вопросы: любой ли многогранник в надлежащей триангуляции допускает линейное изгибание; каковы дискретные изгибания данного многогранника, соединяются ли линейным изгибанием каждые два изометричных многогранника; как связаны линейные изгибания многогранника с обычными, в том числе бесконечно малыми изгибаниями. Можно надеяться, что в проблематике по изометрическим деформациям многогранников, намеченной в работах Р. Коннелли [1], Г. Глюка [3], М. Х. Кейпера [4], эти вопросы окажутся небезынтересными. Частично эти вопросы и решаются в данной статье для правильных многогранников.

II. Простейшие линейные изгибания

Рассмотрим простейшие изгибания правильных выпуклых многогранников. Известна восьмиугольная звезда Кеплера, распадающийся многогранник, составленный из двух правильных тетраэдров, которые получаются при продолжении граней октаэдра (см. В. Г. Ашкинузе [9]). Видимая часть этого многогранника, представляемая как цельная поверхность, если в ней заменить выступающие пирамиды правильными пирамидами из прямоугольных треугольников, изометрична кубу и является его дискретным изгибанием — соответствующее линейное изгибание куба строится далее. По аналогии вводится дискретное изгибание любого правильного выпуклого многогранника P. Обозначим через $\overline{P}$ взаимный с P правильный многогранник. Примем, что ребро $\overline{P}$ равняется расстоянию в метрике P между центрами соседних граней. Построим на каждой грани $\overline{P}$, как на основании, обращенную во внешнюю сторону правильную пирамиду с боковым ребром, равным расстоянию от центра до вершины грани P. Объединение боковых поверхностей этих пирамид представляет собой дискретное изгибание P, т.е. изометричный P звездчатый без самопересечений многогранник P^*. При переходе к P^* каждая грань P гофрируется и преобразуется из плоского многоугольника в трех-, четырех- или пятиконечную пространственную звезду.

Теорема. *Многогранник P^* получается из многогранника P двумя различными линейными изгибаниями.*

Доказательство. Изгибания, которые будут построены, назовем простейшими линейными изгибаниями. Выберем в каждой грани P на каждом из отрезков, соединяющих вершины грани с ее центром, по точке A_t, которая делит этот отрезок, считая от вершины, в отношении $t:(1-t)$, $0<t<1$. Сместим каждую точку A_t по внешней нормали к грани так, чтобы пространственное расстояние между точками, примыкающими к одной вершине и к одному ребру, стало равным внутренне геометрическому расстоянию между ними на многограннике. Рассмотрим выпуклую оболочку смещенных точек. Гранями полученного выпуклого многогранника будут многоугольники, подобные и параллельные соответствующим граням P; прямоугольники, две противоположные стороны у которых параллельны соответствующим ребрам P; правильные трех-, четырех- или пятиугольники, соответствующие вершинам P. Построим теперь на каждом правильном многоугольнике, как на основании, обращенную во внешнюю сторону правильную пирамиду с боковым ребром, равным расстоянию от точки A_t до соответствующей вершины в грани правильного многогранника. И заменим в выпуклой оболочке все эти многоугольники боковыми поверхностями пирамид. Полученный невыпуклый многогранник P_t изометричен P. Можно принять, что $P_0 = \lim P_t$ при $t \to 0$ совпадает с P и $P_1 = \lim P_t$ при $t \to 1$ совпадает с P^*. Семейство многогранников $P_i \equiv \{ P_t \mid 0 \le t \le 1 \}$ представляет собой линейное изгибание многогранника P. Рассмотрим и другое линейное изгибание P, оно вводится формально двойственно к построенному. Выберем в каждой грани P на каждом из отрезков, соединяющих середины ребер с центром грани, по точке A_t, которая делит этот отрезок, считая со стороны ребра, в отношении $t:(1-t)$, $0<t<1$. Сместим каждую из точек A_t по внешней нормали к грани так, чтобы расстояние между точками, примыкающими к одному ребру, стало равным внутренне геометрическому расстоянию между ними на многограннике. Рассмотрим выпуклую оболочку смещенных точек. Гранями полученного выпуклого многогранника будут многоугольники, подобные и параллельные соответствующим граням P; второго типа многоугольники, соответствующие вершинам P. Построим на каждой грани второго типа, как на основании, обращенную во внешнюю сторону пирамиду с боковыми ребрами, равными расстоянию от точки A_t до вершины соответствующего ребра многогранника. И заменим в выпуклой оболочке все многоугольники второго типа боковыми поверхностями этих пирамид. Полученный невыпуклый многогранник P_t изометричен многограннику P. Можно принять, что $P_0 = \lim P_t$ при $t \to 0$ совпадает с P и $P_1 = \lim P_t$ при $t \to 1$ совпадает с P^*. Семейство многогранников $P_e \equiv \{ P_t \mid 0 \le t \le 1 \}$ представляет собой другое линейное изгибание многогранника P.

Теорема доказана.

Можно предполагать, что построенным линейным изгибаниям соответствуют закритические деформации после потери устойчивости тонкой выпуклой оболочки в форме правильного многогранника P , находящейся под равномерным внешним (P_e) или под равномерным внутренним (P_i) давлением.

В п. IV для куба находится еще одно линейное изгибание, переводящее куб в надстройку над октаэдром, с более сложной комбинаторной схемой у промежуточных многогранников.

Простейшие дискретные изометрии правильных выпуклых многогранников включаются в более общий класс элементарных дискретных изгибаний. Соединим отрезками центры граней правильного выпуклого многогранника P с его вершинами. Полученная система отрезков разбивает многогранник на четырехугольники, которые будем называть выпуклыми лепестками. Лепесток составляется из двух равнобедренных треугольников с общим основанием, ребром многогранника — ребром лепестка. Не принадлежащие ребру лепестка вершины треугольников назовем свободными вершинами лепестка, а боковые стороны треугольников — его сторонами. Аналогично, дискретное изгибание P^* многогранника P можно представлять как многогранник, образованный из вогнутых лепестков, обращенных вогнутостью в сторону многогранника. Вогнутый лепесток составляется из двух равносторонних треугольников с общим основанием — отрезком, соединяющим в метрике P центры соседних граней. Этот отрезок так же, как и для выпуклого лепестка, будем называть ребром вогнутого лепестка, вводя по аналогии стороны лепестка и его свободные вершины. Так как P и P^* изометричны, то преобразование многогранников $P \to P^*$ удобно интерпретировать как осуществляемое заменой каждого выпуклого лепестка P соответствующим вогнутым лепестком P^*. Тогда можно допустить и ситуацию, в которой многогранник P изометрически преобразуется в простой невыпуклый многогранник P^* , также составленный из лепестков, причем одна часть лепестков P заменяется выпуклыми, а другая часть лепестков P заменяется вогнутыми лепестками P^* . Будем называть такие преобразования элементарными дискретными изгибаниями правильного многогранника P, если они получены в результате некоторого линейного изгибания $P \to P^*$. При элементарном дискретном изгибании выпуклый лепесток P^* , обращенный выпуклостью в сторону многогранника, получается из лепестка P изменением двугранного угла при ребре лепестка. Вогнутый лепесток P^* получается внутренне геометрической перетриангуляцией соответствующего лепестка P и изометрическим переходом в новой триангуляции к лепестку с новым ребром. Можно также представить изгибание правильного выпуклого многогранника с таким переходом лепестков в лепестки, когда выпуклый лепесток преобразуется в вогнутый с сохранением или выпуклый лепесток преобразуется в выпуклый с перестройкой ребра лепестка. Реально, по-видимому, нет такого изгибания. Если эта гипотеза верна, то элементарные дискретные изгибания допускают более простое описание. В п. III решается задача о перечислении всех элементарных дискретных изгибаний правильного тетраэдра. Находятся в точности десять изометричных тетраэдру простых невыпуклых многогранников. Для других правильных многогранников задача остается неисследованной. Частный вопрос: существует ли элементарное дискретное изгибание икосаэдра, составленное из всех выпуклых и только одного вогнутого лепестков.

III. Изгибания тетраэдра

Найдем элементарные дискретные изгибания правильного тетраэдра.

Построим в гранях правильного тетраэдра T систему отрезков, соединяющих центры и вершины граней. Эта система разбивает тетраэдр на части, на шесть конгруэнтных лепестков, ребра которых служат ребрами тетраэдра. Пусть T^* — элементарное дискретное изгибание тетраэдра T. По изометрии многогранник T^* так же разбивается на лепестки, выпуклые или вогнутые. Каждый лепесток составляется из двух равных треугольников с общим основанием: выпуклый лепесток — из равнобедренных треугольников с углами при основании $\pi/6$, вогнутый лепесток — из равносторонних треугольников. Выделим характерные случаи взаимного расположения одноименных, только выпуклых или только вогнутых лепестков. Соседнее расположение — ребра двух лепестков имеют общую вершину; противоположное — ребрами двух лепестков являются противоположные ребра T^* ; центральное — общую вершину имеют ребра трех лепестков; циклическое — ребра трех лепестков образуют треугольник; винтовое расположение — ребра трех лепестков составляют незамкнутую ломаную. Число вогнутых или выпуклых лепестков может быть также принято как отличительное свойство конкретного дискретного изгибания тетраэдра T. Простейшее элементарное дискретное изгибание T^* составляется из шести вогнутых лепестков. Другие возможные комбинаторные варианты элементарных дискретных изгибаний тетраэдра, их всего девять, подразделяются на три группы. Один выпуклый лепесток, один вогнутый лепесток, три выпуклых и три вогнутых лепестка в циклических расположениях; два противоположных вогнутых лепестка, два противоположных выпуклых лепестка, три выпуклых и три вогнутых лепестка в центральных расположениях; два соседних выпуклых лепестка, два соседних вогнутых лепестка, три выпуклых и три вогнутых лепестка в винтовых расположениях. Все эти комбинаторные варианты реализуются в виде искомых многогранников.

Теорема. *Существуют точно десять элементарных дискретных изгибаний правильного тетраэдра.*

Доказательство. Представим себе правильный тетраэдр, разделенный его ребрами и медианами граней на 24 прямоугольных треугольника. В вершинах и центрах граней тетраэдра сходится по шесть таких треугольников, в серединах ребер — по четыре. Склеим модель тетраэдра с таким же комбинаторным строением и с шарнирными соединениями соседних треугольников по общим ребрам. При слабом нажатии на середину ребра модели ребро прощелкивает, и получается модель дискретного изгибания тетраэдра с одним вогнутым лепестком. С помощью такой деформации можно реализовать последовательно все десять изгибаний тетраэдра. Здесь допустимы и обратные деформации моделей, с уменьшением числа вогнутых лепестков, а также деформации с непосредственным переходом от одного дискретного изгибания к другому. Описанной наглядной конструкцией удобно воспользоваться, чтобы проследить все этапы доказательства рассматриваемой теоремы. Строгое доказательство существования многогранников, дискретных изгибаний тетраэдра, достаточно громоздкое. Поэтому далее изложение сокращено, опущены описания соответствующих линейных изгибаний и изучение формы многогранников. Эти изгибания строятся по аналогии с простейшими линейными изгибаниями тетраэдра из п. II. Аналитическое исследование существования многогранников выполняется только для вариантов многогранников из второй группы, для вариантов многогранников из первой и третьей групп приводится качественная аргументация. При построении дискретного изгибания будем исходить из естественного предположения о том, что внутренне геометрическая симметрия многогранника, в новой системе ребер, влечет за собой и пространственную симметрию. Это также упрощает поиск многогранников. Отметим, что первые два многогранника из второй группы имеют ту же комбинаторную структуру и ту же пространственную симметрию, что и плосконосый двуклиноид M_{25} из перечня правильногранных многогранников Джонсона–Залгаллера–Грюнбаума (см. В. А. Залгаллер [10]). Примем для определенности ребро тетраэдра T равным $\sqrt{3}$, тогда каждый из вспомогательных отрезков, т.е. ребро изгибания T^*, будет равен единице.

Рассмотрим первые два многогранника из первой группы. Каждый из них должен иметь плоскость симметрии, пересекающую многогранник по трапеции с единичными малым основанием и боковыми сторонами и с большим основанием, равным $\sqrt{3}$. Построим на большем основании симметрично плоскости трапеции равносторонние треугольники и соединим отрезками свободные вершины треугольников с вершинами меньшего основания. Существует положение треугольников, при котором соединяющие отрезки будут единичными. Этим определяется многогранник T^* с одним вогнутым лепестком, его ребро — меньшее основание трапеции. Многогранник T^* с одним выпуклым лепестком, его ребро — большее основание трапеции, находится аналогично, а именно: построением равносторонних треугольников на меньшем основании трапеции; дополнительно на этих треугольниках надстраиваются правильные тетраэдры. Третий многогранник из первой группы определяется соответствующим построением на сторонах одной грани правильного тетраэдра с единичными сторонами как на основаних трех равносторонних треугольников, одинаково наклоненных к плоскости этой грани, свободные вершины которых отстоят друг от друга на расстоянии $\sqrt{3}$.

Найдем дискретные изгибания тетраэдра, соответствующие комбинаторным вариантам многогранников из второй группы.

Два противоположных вогнутых лепестка. Из симметрии многогранника T^* следует, что ребра вогнутых лепестков взаимно ортогональны и они также ортогональны серединной прямой линии, проведенной через середины ребер. Обозначим через $2h$ расстояние между серединами ребер, α $(0 < \alpha < \pi/2)$ — наклоны в сторону от многогранника к серединной прямой линии каждого из треугольников, составляющих эти лепестки. Каждая вершина ребра (центр грани T) любого из лепестков соединяется с соответствующей ей свободной вершиной (вершиной грани T) единичным ребром многогранника T^*. Отсюда получаем первое уравнение, связывающее h и α. Чтобы найти второе уравнение, исходим из того, что свободные вершины этих противоположных лепестков соединяются между собой ребрами T^*, ребрами выпуклых лепестков, длиной $\sqrt{3}$. Рассмотрим полученную систему уравнений (для удобства используется обозначение $\beta \equiv \pi/3$ — угол при основании равностороннего треугольника, входящего в вогнутый лепесток):

$$(2h + \sin\beta\cos\alpha)^2 + (\sin\beta\sin\alpha - \cos\beta)^2 = 1,$$

$$(2(h + \sin\beta\cos\alpha))^2 + 2(\sin\beta\sin\alpha)^2 = 3.$$

Исключая из этой системы α, получаем следующее уравнение для $h \neq 0$ (значение $h = 0$ соответствует случаю вырожденного многогранника T^*):

$$h^2(64h^6 + 112h^4 + 25h^2 - 3) = 0.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение $h \approx 0{,}3$, которому соответствует единственное значение $\alpha \approx 65°$. Найденные значения h и α однозначно определяют многогранник T^*.

Два противоположных выпуклых лепестка. Построение этого многогранника аналогично предыдущему. В рассуждениях лишь меняются местами термины "центр грани T" и "вершина грани T", поэтому свободной вершиной, не вершиной ребра выпуклого лепестка, оказывается центр грани T. Все ребра T^*, соединяющие рассматриваемые вершины, ребра вогнутых лепестков, теперь единичной длины, что несколько меняет вид уравнений, связывающих h и α. Кроме того, α — наклон треугольника выпуклого лепестка к серединной прямой линии в сторону многогранника, $\beta = \pi/6$ — угол при основании этого треугольника. Система уравнений для h и α и уравнение для h, $h \neq 0$:

$$(2h - \sin\beta\cos\alpha)^2 + (\sin\beta\sin\alpha - \cos\beta)^2 = 1,$$

$$(2(h + \sin\beta\cos\alpha))^2 + 2(\sin\beta\sin\alpha)^2 = 1,$$

$$h^2(64h^6 + 80h^4 + h^2 - 9) = 0.$$

Отсюда получаем единственное положительное значение $h \approx 0{,}5$ и единственное значение $\alpha \approx 70°$, что определяет многогранник T^*.

Три вогнутых лепестка в центральном расположении. Своим строением многогранник T^* напоминает скошенную бипирамиду. Через вершины этой пирамиды, центр группы вогнутых и центр группы выпуклых лепестков, проходят шесть плоскостей симметрии многогранника. Эти плоскости через одну содержат ребра одноименных лепестков, соседние плоскости симметрии, составляющие двугранные углы по $\pi/3$, выделяют на многограннике конгруэнтные фигуры из двух смежных треугольников. Будем называть эти фигуры образующими многогранника T^*, в каждую из них входят треугольники разноименных лепестков — равносторонний и равнобедренный с углом при основании $\pi/6$. Пусть $\alpha\,(0 < \alpha < \pi/2)$ — больший и $\beta(0 < \beta < \pi/2)$ — меньший из углов наклонов сторон равностороннего треугольника к оси симметрии многогранника T^* в вершине на оси, $h = 2\cos\beta$ — расстояние между вершинами T^* на оси. Тогда, как и в предыдущих случаях, получаем систему уравнений для α и β:

$$\sin\beta\sin\alpha + 2\cos\beta\cos\alpha = 1, \qquad 2\cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha = 1.$$

Значение $\beta = 0$ соответствует случаю вырожденного многогранника T^*. Единственное решение этой системы с положительными значениями α и $\beta - \alpha \approx 72°$, $\beta \approx 28°$. Оно однозначно определяет многогранник T^*, при этом $h \approx 1{,}7$.

Рассмотрим многогранники третьей группы. Пусть T^* — дискретное изгибание тетраэдра T с тремя выпуклыми лепестками в циклическом расположении. Удалим из T^* один из этих лепестков. Изгибая полученный многогранник с краем, найдем положение, в котором расстояние между бывшими свободными вершинами удаленного лепестка, центрами граней T, станет равным единице. Этим определяется новый многогранник T^* как дискретное изгибание тетраэдра T с двумя выпуклыми лепестками в соседнем расположении. Многогранник T^* с двумя вогнутыми лепестками в соседнем расположении находится аналогично. Только в том же исходном многограннике удаляются три попарно соседние грани трех вогнутых лепестков, и одна из оставшихся граней, равносторонний треугольник, продолжается через свободное ребро до ромба. С помощью непрерывного изгибания этого многогранника с краем, при котором большая диагональ ромба остается прямолинейной, оказываясь ребром выпуклого лепестка, и получается искомый многогранник с двумя вогнутыми лепестками в соседнем расположении. Построим теперь многогранник — дискретное изгибание тетраэдра T — с винтовым расположением трех выпуклых лепестков. Для этого в качестве исходного используется многогранник T^* с тремя вогнутыми и тремя выпуклыми лепестками в центральных расположениях. Пусть A и B соответственно — лежащие на оси симметрии T^* центры группы выпуклых и группы вогнутых лепестков. Рассмотрим многогранник с краем, четырехугольником $ADBCA$, составленный из трех взятых последовательно образующих многогранника T^*. Считаем, что AC и BD — ребра, AD и BC — стороны соответственно выпуклого и вогнутого лепестков, α и β — пространственные углы в вершинах C и A соответственно между отрезками CA, CB и AC, AD. Обозначим еще через R и S внутренние четырехгранные вершины этого многогранника с краем — вершины ребер выпуклого и вогнутого лепестков. Будем непрерывно изгибать многогранник, изменяя двугранный угол при внутреннем ребре AR от 0 до π. Непосредственно устанавливается, что в начальном положении будет $\alpha > \beta$, в конечном положении будет $\alpha < \beta$, следовательно, существует промежуточное положение изгибаемого многогранника, в котором $\alpha = \beta$. Рассмотрим замкнутый многогранник, составленный из многогранника в этом промежуточном положении и симметричного ему многогранника относительно оси, проведенной через середины отрезков AC, BD. Этот замкнутый многогранник и есть дискретное изгибание тетраэдра T с винтовым расположением трех выпуклых лепестков. Ребрами лепестков служат отрезки RA, AC и CR'; R' — симметрия R относительно указанной оси. Многогранник имеет также винтовое расположение трех вогнутых лепестков с ребрами SB, BD и DS'; S' — симметрия S относительно указанной оси.

Теорема доказана.

IV. Изгибания куба

Рассмотрим куб B с ребром два и кубооктаэдр A с вершинами в серединах ребер куба. Гранями кубооктаэдра служат квадраты, расположенные в гранях куба, и равносторонние треугольники. Проводя в квадратах диагонали, триангулируем кубооктаэдр таким образом, чтобы он получил строение икосаэдра. Триангулированный квадрат из равных равнобедренных треугольников с общим основанием назовем лепестком, ребром и сторонами лепестка назовем проведенную диагональ и стороны квадрата, свободными вершинами назовем вершины, не принадлежащие ребру лепестка. Тогда кубооктаэдр A можно интерпретировать как многогранник, симметрично составленный из шести конгруэнтных лепестков, дополненных восемью равносторонними треугольниками. Построим новый многогранник $A(t)$, переместив параллельно ортогонально соответствующим граням куба на одну и ту же величину $(1 - t)/2$ от центра $(t > 1)$ или в сторону центра $(t < 1)$ куба B ребра всех лепестков кубооктаэдра и соединив в прежнем порядке перемещенные вершины. Многогранник $A(t)$ так же, как и кубооктаэдр, составляется из конгруэнтных, но уже не плоских, лепестков, полученных деформацией лепестков кубооктаэдра, и из равносторонних треугольников. При переходе к новому многограннику грани лепестка кубооктаэдра симметрично поворачиваются вокруг ребра, свободные вершины лепестка симметрично сближаются или удаляются, оставаясь в плоскости грани куба, равнобедренные треугольники, составляющие лепестка, метрически изменяются. Многограннику $A(t)$ относим в качестве параметра число $t = \pm \sqrt{2\mathrm{tg}^2\beta - 1}$, где β — угол при основании составляющего равнобедренного треугольника лепестка. Подробно семейство $\{A(t)\}$, точнее — семейство нормированных многогранников $\{\cos\beta\, A(t)\}$, изучается далее. Имеем: $A(1) \equiv A$ — кубооктаэдр; $A(-1)$ — сложенный кубооктаэдр, многогранник с совпадающими треугольниками лепестков, у которого равносторонние треугольники составляют октаэдр; $A(0)$ — шеддок с шестью клювами (под этим наименованием этот многогранник приводится в монографии М. Берже [11]). Многогранник $A(0)$ будем еще называть ортогональным шеддоком, поскольку у него все двугранные углы прямые, и будем называть шеддоком любой из многогранников $A(t)$. Шеддоками будем называть и нормированное семейство многогранников, полученных из $A(t)$ гомотетией относительно центра куба B: $\{S(t) \equiv \cos\beta \times A(t)\}$. Построим на каждом равностороннем треугольнике шеддока $A(t)$, как на основании, с наружной стороны правильную пирамиду из прямоугольных треугольников. Объединение боковых поверхностей этих пирамид и всех лепестков $A(t)$ есть изометричный кубу многогранник. Нормируем его так, чтобы он стал изометричным именно кубу B, и обозначим его через $B(t)$. Семейство многогранников $\{B(t) \mid -\infty < t < +\infty\}$ представляет собой линейное изгибание куба B. В этом семействе требуется найти нежесткие в бесконечно малом многогранники, и этот вопрос достаточно будет исследовать только для многогранников $A(t)$. Общий результат сформулируем предварительно.

Теорема. *В семействе $A(t)$ нежесткими первого порядка малости являются только многогранники: ортошеддок $A(0)$, сложенный кубооктаэдр $A(-1)$ и двенадцатиугольная звезда $A(-3)$ — невыпуклый многогранник с вершинами в серединах ребер куба B (такое наименование обусловлено естественной связью этого многогранника с восьмиугольной звездой Кеплера). Причем $A(-1)$ имеет точно три линейно независимых изгибающих поля, $A(0)$ и $A(-3)$ — по одному полю. Многогранник $B(0)$ — жесткий, два других соответствующих многогранника $B(-1)$ и $B(-3)$ — нежесткие второго порядка малости; у этих многогранников векторные поля деформаций в линейном и бесконечно малом изгибаниях независимы.*

Р. Коннелли установил [1], что выпуклый многогранник в любой триангуляции обладает жесткостью второго порядка малости. Примеры нежестких поверхностей $A(-1)$ и $A(-3)$ показывают, что требование выпуклости многогранника здесь по существу. Это дополняет названный результат Р. Коннелли.

Приведем аналитическое описание семейства многогранников $\{S(t)\}$. Шеддоки $A(t)$ определены как многогранники, получающиеся специальной деформацией из триангулированного кубооктаэдра A. Множество этих многогранников разбивается сложенным кубооктаэдром, у которого ребра лепестков проходят через центр куба B, на две связные компоненты — так, что в каждой компоненте многогранники непрерывно деформируются друг в друга, не принимая положения сложенного кубооктаэдра. Сопоставим конкретному шеддоку ориентированный угол α по следующему правилу: в компоненте, содержащей A и состоящей из простых многогранников, величина 2α — это внешний двугранный угол многогранника при ребре лепестка, здесь оказывается $-1 < t < \infty$, $0 < \alpha < 3\pi/4$; для сложенного кубооктаэдра $t = -1$, $\alpha = 0$; в дополнительной компоненте, состоящей из звездчатых с самопересечениями многогранников, α отрицательное, 2α равно по модулю двугранному углу многогранника при ребре лепестка, здесь оказывается $-\infty < t < -1$, $-\pi/4 < \alpha < 0$. Перейдем к нормированным шеддокам $\{ S(t) = \cos\beta\, A(t) \}$, у которых стороны лепестков единичной длины. Определим ориентированное расстояние h свободных вершин лепестка шеддока от биссекториальной плоскости лепестка равенством $h = \sin\beta \sin\alpha$. То же h — это ориентированное расстояние между ребрами лепестков и центром шеддока, центром куба B. Значит, для шеддока должно еще выполняться соотношение $\cos\beta = h + \sin\beta\cos\alpha$, связывающее длину ребра лепестка $2\cos\beta$ с величинами h и α. Тогда, выражая α и h в виде функции параметра β, получаем

$$\sin\alpha = (1+t)/2\mathrm{tg}\,\beta \quad \text{и} \quad \cos\alpha = (1-t)/2\mathrm{tg}\,\beta,$$
$$h = (1+t)\cos\beta/2, \qquad \mathrm{tg}\,\beta \ge 1/\sqrt{2}, \tag{*}$$

где $t = \pm\sqrt{2\mathrm{tg}^2\beta - 1}$ то же, что и для многогранника $A(t)$. При этом любому вещественному значению t обязательно соответствует некоторый шеддок $S(t)$, характеризующийся формулами (*).

Если $|t| \to \infty$, то шеддоки $S(t)$ и $S(-t)$ сходятся к одному и тому же октаэдру, к шеддоку с вырожденными лепестками с ребрами нулевой длины. Плоскости граней вырожденных лепестков, пределы при $|t| \to \infty$ плоскостей граней $S(t)$ и $S(-t)$, определяют выпуклый многогранник — ромбододекаэдр. Присоединим октаэдр к семейству шеддоков $S(t)$ как соответствующий значениям $t = \pm\infty$, $\beta = \pi/2$. Область задания пополненного непрерывного семейства $\{ S(t) \}$ — проективная прямая t или окружность $-\pi/4 \le \alpha \le 3\pi/4$; октаэдру сопоставляются значения $\alpha = -\pi/4$ и $\alpha = 3\pi/4$. Многогранник $B(\pm\infty)$, соответствующий предельному октаэдру, пополняет семейство $\{ B(t) \}$ и совпадает с найденным ранее в п. II дискретным изгибанием куба B. Только эта изометрия куба B получается иным линейным изгибанием.

Шеддоки $S(t)$ и $S(-t)$ назовем противоположными, эти шеддоки — изометричные многогранники. Будем считать, что $S(t)$ и $S(-t)$ представляют один и тот же многогранник, если они совмещаются движением; таковы шеддоки $S(-\infty) \equiv S(+\infty)$, или октаэдр $S(\pm\infty)$, который сам себе противоположен; естественно принять, что сам себе противоположен и ортошеддок $S(0)$. Перейдем от лепестка шеддока к другому лепестку с теми же сторонами, с ребром, соединяющим свободные вершины исходного лепестка. Полученный лепесток назовем смежным к первому. Заменим у шеддока $S(t)$ все лепестки смежными. Новый шеддок — он принадлежит рассматриваемому пополненному семейству $\{ S(t) \}$ — будем называть смежным к шеддоку $S(t)$. Так же, как и в случае противоположных шеддоков, здесь выделяются многогранники $S(t)$, которые сами себе смежные — триангулированный кубооктаэдр $S(1)$ и двенадцатиугольная звезда $S(-3)$. Причем для шеддока $S(0)$ смежным является шеддок $S(3)$ — он противоположный $S(-3)$; для шеддока $S(\pm\infty)$ смежным является сложенный кубооктаэдр $S(-1)$ — он противоположный $S(1)$. Соответствия шеддоков при $t = 0, \pm 3$ и $t = \pm\infty, \pm 1$ обобщаются на произвольные многогранники семейства $\{ S(t) \}$, выражая следующее групповое свойство преобразований перехода к смежному и противоположному многогранникам: *шеддоки, противоположные смежным к противоположным, смежны между собой.* Изложим это свойство подробно.

Обозначим через O и C преобразования перехода от конкретного шеддока к противоположному и к смежному, через E — преобразование шеддока в себя движением, в том числе тождественное преобразование. Рассмотрим преобразования шеддока, порожденные всевозможными произведениями преобразований E, O, C. Утверждается, что *этот набор преобразований образует нециклическую группу шестого порядка, изоморфную группе симметрий правильного треугольника, или диэдрической группе D_3* (см. Г. С. Коксетер [12]).

Действительно, среди этих преобразований имеется шесть различных E, O, C, OC, CO, OCO; E — групповая единица; $O^2 = C^2 = E$. И для доказательства группового свойства достаточно установить, что $(OC)^3 = E$, или $OCO = COC$. Проверим последнее соотношение для шеддока $S(t)$, у которого $t \neq 0, \pm 1, \pm 3, \pm\infty$. Можно считать, что $0 < t < 1$, так как среди рассматриваемых преобразований $S(t)$ существуют шеддоки с параметрами $0 < | t | < 1$. Перейдем от простых невыпуклых, с вогнутыми лепестками, противоположных шеддоков $S(t)$ и $S(-t) = OS(t)$, к смежным $CS(t)$ и $COS(t)$. Это уже будут выпуклые многогранники, у которых длины ребер лепестков и углы у оснований составляющих равнобедренных треугольников β_t и β_{-t} определяются соответственно равенствами

$$2\cos\beta_t = \cos\beta(1 + t) \quad \text{и} \quad 2\cos\beta_t = \cos\beta(1 - t).$$

Теперь перейдем от выпуклых к им противоположным шеддокам, звездчатым многогранникам $S_t = OCS(t)$ и $S_{-t} = OCOS(t)$. Они имеют те же углы β, β_t и β_{-t}, только отвечают отрицательным значениям t, вычисляемым по этим углам β: $t^+ = -\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta_t - 1}$ и $t^- = -\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta_{-t} - 1}$. Выпишем для них и соответствующие значения высот h

$$2h_t = \cos\beta_t(1 + t^+) \quad \text{и} \quad 2h_{-t} = \cos\beta_{-t}(1 + t^-),$$

которые тоже отрицательные. Отметим, что $\cos\beta = 2/(3 + t^2)$. Тогда непосредственно проверяются равенства, выполняющиеся при $0 < t < 1$:

$$\cos\beta_t(1 + t^+) = -\cos\beta(1 - t) \quad \text{и} \quad \cos\beta_{-t}(1 + t^-) = -\cos\beta(1 + t).$$

Эти равенства означают, что ребро лепестка любого из шеддоков S_t и S_{-t} равно по длине расстоянию между свободными вершинами лепестка другого из этих шеддоков. Поэтому S_t и S_{-t} — смежные шеддоки, $CS_t \equiv S_{-t}$. Значит, для преобразованных шеддоков имеет место конгруэнтность $COCS(t) \equiv OCOS(t) \sim CS_t \equiv S_{-t}$, а для самих преобразований выполняется равенство $COC = OCO$ — групповое свойство доказано. Таким образом, семейство $\{ S(t) \}$ расслаивается на циклы из шести многогранников, связанных между собой групповым свойством.

Пример. Групповым свойством объединяются многогранники, включающие в цикл как противоположные икосаэдр $S(\sqrt{5})$ и большой икосаэдр $S(-\sqrt{5})$. В этот же цикл входят и противоположные шеддоки $S(2+\sqrt{5})$ и $S(-2-\sqrt{5})$. Будем называть их соответственно шеддоком додекаэдра и противоположным шеддоком додекаэдра, поскольку плоскости лепестков этих многогранников определяют додекаэдр и большой додекаэдр. Противоположный шеддок додекаэдра $S(-2-\sqrt{5})$ и большой икосаэдр $S(-\sqrt{5})$ — смежные многогранники. Для икосаэдра $S(\sqrt{5})$ и шеддока додекаэдра $S(2+\sqrt{5})$ смежными являются соответственно шеддоки $S(2-\sqrt{5})$ и $S(-2+\sqrt{5})$. А эти шеддоки — противоположные (напомним — и изометричные), они дают необычную конструктивную зависимость между икосаэдром и додекаедром. Таким образом, имеем цикл из шести многогранников $S(t)$, связанных между собой групповым свойством. Многогранник $S(-2-\sqrt{5})$ просто получается из икосаэдра $S(\sqrt{5})$. Деформируем лепесток икосаэдра следующим образом. Примем его свободные вершины за вершины нового лепестка. За ребро нового лепестка примем ребро лепестка икосаэдра, противоположного исходному лепестку. Осуществим такую деформацию каждого лепестка икосаэдра и дополним соответственно систему новых лепестков до замкнутого многогранника восемью равносторонними треугольниками. Полученный многогранник, если его нормировать, совпадает с противоположным шеддоком додекаэдра $S(-2-\sqrt{5})$. Следует подчеркнуть, что шеддоки $S(2-\sqrt{5})$ и $S(-2+\sqrt{5})$ по метрике почти совпадают с ортошеддоком $S(0)$. У ортошеддока длина ребра лепестка равняется $\approx 1{,}633$. У многогранников $S(2-\sqrt{5})$ и $S(-2+\sqrt{5})$ длина ребра лепестка равняется $\approx 1{,}618$, у них $\beta = 36^\circ$; стороны всех лепестков у многогранников — единичной длины. Длины ребер сравниваемых многогранников, таким образом, отличаются всего на $\approx 0{,}015$, так что ортогональный шеддок и многогранники, смежные к икосаэдру и шеддоку додекаэдра — почти изометричные.

Рассмотрим теперь нежесткие многогранники из семейства $\{A(t)\}$. Найдем изгибающие поля шеддоков $A(-1)$, $A(0)$, $A(-3)$. Другие вопросы, связанные с изгибаемостью многогранников $A(t)$, будут изучены в продолжении данной статьи.

Сложенный кубооктаэдр А(−1). Пусть D — октаэдр, составленный из равносторонних треугольников многогранника $A(-1)$. Выберем одну диагональ d октаэдра и лепесток Δ, плоскость которого ортогональна d. Зададим в вершинах многогранника $A(-1)$ нетривиальное изгибающее поле τ следующим образом. В вершинах лепестка Δ поле τ — поле вращения вокруг прямой d с угловой скоростью ω; в остальных вершинах $A(-1)$ полагаем $\tau \equiv 0$; на ребра и грани многогранника $A(-1)$ поле продолжается по линейности. Таким образом, сложенный кубооктаэдр $A(-1)$ — нежесткая поверхность. Изложенным способом по трем различным диагоналям d октаэдра D с тремя различными угловыми скоростями ω строятся три независимых изгибающих поля многогранника $A(t)$.

Ортогональный шеддок А(0). В векторной системе координат с началом в центре куба B при $t>0$ противоположные шеддоки $A(t)$ и $A(-t)$ могут быть представлены уравнениями $r=r(X,t)$ и $r=r(X,-t)$, где X — переменные точки многогранников, соответствующие по изометрии. Построим полусумму и полуразность этих поверхностей по С. Э. Кон-Фоссену [5]:

$$2r(X) = r(X,t) + r(X,-t) \quad \text{и} \quad 2\tau(X,t) = r(X,t) - r(X,-t).$$

Так как исходные многогранники изометричны, то при изменении X формально вектор-полусумма $r(X)$ описывает некоторую поверхность, а вектор-полуразность $\tau(X,t)$ представляет ее изгибающее поле. В данном случае поверхность $r(X)$ не вырождается и совпадает с ортошеддоком $A(0)$, изгибающее поле $\tau(X,t)$ — линейное на гранях этого многогранника. Из аналитических свойств шеддоков (*) также следует, что векторное поле $\tau(X,t)$ постоянно по модулю во всех вершинах щеддока $A(0)$, оно равно $t/2$, а в свободных вершинах любого лепестка направлено одинаково — вдоль линии ребра смежного лепестка к середине или от середины этого ребра. Таким образом, $A(0)$ — нежесткая поверхность, имеющая нетривиальное изгибающее поле.

Двенадцатиугольная звезда А(-3). Пусть T^+ и T^- — взаимные правильные тетраэдры с вершинами в вершинах куба B, составляющие в объединении восьмиугольную звезду Кеплера. Изгибающее поле шеддока $A(-3)$ строится надлежащим перенесением в вершины равносторонних треугольников векторов изгибающего поля шеддока $A(0)$. Перенесенное поле во всех вершинах направлено вдоль ребер куба B либо к вершинам тетраэдра T^+ — это поле обозначим τ^+, либо к вершинам тетраэдра T^- — это поле обозначим τ^-. Поля τ^+, τ^- с точностью до постоянного сомножителя представляют одно нетривиальное изгибающее поле многогранника $A(-3)$, который, таким образом, является нежесткой поверхностью. Это поле порождается вращениями лепестков многогранника вокруг серединных линий ребер противоположных лепестков. Можно принять, с учетом допустимой нормировки, что векторы полей τ^+ и τ^-, отложенные в вершинах $A(-3)$, оканчиваются в соответствующих вершинах тетраэдров T^+ и T^-. Тогда многогранник $A(-3)$ можно интерпретировать как полученный некоторым преобразованием из восьмиугольной звезды. Действительно, пусть $r = r(x)$ — векторное уравнение $A(-3)$. Следуя С. Э. Кон-Фоссену [5], рассмотрим два изометричных многогранника, заданных уравнениями: $\{\,\tilde{T}^+ \mid r = r(X) + \tau^+(X)\,\}$ и $\{\,\tilde{T}^- \mid r = r(X) + \tau^-(X)\,\}$. Каждый из этих многогранников есть многолистное накрытие соответствующего тетраэдра $\tilde{T}^+$ и $\tilde{T}^-$. Изометрия $\tilde{T}^+ \longleftrightarrow \tilde{T}^-$ определяет изометрическое отображение на себя индуцированного многолистного накрытия звезды Кеплера. Тогда шеддок $S(-3)$, многогранник $r = r(X)$, получается из этого накрытия векторным суммированием аналогично тому, как был получен ортошеддок $A(0)$ из изометричных многогранников $A(t)$ и $A(-t)$. С учетом кратности накрытия восьмивершинная звезда Кеплера преобразуется в двенадцативершинный звездчатый многогранник — в двенадцатиугольную звезду $A(-3)$.

V. Изгибание икосаэдра

Накрытие $\tilde{T} \to T$ — трехкратное в вершинах и пятикратное на остальной части тетраэдра. Многогранник $\tilde{T}$, совпадая по месту с тетраэдром, изометричен икосаэдру и представляет его новую невыпуклую реализацию с сохранением граней. Его можно отнести к типу равноугольно полуправильных звездчатых архимедовых многогранников с кратными элементами [9]. Он строится геометрически следующим образом. Рассмотрим икосаэдр, его грань Δ и комбинаторную звезду Δ^* этой грани. Звезда Δ^* есть многогранник с краем, составленный из десяти равносторонних треугольников. Существует два изгибания Δ^* на правильный тетраэдр с основанием Δ: с четырехкратным накрытием основания и двукратным накрытием боковых граней тетраэдра, и с однократным накрытием основания тетраэдра и трехкратным накрытием боковых его граней. Теперь достаточно осуществить эти различные изгибания для комбинаторных звезд двух противоположных граней икосаэдра. И совместить построенные многогранники с одним и тем же тетраэдром. При одновременном совмещении по изметрии границ этих многогранников получаем замкнутый многогранник $\widetilde{T}$, реализующий накрытие икосаэдром правильного тетраэдра T. Не известно, достигается ли это накрытие икосаэдром правильного тетраэдра каким-нибудь линейным изгибанием.

Список литературы

1. *Р. Коннелли*, Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний.— В сб.: "Математика. Новое в зарубежной науке". Исследования по метрической теории поверхностей. Под ред. А. Н. Колмогорова, С. П. Новикова.— Мир, Москва (1980), т. 18, с. 228—237.
2. *Р. Коннелли*, Об одном подходе к проблеме неизгибаемости.— Там же, с. 164—209.
3. *Г. Глюк*, Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы.— Там же, с. 148—163.
4. *М. Х. Кейпер*, Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 по Роберту Коннелли.— Там же, с. 210—227.
5. *С. Э. Кон-Фоссен*, Изгибаемость поверхностей в целом.— В сб.: "Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом". Под ред. Н. В. Ефимова. Физматгиз, Москва (1959), с. 19—86.
6. *Э. З. Жуковский, В. В. Шугаев*, Основные положения расчета пространственных конструкций на прочность и устойчивость; оптимизация.— В кн.: "Современные пространственные конструкции (железобетон, металл, дерево, пластмассы): справочник"(Ю. А. Дыховичный, Э. З. Жуковский, В. В. Ермолов и др.). Под ред. Ю. А. Дыховичного, Э. З. Жуковского. Высш. шк., Москва (1991), с. 46—117.
7. *А. В. Погорелов*, Геометрические методы в нелинейной теории оболочек. Наука, Москва (1967), 250 с.
8. *А. Д. Александров*, Выпуклые многогранники. Гостехиздат, Москва (1950), 450 с.
9. *В. Г. Ашкинузе*, Многоугольники и многогранники.— В кн.: "Энциклопедия элементарной математики", т. 4, Геометрия. Под ред. В. Г. Болтянского, И. М. Яглома. Физматгиз, Москва (1963), с. 382—446.
10. *В. А. Залгаллер*, Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Записки научн. семинаров ЛОМИ, Ленинград (1966), т. 2, 222 с.
11. *М. Беже*, Геометрия, т. 1. Мир, Москва (1984), 560 с.
12. *Г. С. М. Коксетер*, Введение в геометрию. Наука, Москва (1966), 648 с.

Linear bendings of regular convex polyhedrons

A. A. Milka

A new type of continuous bending of arbitrary polyhedrons, called linear bending, such that the initial polyhedral structure is preserved, is considered. Typical classes of linear bendings of regular polyhedrons are studied. It is shown that an icosahedron is bent into a five-sheet cover on a tetrahedron.