Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, 139–148

УДК 517.9

К вопросу об оценке роста решений канонических почти периодических систем

Ф. С. Рофе-Бекетов

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина АН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 8 октября 1993 г.

Доказано, что если каноническая эрмитова почти периодическая система $2n$ дифференциальных уравнений имеет самосопряженную систему n линейно независимых п.п. решений, то любое другое решение имеет не более, чем линейный рост и соответствующую асимптотику. Для несамосопряженной системы двух уравнений получен родственный результат. Результаты применимы к системам уравнений типа Штурма–Лиувилля.

Доведено, що коли канонічна ермітова майже періодична система $2n$ диференціальних рівнянь має самоспряжену систему n лінійно незалежних м.п. розв'язків, то кожний інший розв'язок має не більш, ніж лінійний ріст і відповідну асимптотику. Для несамоспряженої системи двох рівнянь одержано близького результата. Результати застосовуються до систем рівнянь типу Штурма–Ліувілля.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений двух видов: каноническая эрмитова система

$$U' = A(t)U + B(t)V, \qquad V' = C(t)U - A^*(t)V, \tag{1}$$

где $B(t) = B^*(t)$, $C(t) = C^*(t)$ и $A(t)$ — $n\times n$-матричные функции (гамильтонова система), и несамосопряженная, вообще говоря, система двух скалярных уравнений

$$u' = a(t)u + b(t)v, \qquad v' = c(t)u + d(t)v, \tag{2}$$

где коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ не предполагаются вещественными; $-\infty < t < \infty$.

Для системы (1) важную роль играют решения $\big(U(t), V(t)\big)$, где U, V — $n\times n$-матричные функции, удовлетворяющие так называемым условиям самосопряженности и невырожденности:

$$U^*V - V^*U = 0, \qquad \det\,(U^*U + V^*V) \neq 0. \tag{$3_{1,2}$}$$

В силу (1) каждое из условий $(3_{1,2})$ выполняется при всех $t \in (-\infty, \infty)$, если оно выполнено при одном из значений $t = t_0$. Условие (3_2) означает, что матричное решение $\big(U(t), V(t)\big)$, состоящее из двух $n\times n$-матриц, представляет собою n линейно независимых векторных решений системы (1), которыми являются пары столбцов с одинаковыми номерами, принадлежащих матрицам $U(t)$ и, соответственно, $V(t)$. Отметим, что в канонической записи система (1) имеет вид

$$J\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & A^* \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обозначим через $C(t,s)$ матрицу Коши системы (1), т. е. $2n\times 2n$-матрицу, столбцы которой являются векторными решениями (4) и $C(s,s) = I_{2n}$. Ниже, говоря о почти периодических функциях, всюду имеем в виду функции, почти периодические по Бору, т.е. равномерно почти периодические. I_n — единичная $n\times n$-матрица.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты эрмитовой канонической системы* (1) *являются* $(n\times n)$*-матричными почти периодическими функциями. И пусть система* (1) *имеет матричное почти периодическое** *решение* $\big(U(t),V(t)\big)$, *удовлетворяющее условиям* $(3_{1,2})$, *где* U,V — $n\times n$*-матрицы. Тогда остальные* n *линейно независимых векторных решений системы* (1) *имеют не более, чем линейный рост при* $|\,t\,| \to \infty$ *и представимы матричным решением* $\big(Y(t),Z(t)\big)$ *той же системы* (1), *имеющим следующую асимптотику при нормирующем условии* $U^*Z - V^*Y = I_n$:

$$Y(t) = U(t)\big[K + o_n(1)\big]t - V(t)G(t),$$
$$Z(t) = V(t)\big[K + o_n(1)\big]t + U(t)G(t), \tag{5}$$

где $G(t) > 0$ — *почти периодическая эрмитова матрица-функция*

$$G(t) = \big(U^*(t)U(t) + V^*(t)V(t)\big)^{-1}, \tag{6}$$

$K = K^*$ — *постоянная матрица*

$$K = \lim_{|\,t\,| \to \infty} \frac{1}{t} F(t), \tag{7_1}$$

$$F(t) = \int_0^t G\big\{U^*(B + C)U - V^*(B + C)V - 4\mathrm{Re}\,\big[U^*(\mathrm{Re}\,A)V\big]\big\}G\,d\tau\,, \tag{7_2}$$

$o_n(1)$ — $n\times n$*-матрица с элементами порядка* $o(1)$, *одна и та же в обеих формулах* (5), *где* $|\,t\,| \to \infty$.

Теорема 2. *При условии теоремы* 1 *матрица Коши систем* (1), (4) *имеет асимптотику*

$$C(t,s) = \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} \big[K + o_n(1)\big] \big(- V^*(s), U^*(s)\big)(t - s) + O_{2n}(1), \tag{8}$$

где стремление элементов матрицы $o_n(1)$ *к нулю при* $|\,t - s\,| \to \infty$ *равномерно относительно* s ; $O_{2n}(1)$ — $(2n\times 2n)$*-матрица с ограниченными элементами.*

Замечание 1. В условиях теорем 1 и 2 можно отказаться от требования почти периодичности матрицы $V(t)$, если матрица $B^{-1}(t)$ существует и ограничена на всей оси, что эквивалентно требованию

$$\inf_t \,|\,\det B(t)\,| > 0\,, \tag{9}$$

* О возможности ослабления этого требования см. ниже замечание 1.

и если, кроме того, производные $B'(t)$, $A'(t)$ существуют и ограничены на оси, так как в этом случае почти периодичность матрицы $V(t)$ следует из почти периодичности матрицы $U(t)$.

Аналогично, если $C^{-1}(t)$ существует и ограничена вместе с производными $C'(t)$, $A'(t)$, то в условиях теорем 1 и 2 можно отказаться от требования почти периодичности $U(t)$, поскольку в этом случае она вытекает из почти периодичности $V(t)$.

Наконец, при одном лишь дополнительном условии (9) без требования дифференцируемости коэффициентов, в теоремах 1 и 2 требование почти периодичности $V(t)$ можно заменить требованием ограниченности $V(t)$ или $U'(t)$, так как и в этом случае $V(t)$ оказывается почти периодической, если почти периодична $U(t)$.

Доказательство замечания 1. При $\det B(t) \neq 0$ из (1) следует

$$V(t) = B^{-1}(t)U'(t) - B^{-1}(t)A(t)U(t), \tag{10}$$

$$(B^{-1}U')' - (B^{-1}AU)' = V' = CU - A^*B^{-1}U' + A^*B^{-1}AU, \tag{11}$$

$$U'' - (B'B^{-1} + A - BA^*B^{-1})U' - (C + BA^*B^{-1}A + A' - B'B^{-1}A)U = 0. \tag{12}$$

Из (9) и ограниченности A', B' следует ограниченность коэффициентов уравнения (12), а поэтому из ограниченности $U(t)$ следует ограниченность U' и U'' в силу обобщения леммы Эсклангона ([1], с. 98—99). Ограниченность U'' влечет за собой равномерную непрерывность U' на оси, что вместе с почти периодичностью U обеспечивает, как известно ([1], с. 9), почти периодичность U'. Отсюда, в силу (10), следует почти периодичность $V(t)$.

Если же коэффициенты системы дополнительно подчинены одному лишь условию (9), то из предположения об ограниченности $V(t)$, в силу (1) следует ограниченность V', обеспечивающая равномерную непрерывность V, которая, снова в силу (1), означает и равномерную непрерывность U', из которой вытекает почти периодичность U' и, в силу (10), почти периодичность $V(t)$. Замечание доказано в двух вариантах, аналогично рассматриваются остальные случаи.

Следствие 1. Пусть уравнение

$$-\left(P(t)X' + R(t)X\right)' + R^*(t)X' + Q(t)X = \lambda W(t)X \tag{13}$$

имеет $n\times n$-матричные почти периодические коэффициенты, причем

$$P^*(t) = P(t), \qquad Q^*(t) = Q(t), \qquad W^*(t) = W(t), \tag{14}$$

$$\inf_{-\infty < t < \infty} \left| \det P(t) \right| > 0, \tag{15}$$

и пусть при некотором вещественном $\lambda = \lambda_0$ это уравнение имеет почти периодическое $n\times n$-матричное решение $X(t)$, удовлетворяющее условиям

$$X^*PX' - X'^*PX = 0, \tag{16}$$

$$\det\left(X^{[1]*}X^{[1]} + X^*X\right) \neq 0, \tag{17}$$

где

$$X^{[1]} = PX' + RX \tag{18}$$

есть квазипроизводная, отвечающая операции (13).

Тогда, если существуют ограниченные производные $P'(t)$ и $R'(t)$ или если ограничена $X'(t)$, что эквивалентно ограниченности $X^{[1]}(t)$, то при том же значении $\lambda = \lambda_0$ уравнение (13) имеет матричное решение $Y(t)$, подчиненное условию $X^*Y^{[1]} - X^{[1]*}Y \equiv I$ и обладающее вместе со своей квазипроизводной $Y^{[1]}(t)$ следующими асимптотиками при $|t| \to \infty$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t)\left[K + o_n(1)\right]t - X^{[1]}(t)G(t),\\ Y^{[1]}(t) &= X^{[1]}(t)\left[K + o_n(1)\right]t + X(t)G(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где $G(t)$ и K определяются формулами (6), (7) с заменой в них

$$U(t) = X(t),\ V(t) = X^{[1]}(t), \tag{20}$$

а также

$$\begin{aligned} B(t) &= P^{-1}(t), \qquad A(t) = -P^{-1}(t)R(t),\\ C(t) &= Q(t) - \lambda_0 W(t) - R^*(t)P^{-1}(t)R(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Эти же замены (20), (21) в формулах (8), (7) дают асимптотику для матрицы Коши системы (13) при $|t - s| \to \infty$.

Доказательство следствия вытекает из того, что система (13) сводится к системе (1) в силу замен (20), (21).

Теорема 3. *Пусть коэффициенты несамосопряженной, вообще говоря, системы двух скалярных уравнений* (2) *являются почти периодическими функциями, и пусть* $\exp\left\{\int_0^t (a + d)d\xi\right\}$ *тоже почти периодична. Тогда, если система* (2) *имеет почти периодическое нетривиальное решение* $\big(u(t),v(t)\big)$, *то линейно независимое с ним решение* $\big(y(t),z(t)\big)$ *той же системы, подчиненное условию* $(uz - vy)\,|_{t=0} = 1$, *имеет следующую асимптотику при* $|t| \to \infty$:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t)[k + o(1)]t - v(t)\Delta_{\varphi}^{-1}(t)\exp\left\{\int_0^t (a + d)d\xi\right\},\\ z(t) &= v(t)[k + o(1)]t + \varphi(t)u(t)\Delta_{\varphi}^{-1}(t)\exp\left\{\int_0^t (a + d)d\xi\right\}, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\Delta_{\varphi}(t) = \varphi(t)\,|u(t)|^2 + |v(t)|^2, \tag{23}$$

$\varphi(t)$ — *произвольная почти периодическая, вместе со своей производной, функция (в частности, константа), причем*

$$\inf_t |\varphi(t)| > 0, \qquad |\arg \varphi(t)| < \pi - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \tag{24}$$

k — константа, не зависящая от выбора $\varphi(t)$,

$$k = \lim_{|t| \to \infty} \frac{1}{t} f(t),$$

$$f(t) = \int_0^t \Delta_\varphi^{-2}(\tau)\{\varphi \bar{u}^2(b\varphi + \bar{c}) - \bar{v}^2(\bar{b}\varphi + c) -$$

$$- 2\varphi\bar{u}\bar{v}\,\mathrm{Re}\,(a - d) - \varphi'\bar{u}\bar{v}\}\exp\left\{\int_0^\tau (a + d)d\xi\right\}d\tau. \tag{25}$$

Матрица Коши системы (2) $c(t,s)$ имеет равномерную относительно s асимптотику при $|t - s| \to \infty$:

$$c(t,s) = [k + o(1)]\begin{pmatrix} -u(t)v(s), & u(t)u(s) \\ -v(t)v(s), & v(t)u(s) \end{pmatrix}(t - s) + O_2(1). \tag{26}$$

Огрубляя (22), имеем:

$$y(t) = u(t)[k + o(1)]t + O(1), \qquad z(t) = v(t)[k + o(1)]t + O(1).$$

З а м е ч а н и е 2. Если $\inf |b(t)| > 0$, то в условиях теоремы 3 можно отказаться от требования почти периодичности $v(t)$, заменив его требованием ограниченности $v(t)$ или ограниченности $u'(t)$. А если, кроме того, производные $b'(t)$, $a'(t)$ существуют и ограничены, то никаких ограничений на $v(t)$ или на $u'(t)$ не требуется.

Д о к а з а т е л ь с т в о замечания 2 аналогично доказательству замечания 1.

С л е д с т в и е 2. Пусть скалярное, несамосопряженное, вообще говоря, уравнение

$$-(p(t)x' + r(t)x)' + s(t)x' + q(t)x = \lambda w(t)x \tag{27}$$

имеет почти периодические коэффициенты, причем $\inf |p(t)| > 0$, а $\exp\left\{\int_0^t (s - r)p^{-1}d\xi\right\}$ — почти периодична. И пусть при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ это уравнение имеет нетривиальное почти периодическое решение $x(t)$. Тогда, если существуют и ограничены производные $p'(t)$, $r'(t)$ или если ограничена $x'(t)$, то при том же значении λ уравнение (27) имеет решение $y(t)$, подчиняющееся условию $p(xy' - x'y)\big|_{t=0} = 1$ и обладающее вместе со своей квазипроизводной $y^{[1]} = py' + ry$ асимптотиками (22) со следующими заменами в них и в формулах (23), (25):

$$u(t) = x(t), \qquad v(t) = x^{[1]}(t) \equiv px' + rx, \qquad z(t) = y^{[1]}(t), \tag{28}$$

$$b(t) = p^{-1}(t), \qquad a(t) = -p^{-1}(t)r(t), \qquad d(t) = p^{-1}(t)s(t), \tag{29}$$
$$c(t) = q(t) - \lambda w(t) - p^{-1}(t)r(t)s(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2 следует из теоремы 3 в силу замен (28), (29), сводящих уравнение (27) к системе (2).

Прежде чем перейти к доказательству теорем 1-3, установим необходимые для этого формулы, которые позволяют по заданным решениям систем (1), (2) строить другие решения этих же систем $\big(Y(t),Z(t)\big)$, линейно независимые с исходными $\big(U(t),V(t)\big)$, обходясь без "сшивки" построенных решений в корнях или в точках вырождения $U(t)$. Кстати, для некоторых систем вида (1), (2) не исключено $U(t)\equiv 0$ при $\det V(t)\neq 0$. Формулы, которые мы строим, являются обобщением известной формулы Лиувилля–Остроградского

$$y(t) = u(t)\int_a^t u^{-2}(\xi)d\xi\,, \tag{30}$$

позволяющей по решению $u(t)$ уравнения Штурма–Лиувилля

$$-u'' + q(t)u = \lambda u \tag{31}$$

строить линейно независимое с ним решение $y(t)$ того же уравнения, а также обобщением ее матричного обобщения, приведенного в ([2], с. 456), и отличаются от этих известных формул тем, что подынтегральные выражения у нас непрерывны на оси всюду, в том числе и там, где $\det U(t) = 0$. Введение в наши формулы функционального или числового параметра $\varphi(t)$ позволяет получить из них выражения вида (30) предельным переходом по параметру. В следующих теоремах почти периодичность коэффициентов систем (1), (2) не предполагается.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты эрмитовой системы* (1) *являются матричными локально суммируемыми функциями,* $\big(U(t),V(t)\big)$ *— некоторое ее матричное решение, удовлетворяющее условиям* $(3_{1,2})$. *Тогда пара* $\big(Y(t),Z(t)\big)$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= U(t)F(t) - V(t)G(t),\\ Z(t) &= V(t)F(t) + U(t)G(t), \end{aligned} \tag{32}$$

где $G(t)$, $F(t)$ *определены формулами* (6), (7_2), *представляет собою другое матричное решение системы* (1), *удовлетворяющее условию* $U^*(t)Z(t) - V^*(t)Y(t) \equiv I$, *а также условиям вида* $(3_{1,2})$.

Доказательство является модификацией метода вариации постоянных. Будем искать функции F, G в (32), требуя, чтобы было

$$Y' = A(t)Y + B(t)Z, \qquad Z' = C(t)Y - A^*(t)Z \tag{1'}$$

и чтобы выполнялись прочие условия для (Y,Z). Продифференцируем почленно равенства (32) и приравняем полученные выражения для Y', Z' соответствующим правым частям (1'). В полученных уравнениях подставим вместо Y, Z их выражения (32), а вместо U', V' — их выражения (1). После приведения подобных членов имеем

$$\begin{aligned} UF' - VG' &= \Big[(B+C)U - 2(\operatorname{Re}A)V\Big]G,\\ VF' + UG' &= -\Big[(B+C)V + 2(\operatorname{Re}A)U\Big]G. \end{aligned} \tag{33}$$

Умножая слева обе части первого из уравнений (33) на U^*, а второго на V^*, и складывая оба уравнения, получим, используя (3_1),

$$(U^*U + V^*V)F' = \Big\{U^*(B+C)U - V^*(B+C)V - 4\operatorname{Re}\,[U^*(\operatorname{Re}A)V]\Big\}G. \tag{34}$$

Аналогично из (33) можно получить дифференциальное уравнение для G (линейное, однородное, не содержащее F), которым G определяется с точностью до матричного множителя и которому, в частности, удовлетворяет G, заданное (6). Однако можно проще (и однозначно) найти G из (32), умножая слева первое из этих уравнений на $-(V^*)$, а второе — на U^*, и складывая оба уравнения. В результате имеем, в силу условий теоремы,

$$I \equiv U^*Z - V^*Y = (U^*U + V^*V)G(t), \tag{35}$$

откуда для G следует (6). Теперь видно, что F (7_2) удовлетворяет уравнению (34), а поэтому Y, Z (32) при указанных в теореме F, G удовлетворяют системе (1) и в силу (35) другим утверждениям теоремы. Остается проверить лишь справедливость (3_1) для пары Y, Z, т.е. равенство $Y^*Z - Z^*Y = 0$. Однако оно непосредственно вытекает из (32) и (3_1) в силу (6) при $F = F^*$. (Подсчет особенно прост для $t = 0$ при $F(0) = 0$, что соответствует (7_2)). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Принятая в (7_2) нормировка $F(0) = 0$ эквивалентна условию

$$\left\{(Y^*Y + Z^*Z)(U^*U + V^*V)\right\}\Big|_{t=0} = I,$$

так как

$$Y^*Y + Z^*Z = F^*G^{-1}F + G$$

в силу (6), (32) и (3_1).

Теорема 5. *Пусть* $(u(t),v(t))$ — *произвольное нетривиальное решение системы двух скалярных уравнений* (2) *с локально суммируемыми комплекснозначными коэффициентами. Тогда пара* $(y(t),z(t))$:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t)f(t) - \bar{v}(t)g(t), \\ z(t) &= v(t)f(t) + \varphi(t)\bar{u}(t)g(t), \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$g(t) = \Delta_\varphi^{-1}(t)\exp\left\{\int_0^t (a + d)d\xi\right\},$$

$f(t)$, $\Delta_\varphi(t)$ *определены формулами* (25), (23), $\varphi(t) \neq 0$ — *произвольная непрерывная комлекснозначная функция, не принимающая чисто отрицательных значений, — представляет собою решение той же системы* (2), *линейно независимое с* $(u(t),v(t))$ *и удовлетворяющее условиям*

$$(uz - vy)\Big|_{t=0} = 1, \qquad \left\{(\varphi\,|\,y\,|^2 + |\,z\,|^2)(\varphi\,|\,u\,|^2 + |\,v\,|^2)\right\}_{t=0} = \varphi(0). \tag{37}$$

(Если $\operatorname{Im}\varphi(0) = 0$, то и обратно, условиями (37) нормировка $f(0) = 0$, принятая в (25), обусловлена однозначно.)

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 4, и мы его опускаем. Следует лишь иметь в виду, что для любых решений (u,v), (y,z) системы (2)

$$(uz - vy)(t) = (uz - vy)(0)\exp\left\{\int\limits_0^t (a+d)d\xi\right\}$$

по теореме Лиувилля–Остроградского.

С л е д с т в и е 3. При условиях теоремы 4 $(2n\times 2n)$-матрица Коши систем (1), (4) представима в виде

$$C(t,s) = \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} [F(t) - F(s)]\left(-V^*(s), U^*(s)\right) +$$
$$+ \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} G(s)\left(U^*(s), V^*(s)\right) + \begin{pmatrix} V(t) \\ -U(t) \end{pmatrix} G(t)\left(V^*(s), -U^*(s)\right), \tag{38}$$

а при условиях теоремы 5 2×2-матрица Коши системы (2) допускает представление

$$c(t,s) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}\left(-v(s), u(s)\right) [f(t) - f(s)] + \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}(\varphi(s)\bar{u}(s), \bar{v}(s))\,\Delta_\varphi^{-1}(s) +$$
$$+ \begin{pmatrix} \bar{v}(t) \\ -\varphi(t)\bar{u}(t) \end{pmatrix}\left(v(s), -u(s)\right)\Delta_\varphi^{-1}(t)\exp\left\{\int\limits_s^t (a+d)d\xi\right\}. \tag{39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. В силу теоремы 4 достаточно установить почти периодичность функции $G(t)$ (6), так как из нее следует и почти периодичность функции $F'(t)$ (34), являющейся подынтегральным выражением в (7_2), и применить теорему о среднем значении почти периодической функции ([1],с. 27). Чтобы доказать почти периодичность $G(t)$ (6), достаточно установить, что

$$\inf_t \det\left[U^*(t)U(t) + V^*(t)V(t)\right] > 0. \tag{40}$$

Но если допустить противное, т.е., что существует последовательность $t_j \in \mathbf{R}$ и последовательность нормированных векторов $h_j \in \mathbf{C}^n$ такая, что

$$h_j^*\left[U^*(t_j)U(t_j) + V^*(t_j)V(t_j)\right]h_j \to 0,$$

то получим

$$U(t_j)h_j \to 0, \qquad V(t_j)h_j \to 0.$$

В силу компактности единичной сферы в $\mathbf{C}^n$ можно выбрать из $\{h_j\}_1^\infty$ сходящуюся к некоторому вектору $h \in \mathbf{C}^n$, $|h| = 1$, подпоследовательность, которую снова обозначим $h_j \to h$. Тогда имеем

$$U(t_j)h \to 0, \qquad V(t_j)h \to 0,$$

откуда следует, в силу ограниченности коэффициентов системы (1), что найдется такая последовательность $N_j \to \infty$, что

$$\sup_{|t-t_j|<N_j}\left\{|U(t)h| + |V(t)h|\right\} \to 0\,.$$

Но это невозможно для ненулевой скалярной почти периодической функции $|U(t)h| + |V(t)h|$. Этим завершается доказательство (40) и теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 следует из представления (38) для матрицы Коши систем (1), (4) из почти периодичности $G(t)$ и $F'(t)$, установленной при доказательстве теоремы 1, и из теоремы о среднем значении почти периодической функции в ее усиленном варианте, в силу которой

$$F(t) - F(s) = (t - s)\left\{\frac{1}{t - s}\int_s^t F'(\xi)d\xi\right\} = (t - s)\left\{K + o_u(1)\right\}$$

равномерно относительно s при $|t - s| \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 выводится из теоремы 5 и из (39) аналогично доказательствам теорем 1 и 2. Отметим лишь, что независимость k от выбора $\varphi(t)$ следует из того, что первым из условий (37) решение (y,z) определяется с точностью до слагаемого вида $(u,v)\cdot\mathrm{const}$. Это соответствует определению $f(t)$ с точностью до аддитивной константы, которая не влияет на величину k в силу первой из формул (25).

З а м е ч а н и е 4. Теоремы 4 и 5 допускают переформулировку для самосопряженных систем (13) и несамосопряженных уравнений (27) второго порядка в силу замен (20), (21) или, соответственно, (28), (29).

Следует отметить, что операторы преобразования специального вида для матричных уравнений второго порядка (31), представляющие решения одних таких систем при всевозможных λ через линейные комбинации решений и их производных для систем с другим матричным потенциалорм при тех же λ, содержатся в ([3],гл. VI). Коэффициенты названных комбинаций зависят от λ лишь дробно-линейно.

Равномерная по λ на спектре оценка функции Коши самосопряженного скалярного уравнения (31) с конечно-зонным почти периодическим потенциалом получена в [4]. В значительно более простом случае оператора Хилла она была получена в [5]. Формулы типа (19_1) и (32_1) для скалярного уравнения (31) анонсированы в [6].

Список литературы

1. *Б. М. Левитан, В. В. Жиков*, Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд-во МГУ, Москва (1978), 205 с.
2. *Ф. Хартман*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, Москва (1970), 720 с.
3. *З. С. Агранович, В. А. Марченко*, Обратная задача теории рассеяния . Изд-во ХГУ, Харьков (1960), 268 с.
4. *Б. М. Левитан, А. Б. Хасанов*, Оценка функции Коши в случае конечнозонных непериодических потенциалов.— Функц. анализ и его прил. (1992), т. 26, № 2, с. 18—28.
5. *Ф. С. Рофе-Бекетов*, Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала.— Докл. АН СССР (1964), т. 156, № 3, с. 515—518.
6. *Ф. С. Рофе-Бекетов*, Константы типа Кнезера и эффективные массы для зонных потенциалов.— Докл. АН СССР (1984), т. 276, № 2, с. 356—359.

On the estimate of growth of solutions of the canonical almost periodic systems

F. S. Rofe-Beketov

It is proved that if the canonical Hermite almost periodic system of $2n$ differential equations has a self-adjoint system of n linearly independent a.p. solutions then every other solution has growth not more than linear and the corresponding asymptotics. For the nonselfadjoint system of two equations the similar result is obtained. The results are applied to the systems of equations of the Sturm–Liouville type.