Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 131–138

УДК 519.21

Распределение собственных значений некоторого класса случайных матриц в пределе их бесконечной размерности

Л. А. Пастур, М. В. Щербина

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина АН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 13 октября 1993 г.

Мы рассматриваем ансамбль случайных $n \times n$ матриц, который является обобщением ансамбля Хопфилда. Доказано, что распределение собственных значений этого ансамбля при $n \to \infty$ сходится по вероятности к неслучайному пределу, и найдено уравнение для этого предельного распределения.

Ми розглядаємо ансамбль випадкових $n \times n$ матриць, який є узагальненням ансамблю Хопфілда. Доведено, що розподіл власних значень цього ансамблю при $n \to \infty$ збігається за ймовірністю до невипадкової границі, та знайдено рівняння для цього граничного розподілу.

Рассмотрим ансамбль симметричных случайных матриц H_n порядка n , имеющих вид:

$$\left(H_n\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} f\left(x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\right), \tag{1}$$

где $f(x)$ — четная, 2π-периодическая, принадлежащая $L_2(-\pi,\pi)$, непрерывная в нуле функция с нулевым средним

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0\,, \tag{2}$$

а $x_i^{(k)}$, $i = 1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,s$, — независимые при разных i,k случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Матрицы такого вида возникают в статистической физике неупорядоченных систем, в частности, в теории спиновых стекол и нейронных сетей (см. [1] и приведенный там список литературы).

Пусть λ_m , $m = 1,\ldots,n$, есть собственные значения матрицы (1). Определим их нормированную считающую функцию (НСФ) следующим равенством:

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{\lambda_i \le \lambda} 1. \tag{3}$$

В настоящей работе устанавливается существование неслучайного предела этой функции при

$$n \to \infty, \qquad s \to \infty, \qquad \frac{s}{n} \to c \quad (0 < c < \infty) \tag{4}$$

и выводится функциональное уравнение, из которого этот предел может быть найден.

Простейшие случайные матрицы вида (1), отвечающие $f(x) = \cos x$, могут быть рассмотрены методом, предложенным в работе В. А. Марченко и Л. А. Пастура [2]. Чтобы исследовать общий случай, ниже мы используем основные идеи этого метода, хотя его техническое оформление будет несколько иным. Оно может оказаться полезным в ряде сходных задач.

Следуя [2], мы будем рассматривать не саму функцию (3), а взаимно однозначно с ней связанное ее преобразование Стильтьеса

$$g_n(z) = \int \frac{dN_n(\lambda)}{z - \lambda}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{5}$$

Тогда наш основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. *Последовательность нормированных считающих функций* (3) *матриц* (1)-(2) *при предельном переходе* (4) *сходится по вероятности к неслучайной функции* $N(\lambda)$ *в каждой точке ее непрерывности. Преобразование Стильтьеса*

$$g(z) = \int \frac{dN(\lambda)}{z - \lambda}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0 \tag{6}$$

этой функции, называемой интегрированной плотностью состояний (ИПС), *является решением следующего функционального уравнения*:

$$zg(z) = 1 + cf(0)g(z) + 2\pi^2 cg^2(z) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^2(p)}{1 - a(p)g(z)}, \tag{7}$$

где $a(p)$, $p = 1,2,\ldots$ *есть коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ —

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a(p)\cos px.$$

Уравнение (7) *однозначно разрешимо в классе функций, аналитических при невещественных* z *и таких, что* $\operatorname{Im} g(z) \operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда лишь конечное число коэффициентов Фурье функции $f(x)$ отличны от нуля, так что

$$f(x) = \sum_{p=1}^{m} a(p)\cos px. \tag{8}$$

Обозначим через $G(z) = (z - H_n)^{-1}$ резольвенту и через G_{ij} ее матричные элементы. Из соотношений (3), (5) и из спектральной теоремы следует, что

$$g_n(z) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} G(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_{ii}.$$

Следуя основной идее [2] (см. также [6]), выделим в матрице зависимость от случайного вектора $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$.

Лемма. *Если функция $f(x)$ в (1) имеет вид (8), то*

$$G_{ij} = G_{ij}^{(0)} + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2} a(p)d(p)\left(G^{(0)}c(p,\alpha)\right)_i\left(G^{(0)}c(p,\alpha)\right)_j + \tag{9}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{p,q=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} R(p,\alpha;q,\beta)\sqrt{|\,a(p)a(q)\,|}\,\left(G^{(0)}c(p,\alpha)\right)_i\left(G^{(0)}c(q,\beta)\right)_j,$$

где

$$c_i(q,1) = \cos qx_i^{(1)}, \qquad c_i(q,2) = \sin qx_i^{(1)},$$

$$d(q) = \left(1 - \frac{1}{2}\,a(q)g_n^{(0)}(z)\right)^{-1}, \quad g_n^{(0)}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,G^{(0)}(z)$$

и $G^{(0)}(z)$ есть резольвента матрицы

$$\left(H_n^{(0)}\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{s} f\left(x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\right), \tag{10}$$

отличающейся от исходной матрицы (1) *отсутствием в сумме слагаемого, отвечающего $k = 1$, а матрица $R = \left\{ R(p,\alpha;q,\beta) \right\}_{\substack{p,q=1,\dots,m\\ \alpha,\beta=1,2}}$ удовлетворяет условию*

$$\mathrm{E}\{\,\mathrm{tr}R^*R\,\} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}\left|\,R(p,\alpha;q,\beta)\,\right|^2 \le \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Im}\,z}\sum_{p=1}^{m}|\,a(p)\,|\right).$$

Здесь и дальше символ $\mathrm{E}\{\dots\}$ обозначает операцию математического ожидания относительно всех $x_i^{(k)}$, $i = 1,\dots,n$; $k = 1,\dots,s$.

Доказательство этой леммы будет приведено ниже, а сейчас мы воспользуемся ею, чтобы доказать теорему. Докажем сначала соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left\{\,|\,g_n(z) - \mathrm{E}\{\,g_n(z)\,\}\,|^2\right\} = 0, \tag{11}$$

показывающее, что при предельном переходе (4) флуктуации случайной величины $g_n(z)$ из (5) стремятся к нулю. Воспользуемся методом мартингал-разностей, предложенным в [4] (другой пример использования этого метода см. в [5]). Обозначим через $\mathrm{E}_k\{\dots\}$ операцию математического ожидания относительно случайных векторов $x^l = \left(x_1^{(l)},\dots,x_n^{(l)}\right)$, $l = 1,\dots,k$, и положим

$$h_0 = \mathrm{tr}\,G - \mathrm{E}_1\{\,\mathrm{tr}\,G\},$$
$$h_k = \mathrm{E}_k\{\,\mathrm{tr}\,G\} - \mathrm{E}_{k+1}\{\,\mathrm{tr}\,G\}, \qquad k = 1,\dots,s-1. \tag{12}$$

Тогда очевидно

$$g_n(z) = \mathrm{E}\{\,g_n(z)\,\} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{s-1} h_k$$

и, кроме того, при $i \ne k$

$$\mathrm{E}\{\,h_ih_k\,\} = 0\,.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{E}\left\{\left|\, g_n - \mathrm{E}\{g_n\}\,\right|^2\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{s-1}\mathrm{E}\{\,|\, h_k\,|^2\} \tag{13}$$

и поэтому достаточно проверить, что

$$\mathrm{E}\{\,|\, h_k\,|^2\} \le C < \infty\,,$$

где C не зависит от n и s в пределе (4). Но согласно неравенству Шварца

$$\mathrm{E}\{\,|\, h_k\,|^2\} = \mathrm{E}\left\{\left|\, \mathrm{E}_k\{\operatorname{tr} G - \mathrm{E}_{k+1}\{\operatorname{tr} G\}\}\,\right|^2\right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\left\{\left|\, \operatorname{tr} G - \mathrm{E}_{k+1}\{\operatorname{tr} G\}\,\right|^2\right\} \le 2\mathrm{E}\left\{\left|\, \operatorname{tr} G - \operatorname{tr} G^{(0)}\,\right|^2\right\}, \tag{14}$$

где $G^{(0)}$ есть резольвента матрицы (10), и последнее неравенство объясняется симметрией зависимости $\operatorname{tr} G$ от векторов $\mathrm{x}^{(1)},\dots,\mathrm{x}^{(s)}$. Чтобы оценить правую часть (14), воспользуемся формулой (9). Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\left|\, \operatorname{tr} G - \operatorname{tr} G^0\,\right|^2\right\} &\le \frac{2}{n^2}\mathrm{E}\left\{\left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2} a(p)d(p)\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha)\right)\right|^2\right\} + \\
&+ \frac{2}{n^2}\mathrm{E}\left\{\left|\sum_{p,q=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} R(p,\alpha;q,\beta)\sqrt{|\,a(p)a(q)\,|}\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),G^{(0)}\mathrm{c}(q,\beta)\right)\right|^2\right\} \le \\
&\le \frac{4}{(\operatorname{Im} z)^4}\left(\sum_{p=1}^{m}|\,a(p)d(p)\,|\right)^2 + \mathrm{E}\{\operatorname{tr} R^*R\}\left(\sum_{p=1}^{m}|\,a(p)\,|\right)^2 \le \text{const}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Поэтому из соотношений (13)-(15) следует (11).

Воспользуемся теперь формулой (9) для того, чтобы вычислить

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} f\left(x_i^{(1)} - x_j^{(1)}\right)\right\} &= \mathrm{E}\{g_n^{(0)}\}f(0) + \\
&+ \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{p,q=1}^{m} d(p)a(p)a(q)\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),\mathrm{c}(q,\beta)\right)\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),\mathrm{c}(q,\beta)\right)\right\} + \\
&+ \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{p_1,p_2,q=1}^{m}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta=1}^{2} a(q)\sqrt{|\,a(p_1)a(p_2)\,|}\; R(p_1\alpha_1;p_2\alpha_2)\,\times\right. \\
&\left.\times\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p_1,\alpha_1),\mathrm{c}(q,\beta)\right)\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p_2,\alpha_2),\mathrm{c}(q,\beta)\right)\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}\{\, g_n^{(0)} \}f(0) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 . \tag{16}$$

Так как $G^{(0)}$ не зависит от $x_i^{(1)}$, то

$$\mathrm{E}\left\{\sum\nolimits_1\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{p=1}^{m} a^2(p)d(p)\left(g_n^{(0)}\right)^2\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathrm{E}\left\{\sum\nolimits_2\right\} \le 8\,\mathrm{E}^{1/2}\{\mathrm{tr}\, R^* R\}\left(\sum_{p=1}^{m} |\, a(p)\,|\right)^4 \le \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{n}} . \tag{17}$$

Поэтому, воспользовавшись оценкой (15), из которой следует, что

$$\mathrm{E}\{\, |\, g_n - g_n^{(0)}\,|^2\} = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}\{\left|\ \mathrm{tr}\, G - \mathrm{tr}\, G^0\ \right|^2\} \le \frac{\mathrm{const}}{n^2} ,$$

на основании формулы (16) получим

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} f\left(x_i^{(1)} - x_j^{(1)}\right)\right\} = f(0)g_n + \sum_{p=1}^{m} \frac{a^2(p)g_n^2}{2 - a(p)g_n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) . \tag{18}$$

С другой стороны, в силу симметрии H_n относительно $\mathrm{x}^{(1)},\ldots,\mathrm{x}^{(s)}$ имеем

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} f\left(x_i^{(1)} - x_j^{(1)}\right)\right\} = \frac{1}{s}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\left(H_n\right)_{ij}\right\} = -\frac{1}{c} + \frac{z}{c}\,\mathrm{E}\,\{\, g_n \}. \tag{19}$$

В совокупности с (18) это дает

$$z g_n(z) = 1 + c f(0) g_n(z) + c\sum_{p=1}^{m} \frac{a^2(p)g_n^2(z)}{2 - a(p)g_n(z)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) . \tag{20}$$

Заметим теперь, что по теореме Хелли из последовательности функций $N_n(\lambda)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $N_{n_k}(\lambda)$. Пусть $N(\lambda)$ — предел этой подпоследовательности. Тогда $g_{n_k}(\lambda)$ сходится к $g(z)$-преобразованию Стильтьеса функции $N(\lambda)$. В силу (20) $g(z)$ является решением уравнения (7), причем аналитическим и с отрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости. Переписав уравнение (7) в виде

$$g(z) = \left(z - cf(0) - c\sum_{p=1}^{m} \frac{a^2(p)g(z)}{2 - \pi a(p)g(z)}\right)^{-1} ,$$

легко убедиться, что определяемая его правой частью операция над $g(z)$ сохраняет свойство $\mathrm{Im}\, g(z)\mathrm{Im}\, z < 0$, $\mathrm{Im}\, z \ne 0$. Поэтому, рассуждая по существу так же, как и в [2], можно установить однозначную разрешимость этого уравнения в классе функций, аналитических при $\mathrm{Im}\, z \ne 0$ и обладающих этим свойством. Отсюда и из взаимной однозначности соответствия между неубывающими функциями и их преобразованиями Стильтьеса вытекает сходимость всей последовательности $N_n(\lambda)$ к $N(\lambda)$ в указанном в теореме смысле. Это рассуждение завершает доказательство теоремы для функций вида (6). Чтобы перейти к произвольной четной функции из $L_2(-\pi,\pi)$, проверим, что

$$\mathrm{E}\left\{\left| g_n^{(1)}(z) - g_n^{(2)}(z) \right|\right\} \le \| f^1 - f^2 \|_{L_2} \frac{c}{(\mathrm{Im}\, z)^2}\,, \tag{21}$$

где $g_n^{(1,2)}(z)$ определяются формулами (5) и (1) для функций $f^{(1,2)}$. Действительно, в силу резольвентного тождества имеем

$$\mathrm{E}\left\{\left| g_n^{(1)}(z) - g_n^{(2)}(z) \right|\right\} = \mathrm{E}\left\{\left| \frac{1}{n} \operatorname{tr} G^{(1)}\left(H^{(1)} - H^{(2)}\right) G^{(2)} \right|\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\mathrm{Im}\, z\right)^2} \mathrm{E}^{1/2}\left\{\frac{1}{n} \operatorname{tr} \left(H^{(1)} - H^{(2)}\right)^2\right\} = \frac{c}{\left(\mathrm{Im}\, z\right)^2} \| f^1 - f^2 \|_{L_2}.$$

Это доказывает неравенство (21). Теперь, применяя теорему к отрезкам ряда Фурье произвольной функции из $L_2(-\pi,\pi)$ и пользуясь оценкой (21), несложно убедиться в справедливости теоремы в общем случае.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать лемму.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Мы проверим вначале формулу (9) для z с достаточно большой вещественной частью, а затем, пользуясь теоремой об аналитическом продолжении, распространим эту проверку на всю верхнюю полуплоскость. При $z > \| H_n \|$ справедливо представление

$$G_{ij} = Z^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} u_i u_j \exp\left\{ -\frac{z}{2}(u,u) + \frac{1}{2}(H_n u,u)\right\} du\,, \tag{22}$$

где нормировочная константа Z имеет вид

$$Z = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left\{ -\frac{z}{2}(u,u) + \frac{1}{2}(H_n u,u)\right\} du\,.$$

Воспользуемся формулой

$$\exp\left\{\frac{1}{2n} a(p)(c(p,\alpha),u)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv(p,\alpha) \exp\left\{ \sigma(p)\sqrt{|\,a(p)\,|} \left[(c(p,\alpha),u)v(p,\alpha) - \frac{v^2(p,\alpha)}{2}\right]\right\},$$

где $\sigma(p) = 1$, если $a(p) > 0$, и $\sigma(p) = i$, если $a(p) < 0$. Подставив ее в (22) и проинтегрировав вначале по $\prod du_i$, а затем по $\prod dv(p,\alpha)$, получим представление

$$G_{ij} = G_{ij}^{(0)} + \frac{1}{n} \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sigma(p)\sigma(q)\sqrt{|\,a(p)a(q)\,|}\, V(p,\alpha;q,\beta) \times$$

$$\times\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha)\right)_i\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha)\right)_j, \tag{23}$$

где матрица $V=\left\{V(p,\alpha;q,\beta)\right\}_{\substack{p,q=1,\dots,m\\ \alpha,\beta=1,2}}$ определена соотношениями:

$$\left(V^{-1}\right)(p,\alpha;q,\beta)=\delta(p-q)\delta(\alpha-\beta)-\sigma(p)\sigma(q)\sqrt{|a(p)a(q)|}\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),\mathrm{c}(q,\beta)\right)=$$

$$=\delta(p-q)\delta(\alpha-\beta)/d(p)+\Delta(p,\alpha;q,\beta),$$

$$\Delta(p,\alpha;q,\beta)=\frac{1}{n}\sigma(p)\sigma(q)\sqrt{|a(p)a(q)|}\left[\left(G^{(0)}\mathrm{c}(p,\alpha),\mathrm{c}(q,\beta)\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i,j=1}^{n}G^{(0)}_{ij}\mathbf{E}\left\{c_i(p,\alpha)c_j(q,\beta)\right\}\right].$$

Заметим, что из формул (22), (23) следует, что для всех $\mathrm{t}\in\mathbf{C}^{2m}$

$$\left|\sum_{p,q=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}V(p,\alpha;q,\beta)\,t(p,\alpha)\,\overline{t}\,(q,\beta)\right|=$$

$$=Z^{-1}\left|\int\left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}v(p,\alpha)t(p,\alpha)\right|^2\exp\left\{-\frac{z}{2}(u,u)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}v^2(p,\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}\sigma(p)\sqrt{\frac{|a(p)|}{n}}\left(c(p,\alpha),u\right)\right\}du dv\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{p,q=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\sigma(p)\,\overline{\sigma(q)}\sqrt{|a(p)a(q)|}\left(G\,\mathrm{c}\,(p,\alpha),G\,\mathrm{c}\,(q,\beta)\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}|t^2(p,\alpha)|\le\left(1+\frac{\sum_{p=1}^{m}|a(p)|}{\operatorname{Im}z}\right)\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{2}|t^2(p,\alpha)|\right).$$

Поэтому

$$\|V\|\le\left(1+\frac{1}{\operatorname{Im}z}\sum_{p=1}^{m}|a(p)|\right). \tag{24}$$

Обозначим через R матрицу вида $R-D$, где матрица D определена соотношениями

$$D(p,\alpha;q,\beta)=\delta(p-q)\delta(\alpha-\beta)d(p)\,.$$

Воспользуемся теперь резольвентным тождеством для оценки

$$\mathbf{E}\left\{\mathrm{tr}\,R^*R\right\}=\mathbf{E}\left\{\mathrm{tr}\,V^*(V^{-1}-D^{-1})^*D^*D(V^{-1}-D^{-1})V\right\}\le$$

$$\leq \| V \|^2 \| D \|^2 \, \mathrm{E} \left\{ \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left| \Delta(p,\alpha;q,\beta) \right|^2 \right\}.$$

В силу оценки (24) получим

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{tr}\, R^* R\right\} \leq \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\sum_{p=1}^{m} | a(p) |}{\mathrm{Im}\, z} \right)^6 \sum_{i,j=1}^{n} \left| G_{ij}^{(0)} \right|^2 (\mathrm{Im}\, z)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Im}\, z} \sum_{p=1}^{m} | a(p) | \right)^6 .$$

Эта оценка завершает доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы.

Список литературы

1. *M. Mezard, G. Parisi, and M. Virasoro*, Spin glass theory and beyond. World Scientific, Singapore (1987), 253 p.
2. *V. A. Marchenko and L. A. Pastur*, Distribution of Eigenvalues for Some Sets of Random Matrices .—Mat. Sbornik (1991), v. 72, № 4, p. 457—483.
3. *Л. А. Пастур*, О спектре случайных матриц.— Теор. и мат. физ. (1972), т. 10, № 1, с. 102—112.
4. *В. Л. Гирко*, Спектральная теория случайных матриц. Наука, Москва (1988), 375 с.
5. *L. A. Pastur and M. V. Shcherbina*, The Absence of Selfaveraging of Order Parameter in the Sherrington–Kirkpatrick Model.— J. Stat. Phys. (1991), v. 61, p. 1—19.
6. *A. M. Khorunzhy, B. A. Khoruzhenko, L. A. Pastur, and M. V. Shcherbina*, The Large-n Limit in Statistical Physics and the Spectral Theory of Disordered Systems. In: "Phase Transitions and Critical Phenomena". Ed. by C. Domb and J. Lebowitz. Academic Press, London (1992), v. 15, p. 73—239.

Eigenvalue distribution for a certain class of random matrices in the limit of their infinite order

L. Pastur and M. Shcherbina

We consider the ensemble of random $n \times n$ matrices which is the generalization of the Hopfield ensemble. It is proven that the normalized eigenvalue counting function of this ensemble converges in probability to a nonrandom limit as $n \to \infty$ and the equation for this limiting distribution is found.