Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 149–167

УДК 517.958

Квазистатический вариант системы уравнений Кармана

И. Д. Чуешов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 15 октября 1993 г.

Исследована проблема существования и единственности решений задачи о нелинейных колебаниях упругой пологой оболочки в квазистатической постановке. Изучаются асимптотические свойства построенных решений. Доказано существование и конечномерность глобального аттрактора. Установлена его близость к аттрактору соответствующей задачи в динамической постановке с малым параметром при инерциальном члене.

Досліджена проблема існування та єдності розв'зків задачі про нелінійні коливання пружної пологої оболонки у квазістатичній постановці. Вивчаються асимптотичні властивості побудованих розв'язків. Доведено існування та скінченновимірність глобального аттрактора. Встановлена його близькість до аттрактора відповідної задачі у динамічної постановці з малим параметром при інерційному члені.

При изучении нелинейных колебаний упругой пологой оболочки в сверхзвуковом потоке газа возникает следующая система уравнений [1]:

$$\mu\partial_t^2 u + \varepsilon\partial_t u + \Delta^2 u - [u + f, v + \theta] + \rho\partial_{x_1} u = p(x), \tag{1}$$

$$u\,\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad u\,\Big|_{t=0} = u_0(x)\,, \qquad \partial_t u\,\Big|_{t=0} = u_1(x)\,, \tag{2}$$

где элемент $v = v(u)$ определяется как решение задачи

$$\Delta^2 v + [u + 2f, u] = 0\,, \qquad v\,\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{3}$$

Здесь Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, Δ^2 — бигармонический оператор, μ, ε — положительные числа, $x = (x_1, x_2)$.

$$[u, v] = \partial_{x_1}^2 u\partial_{x_2}^2 v + \partial_{x_2}^2 u\partial_{x_1}^2 v - 2\partial_{x_1x_2}^2 u\partial_{x_1x_2}^2 v\,. \tag{4}$$

В (1)-(3) величина $u(x,t)$ имеет смысл поперечного прогиба оболочки, $v(x,t)$ — функция напряжений. Параметр $\rho \ge 0$ определяется скоростью набегающего вдоль оси x_1 потока газа. Функции $f(x)$, $\theta(x)$, $p(x)$ считаются заданными. Отметим, что различные аспекты проблемы построения и исследования свойств решений задачи (1), (2) и некоторых ее модификаций обсуждались в [2-8].

В том случае, когда силы инерции малы по сравнению с силами сопротивления среды ($\mu \ll \varepsilon$), задачу о колебаниях оболочки естественно рассматривать в квазистатической постановке. Для этого в (1) следует положить $\mu = 0$, а в (2) опустить условие для начальной скорости. В результате получим следующую задачу:

$$\varepsilon\partial_t u + \Delta^2 u - [u + f, v(u) + \theta] + \rho\partial_{x_1} u = p(x), \tag{5}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \tag{6}$$

где элемент $v(u)$ определяется по u согласно (3).

В данной работе доказана теорема существования и единственности сильных решений задачи (5), (6) и изучается их асимптотическое поведение при $t \to \infty$. Показано, что система (5), (6) обладает глобальным (максимальным) аттрактором конечной хаусдорфовой размерности и установлена его близость к аттрактору системы (1), (2) при малых $\mu > 0$ (свойства аттрактора задачи (1), (2) исследовались в работе [7]).

Отметим, что в [8] аналогичные результаты получены для случая, когда в (1) и (5) вместо членов $\mu\partial_t^2 u + \varepsilon\partial_t u$ и $\varepsilon\partial_t u$ стоят соответственно слагаемые $(1 - \alpha\Delta)(\mu\partial_t^2 u + \varepsilon\partial_t u)$ и $\varepsilon(1 - \alpha\Delta)\partial_t u$, где $\alpha > 0$, Δ — оператор Лапласа. При $\alpha > 0$ энергетические априорные оценки являются более сильными, чем для $\alpha = 0$. Поэтому ситуация, рассмотренная в [8], значительно проще. В частности, при $\alpha > 0$ имеет место теорема существования и единственности слабых решений (при $\mu > 0$ см. [3,4], при $\mu = 0$ см. [8]) и нет необходимости для построения эволюционного оператора привлекать понятие сильного решения.

В дальнейшем, не нарушая общности, можно считать, что $\varepsilon = 1$.

§ 1. Предположения и вспомогательные леммы

Пусть Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, $H^s(\Omega)$ — соболевское пространство порядка s, $H_0^s(\Omega)$ — замыкание множества $D(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых и финитных функций по норме пространства $H^s(\Omega)$. Пусть также $\|\cdot\|_s$, $(\cdot,\cdot)_s$ — норма и скалярное произведение в $H^s(\Omega)$, $s \neq 0$. $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$. Все пространства считаются вещественными.

Ниже предполагается, что функции f и θ, входящие в (1), (3), (5), обладают свойствами:

$$f(x) \in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega), \qquad \theta(x) \in H^4(\Omega). \tag{1.1}$$

В последующих рассмотрениях важную роль играет следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Скобка $[u,v]$, определяемая равенством (4), задает непрерывное билинейное отображение из $H^2(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$. Трилинейная форма $([u,v],w)$ является симметрической на $H^2(\Omega)$, если хотя бы один из элементов u, v, w лежит в $H_0^2(\Omega)$. Имеют место оценки:*

$$\|[u,v]\|_{-j} \le C\|u\|_{2-\beta}\|v\|_{3-j+\beta}, \tag{1.2}$$

где $j = 1,2$, $0 < \beta < 1$;

$$\|[u,v]\|_{-j-\theta} \le C\|u\|_{2-\theta+\beta}\|v\|_{3-j-\beta}, \tag{1.3}$$

где $j = 0,2$, $0 < \beta \le \theta < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы, за исключением оценок (1.2) и (1.3), можно найти, например, в [3]. Установим (1.2) и (1.3). Прежде всего заметим [3], что скобку (4) можно представить в виде линейной комбинации выражений одного из видов: $D\left(Du\cdot D^2v\right)$, $D^2\left(Du\cdot Dv\right)$, $D^2\left(D^2uv\right)$, где D и D^2 — некоторые дифференциальные операторы первого и второго порядков.

Неравенство Гельдера дает

$$\left\| D\left(Du\cdot D^2v\right) \right\|_{-1} \le C \left\| Du \right\|_{L^{2p}} \left\| D^2v \right\|_{L^{2q}},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Используя непрерывность вложения $H^{1-\beta}(\Omega)$ в $L^{2/\beta}(\Omega)$ при $0<\beta\le 1$ (см. [9]), получаем для $\beta = 1/p$ оценку

$$\left\| D\left(Du\cdot D^2v\right) \right\|_{-1} \le C \left\| Du \right\|_{1-\beta} \left\| D^2v \right\|_{\beta},$$

где $0<\beta<1$. Точно так же доказывается, что

$$\left\| D^2\left(Du\cdot Dv\right) \right\|_{-2} \le C \left\| Du \right\|_{1-\beta} \left\| Dv \right\|_{\beta}.$$

Из этих неравенств вытекает оценка (1.2).

Доказательство (1.3) опирается на следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть Ω — гладкая ограниченная область, $0<s<1$, $0<\sigma<1-s$. Предположим, что $f\in H^{s+\sigma}(\Omega)$, $g\in H^{1-\sigma}(\Omega)$. Тогда произведение $f\cdot g$ лежит в $H^s(\Omega)$ и имеет место оценка*

$$\|f\cdot g\|_s \le C\|f\|_{s+\sigma}\|g\|_{1-\sigma}. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как Ω — гладкая ограниченная область, то существует непрерывный оператор p, действующий из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathrm{R}^2)$, такой, что $pu = u$ в Ω [10]. Кроме того, в данном случае норма в пространстве $H^s(\Omega)$ обладает свойством (см. [10]):

$$\|u\|_s \le C\inf\left\{\|u^*\|_{H^s(\mathrm{R}^2)}\right\},$$

где inf берется по всем функциям u^* из $H^s(\mathrm{R}^2)$ таким, что $u^*(x) = u(x)$ при $x\in\Omega$. Поэтому для доказательства леммы 1.2 достаточно установить неравенство (1.4) для $\Omega = \mathrm{R}^2$, предполагая, что $f,g\in C_0^\infty(\mathrm{R}^2)$.

Как известно [10], норму в $H^s(\mathrm{R}^2)$ при $0<s<1$ можно определить равенством

$$\|u\|_s^2 = \|u\|^2 + \int_{\mathrm{R}^2}\frac{dy}{|y|^{2+2s}}\int_{\mathrm{R}^2}|u(x+y)-u(x)|^2dx.$$

Поэтому неравенство Гельдера приводит к оценке

$$\|f\cdot g\|_s^2 \le \|f\cdot g\|^2 + 2\|f\|_{L^{2p_1}}^2\|g\|_{s,2q_1}^2 + 2\|g\|_{L^{2p_2}}^2\|f\|_{s,2q_2}^2, \tag{1.5}$$

где $1/p_j + 1/q_j = 1$, а $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в пространстве Бесова $B^s_{p,2}(\mathrm{R}^2)$, $0<s<1$ (см., например, [9]), определяемая равенством

$$\| w \|_{s,p} = \| w \|_{L^p} + \left(\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dy}{| y |^{2+2s}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^2} | w(x+y) - w(x) |^p dx \right)^{2/p} \right)^{1/2}.$$

Но пространство $H^r(\mathbf{R}^2)$ непрерывно вложено в $B^s_{p,2}(\mathbf{R}^2)$, если $r = 1 + s - 2/p$, $p > 2$ [9]. Поэтому

$$\| g \|_{s,2q_1} \le C \| g \|_{1+s-1/q_1},$$
$$\| f \|_{s,2q_2} \le C \| f \|_{1+s-1/q_2}.$$

Из непрерывности вложения $H^{1-\beta}(\mathbf{R}^2)$ в $L^{2/\beta}(\mathbf{R}^2)$ при $0 < \beta < 1$ вытекает, что

$$\| f \cdot g \| \le C \| f \|_\beta \| g \|_{1-\beta}, \qquad \| f \|_{L^{2p_1}} \le \| f \|_{1/q_1}, \qquad \| g \|_{L^{2p_2}} \le \| g \|_{1/q_2}. \quad (1.6)$$

Полагая теперь $\sigma = 1/p_2$, $s + \sigma = \beta = 1/q_1$, получаем из (1.5) оценку (1.4).

З а м е ч а н и е 1.1. Наряду с оценкой (1.4) в дальнейших рассмотрениях используется неравенство

$$\| f \cdot g \|_s \le C \| f \|_s \| g \|_{1+\delta}, \qquad 0 \le s \le 1, \qquad \delta > 0, \quad (1.7)$$

где $f \in H^s(\Omega)$, $g \in H^{1+\delta}(\Omega)$. При $s = 0$ оно вытекает из непрерывности вложения $H^{1+\delta}(\Omega)$ в $L^\infty(\Omega)$. Для его доказательства при $s = 1$ дополнительно привлекается соотношение (1.6). А в случае $0 < s < 1$ следует воспользоваться тем, что (1.5) остается в силе для $q_2 = 1$, $p_2 = \infty$, $q_1 = 1/s$.

Докажем теперь неравенство (1.3). Ясно, что

$$\left\| D^2 \left(Du \cdot Dv \right) \right\|_{-1-\theta} \le C \left\| Du \cdot Dv \right\|_{1-\theta}.$$

Поэтому в силу (1.4) имеем для $0 < \beta < \theta < 1$

$$\left\| D^2 \left(Du \cdot Dv \right) \right\|_{-1-\theta} \le C \left\| Du \right\|_{1-\theta+\beta} \left\| Dv \right\|_{1-\beta}.$$

Точно так же

$$\left\| D \left(Du \cdot D^2 v \right) \right\|_{-\theta} \le C \left\| Du \right\|_{1-\theta+\beta} \left\| D^2 v \right\|_{1-\beta}$$

Из этих оценок вытекает (1.3) при $0 < \beta < \theta < 1$.

Рассмотрим теперь случай $\beta = \theta$. Из непрерывности вложения $H^\theta(\Omega)$ в $L^{2/(1-\theta)}(\Omega)$ имеем, что $L^{2/(1+\theta)}(\Omega)$ лежит в $H^{-\theta}(\Omega)$. Поэтому

$$\left\| D^2 u \cdot D^2 v \right\|_{-\theta} \le C \left\| D^2 u \cdot D^2 v \right\|_{L^{2/(1+\theta)}}.$$

Применяя неравенство Гельдера с $p = 1 + \theta$, $q = (1 + \theta)/\theta$, получаем

$$\left\| D^2 u \cdot D^2 v \right\|_{-\theta} \le C \left\| D^2 u \right\| \left\| D^2 v \right\|_{L^{2/\theta}}.$$

Точно так же находим

$$\left\| D \left(D^2 u \cdot Dv \right) \right\|_{-1-\theta} \le C \left\| D^2 u \right\| \left\| Dv \right\|_{L^{2/\theta}}.$$

Из этих неравенств следует оценка (1.3) при $\beta = \theta$.

Таким образом, лемма 1.1 полностью доказана.

Отметим, что лемма 1.1 и некоторые ее варианты использовались автором в [5-8], однако полное доказательство публикуется впервые.

Лемма 1.1 позволяет установить следующие свойства функции напряжений v.

Лемма 1.3. *Для всех $u \in H_0^2(\Omega)$ задача* (3) *однозначно разрешима в $H_0^2(\Omega)$. Отображение $v = v(u)$ является непрерывным из $H_0^2(\Omega)$ в $\left(H^{3-\delta} \cap H_0^2\right)(\Omega)$, где $\delta > 0$. Для $0 < \delta < 1$, $0 \le \beta \le \delta$ справедливы оценки:*

$$\left\| v(u_1) - v(u_2) \right\|_{3-\delta} \le \tag{1.8}$$

$$\le C\left(1 + \left\| u_1 \right\|_{2-\beta} + \left\| u_2 \right\|_{2-\beta}\right) \left\| u_1 - u_2 \right\|_{2-\delta+\beta};$$

$$\| [u + f, v(u)] \|_{-\delta} \le C\left(1 + \| u \|_2^2\right) \| u \|_{2-\delta}; \tag{1.9}$$

$$\| [u + f, v(u)] \| \le C\left(1 + \| u \|_2^2\right) \| u \|_{2+\delta}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Как известно [10], оператор Грина G задачи Дирихле для бигармонического оператора в Ω при $s \ge -2$ отображает $H^s(\Omega)$ в $\left(H^{s+4} \cap H_0^2\right)(\Omega)$ и обладает свойством

$$\| Gh \|_{s+4} \le C \| h \|_s, \qquad h \in H^s(\Omega), \qquad s \ge -2. \tag{1.11}$$

Поэтому из леммы 1.1 вытекает однозначная разрешимость задачи (3) для $u \in H_0^2(\Omega)$. Для того чтобы установить (1.8), следует воспользоваться соотношением

$$\left[u_1 + 2f, u_1\right] - \left[u_2 + 2f, u_2\right] = \left[u_1 - u_2, u_1 + u_2 + f\right],$$

неравенством (1.11) и оценкой (1.3) при $j = 1$, $\theta = \delta$. Соотношение (1.9) вытекает из (1.3) при $j = 0, \theta = \beta = \delta$, а также оценок (1.11) и (1.8) для $u_1 = u$, $u_2 = 0, \beta = 0$. Для доказательства (1.10) заметим, что из (1.7) при $s = 0$ вытекает неравенство

$$\| [u,v] \| \le C \| u \|_2 \| v \|_{3+\delta}, \qquad \delta > 0. \tag{1.12}$$

Поэтому (1.10) следует из (1.11) и (1.3) при $\theta = \beta = 1 - \delta$, $j = 0$.

Нам понадобятся также следующие утверждения.

Лемма 1.4. *Пусть $u, w \in H_0^2(\Omega)$. Тогда справедливы оценки:*

$$\left| ([w,w],v^*) \right| \le C\left(1 + \| u \|_2\right) \| w \| \| \Delta w \|^2, \tag{1.13}$$

$$\left| ([w,w],v + \theta) \right| \le C\left(1 + \| u \|_2^2\right) \| w \|^{1/2} \| \Delta w \|^{3/2}, \tag{1.14}$$

где $v = v(u)$ находится из (3), *а величина $v^* = v^*(w,u)$ является решением задачи:*

$$\Delta^2 v^* + 2[u + f, w] = 0, \qquad v^* \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v^*}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.15}$$

Доказательство этого утверждения приведено в [7]. Оно опирается на лемму 1.1 и интерполяционное неравенство (см. [10]) вида

$$\| u \|_s \le C \| u \|^{1-s/2} \| \Delta u \|^{s/2}, \qquad 0 \le s \le 2, \tag{1.16}$$

где $u \in H_0^2(\Omega)$.

Лемма 1.5. *Пусть $v = v(u)$ определяется по $u \in H_0^2(\Omega)$ соотношением* (3). *Тогда для любых $B > 0$ и $\delta > 0$ функционал*

$$\Psi(u,B) = \| \Delta u \|^2 + (1/2) \| \Delta v(u) \|^2 - B \| u \|^2_{2-\delta}$$

ограничен снизу на $H_0^2(\Omega)$.

При $\delta = 1$ и $f(x) \equiv 0$ эта лемма установлена [5]. Ее доказательство для любых значений $\delta > 0$ и $f(x) \equiv 0$ сводится к дословному повторению рассуждений из [5]. Случай произвольных $f(x)$ с помощью леммы 1.1 сводится к ситуации, когда $f(x) \equiv 0$.

В дальнейшем символом $L^2(a,b;H)$ обозначается пространство квадратично интегрируемых на отрезке $[a,b]$ вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве H. Аналогичный смысл имеет обозначение $L^p(a,b;H)$ для $1 \le p \le \infty$.

§ 2. Существование решений

Слабым решением задачи (5), (6) на интервале $[0,T]$ называется функция $u(t)$ из пространства

$$W_T^1 = L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right),$$

являющаяся слабо непрерывной в $L^2(\Omega)$, удовлетворяющая соотношению (5) в смысле обобщенных функций и такая, что $u(0) = u_0$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и $p(x)$, $u_0(x)$ лежат в $L^2(\Omega)$. Тогда задача* (5), (6) *на любом интервале $[0,T]$ имеет слабое решение, обладающее свойством*

$$\| u(t) \|^2 + \int_0^t \left(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta v(u) \|^2 \right) d\tau \le \| u_0 \|^2 + Ct. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\{ e_k \}$ — базис собственных функций бигармонического оператора с условиями Дирихле на $\partial\Omega$. Определим приближенные решения задачи (5), (6) как функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) e_k(x),$$

удовлетворяющие для всех $j = 1,2,\dots,m$, $t \in [0,T]$, соотношениям

$$(\partial_t u_m, e_j) + (\Delta u_m, \Delta e_j) + \left(M(u_m), e_j \right) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь

$$M(u) = -[u + f, v(u) + \theta] + \rho \partial_{x_1} u - p(x). \tag{2.3}$$

Начальное условие $u_m(0)$ выбирается так, чтобы при $m \to \infty$ $\| u_m(0) - u_0 \| \to 0$.

Из леммы 1.1 вытекает, что

$$\left| \left(f, [u_m, v(u_m)] \right) \right| + \left| \left([u_m + f, u_m], \theta \right) \right| \le$$
$$\le (1/4) \| \Delta v(u_m) \|^2 + C_1 \| u_m \|_1^2 + C_2,$$

где $v(u)$ определяется по u согласно (3). Поэтому, используя симметрию скобки (4), из (2.2) с помощью леммы 1.5 получаем

$$\partial_t \| u_m(t) \|^2 + \| \Delta u_m(t) \|^2 + \| \Delta v(u_m) \|^2 \le C. \tag{2.4}$$

Отсюда следует

$$\| u_m(t) \|^2 + \int_0^t \left(\| \Delta u_m \|^2 + \| \Delta v(u_m) \|^2 \right) d\tau \le \| u_m(0) \|^2 + Ct. \tag{2.5}$$

Из (2.2) вытекает также, что для всех $h \in H_0^1(\Omega)$

$$(\partial_t u_m, h) = -(\Delta u_m, \Delta h) - \left(M(u_m), p_m h \right),$$

где p_m — ортопроектор на $\mathrm{Lin}\{ e_1, \dots, e_m \}$. Поэтому

$$\| \partial_t u_m \|_{-2} \le \| \Delta u_m \| + \| M(u_m) \|_{-2}.$$

Следовательно, из (1.2) имеем, что при $0 < \beta < 1$

$$\| \partial_t u_m \|_{-2} \le C \left(1 + \| \Delta u_m \| + \| u_m + f \|_{1+\beta} \| v(u_m) \|_2 \right).$$

Отсюда с помощью оценки (2.5) и интерполяционного неравенства (1.16) получаем соотношение

$$\int_0^T \left(\| \partial_t u_m(\tau) \|_{-2} \right)^p d\tau \le C_T,$$

где $p = 4/(3 + \beta)$, C_T — не зависит от m. Эта оценка вместе с соотношениями (1.8), (2.5) и теоремой Ю. А. Дубинского [11] (см. также леммы о компактности в [3]) позволяет доказать существование слабого решения. Неравенство (2.1) при этом вытекает из (2.5) и полунепрерывности норм относительно слабой сходимости.

З а м е ч а н и е 2.1. Из (2.4), для построенного в теореме 2.1 слабого решения, вытекает почти для всех $t > 0$ оценка

$$\| u(t) \|^2 \le \| u_0 \|^2 \exp\{ -\alpha t \} + C, \qquad \alpha > 0. \tag{2.6}$$

К сожалению, теорему единственности слабых решений для задачи (5), (6) доказать не удается. Поэтому при построении однозначного эволюционного оператора, как и в случае системы (1), (2) [7], удобно использовать понятие сильного решения.

Слабое решение $u(t)$ задачи (5), (6) называется сильным, если оно принадлежит классу

$$W_T^2 = L^\infty\left(0,T;\, H_0^2(\Omega)\right)\bigcap L^2\left(0,T;\left(H^4\bigcap H_0^2\right)(\Omega)\right).$$

Из оценки (1.10) вытекает, что для любого сильного решения $u(t)$ задачи (5), (6) справедливо соотношение

$$\partial_t u = -\left(\Delta^2 u + M(u)\right) \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Поэтому (см. [10], гл. 1, п. 3) сильные решения принадлежат классу $C\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right)$ сильно непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в $H_0^2(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), $p(x)$ *лежит в* $L^2(\Omega)$ *и* $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$. *Тогда задача* (5), (6) *на любом интервале* $[0,T]$ *имеет сильное решение. Это решение единственное.*

Доказательство. Рассмотрим галеркинское приближение $u_m(t)$, определяемое согласно (2.2). Умножим (2.2) на $\partial_t g_j(t)$ и просуммируем по j. В результате получим

$$\partial_t \Pi(u_m) + \|\partial_t u_m\|^2 + \rho\left(\partial_t u_m,\, \partial_{x_1} u_m\right) = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\Pi(u) = \Pi_0(u) - (1/2)\left([u + 2f,\, u],\theta\right) - (p,u), \tag{2.8}$$

$$\Pi_0(u) = (1/2)\|\Delta u\|^2 + (1/4)\|\Delta v(u)\|^2. \tag{2.9}$$

Из лемм 1.1 и 1.5 следует

$$\alpha_1 \Pi_0(u) - \beta_1 \le \|u\|^2 + \Pi(u) \le \alpha_2 \Pi_0(u) + \beta_2, \tag{2.10}$$

где α_j, β_j — положительные константы. Поэтому, прибавляя к (2.7) соотношение (2.4), легко обнаружить, что

$$\partial_t\left(\|u_m\|^2 + \Pi(u_m)\right) + \alpha\left(\|u_m\|^2 + \Pi(u_m)\right) + (1/2)\left\|\partial_t u_m\right\|^2 \le B,$$

где α, B — положительные числа. Отсюда вытекает, что

$$\|u_m(t)\|^2 + \Pi\left(u_m(t)\right) \le \left(\|u_m(0)\|^2 + \Pi\left(u_m(0)\right)\right)\exp\{-\alpha t\} + B/\alpha,$$

$$(1/2)\int_0^t \left\|\partial_t u_m\right\|^2 d\tau \le \left\|u_m(0)\right\|^2 + \Pi\left(u_m(0)\right) + Bt.$$

Эти оценки, а также неравенство (2.10), позволяют доказать существование слабого решения, обладающего свойствами

$$\Pi_0(u(t)) \le A_1 \Pi(u_0)\exp\{-\alpha t\} + A_2, \tag{2.11}$$

$$\int_0^t \| u(\tau) \|^2 d\tau \le A_3 \Pi(u_0) + A_4 + A_5 t\,, \tag{2.12}$$

где $A_j > 0$ — константы. Для того чтобы показать, что это решение является сильным, достаточно заметить, что имеет место оценка

$$\int_0^t \left\| u(\tau) \right\|_4^2 d\tau \le C(1+t)\left(1 + \Pi(u_0)\right)^4, \tag{2.13}$$

вытекающая из (5), (2.11), (2.12) и леммы 1.3.

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — сильные решения задачи (5), (6). Тогда функцию $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ можно рассматривать как решение линейной неоднородной задачи, и поэтому

$$\| w(t) \|^2 + 2\int_0^t \| \Delta w(\tau) \|^2 d\tau = \| w(0) \|^2 + 2\int_0^t F(\tau, u_1, u_2) d\tau, \tag{2.14}$$

где

$$F(\tau, u_1, u_2) = \left(M\left(u_2(\tau)\right) - M\left(u_1(\tau)\right), w\right).$$

Свойства симметрии скобки (4) позволяют показать, что

$$F(\tau, u_1, u_2) \le \left([\theta + \psi(u_1, u_2), w], w\right),$$

где

$$\psi(u_1, u_2) = -G\left([u_1, u_2] + [u_1 + u_2, f]\right),$$

G — оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического оператора в области Ω. Из (1.3) при $j = 1$, $\theta = \beta = \delta$ и интерполяционного неравенства (1.16) вытекает, что

$$\left([\psi, w], w\right) \le C \| \psi \|_2 \| w \|^{1/2} \| w \|_2^{3/2}.$$

Следовательно,

$$F(\tau, u_1, u_2) \le C\left(1 + \| \psi \|_2^4\right) \| w \|^2 + \| \Delta w \|^2.$$

Поэтому из (2.14) и леммы Гронуолла получаем соотношение вида

$$\| w(t) \| \le \| w(0) \| \exp\left\{ c\int_0^t \left(1 + \| \psi \|_2^4\right) d\tau \right\}. \tag{2.15}$$

Отсюда, в частности, вытекает единственность сильного решения задачи (5), (6).

З а м е ч а н и е 2.2. Опираясь на соотношение (2.15) и лемму 1.1, можно доказать также, что если $u_1(t)$ — слабое, а $u_2(t)$ — сильное решения задачи (5), (6) с одним и тем же начальным условием, то $u_1(t) \equiv u_2(t)$.

Сильные решения задачи (5), (6) обладают следующим свойством сглаживания начального условия.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено* (1.1), *причем* $p(x) \in H^1(\Omega)$. *Тогда для любого сильного решения* $u(t)$ *задачи* (5), (6) *справедлива оценка*

$$\left\| A^{1/2+\delta} u(t) \right\| \le C_R t^{-1/2}, \tag{2.16}$$

где $\| u_0 \|_2 \le R$, $0 < t \le 1$, $0 < \delta < 1/8$, $A = (\Delta^2)_D$ — *бигармонический оператор с условиями Дирихле на* $\partial\Omega$.

Доказательство. Умножим (2.2) на $t\lambda_j^{1+2\delta} g_j(t)$, где λ_j — собственные числа оператора A. После суммирования по j получим, что

$$\partial_t \left(t \left\| A^{1/2+\delta} u \right\|^2 \right) - \left\| A^{1/2+\delta} u \right\|^2 + 2t \left\| A^{1+\delta} u \right\|^2 + 2t \left(M(u), A^{1+2\delta} u \right) = 0$$

(для сокращения записи индекс m функции u_m временно опущен).
Отсюда следует

$$\partial_t \left(t \left\| A^{1/2+\delta} u \right\|^2 \right) \le \left\| A^{1/2+\delta} u \right\|^2 + t \left\| A^{\delta} M(u) \right\|^2 . \tag{2.17}$$

Оценим величину $\left\| A^{\delta} M(u) \right\|$. Так как область определения $D(A^{\delta})$ оператора A^{δ} совпадает с $H^{4\delta}(\Omega)$ при $\delta < 1/8$, то

$$\left\| A^{\delta} M(u) \right\| \le C \| M(u) \|_{4\delta} \le C \left(1 + \| u \|_2 + \| [u + f, v + \theta] \|_{4\delta} \right). \tag{2.18}$$

Но из леммы 1.2 вытекает, что

$$\| [u + f, v + \theta] \|_{4\delta} \le C \| u + f \|_{2+4\delta+\sigma} \| v + \theta \|_{3-\sigma},$$

где $0 < \sigma < 1 - 4\delta$. Поэтому оценки (2.11), (2.13) и (1.8) для $u_1 = u$, $u_2 = 0$, $\beta = 0$ приводят к выражению

$$\int_0^T \left\{ \left\| A^{1/2+\delta} (u) \right\|^2 + \| M(u) \|_{4\delta}^2 \right\} dt \le C(R,T),$$

при условии $\| u_0 \|_2 \le R$. Следовательно, интегрируя (2.17), находим

$$t \left\| A^{1/2+\delta} u_m(t) \right\|^2 \le C(R,T), \tag{2.19}$$

где $t \in (0,T)$, $\| u_0 \|_2 \le R$, $0 < \delta < 1/8$. Полунепрерывность норм позволяет в этом соотношении совершить предельный переход и доказать выполнение (2.16) почти для всех t.

Замечание 2.3. Если (2.2) умножить на $\lambda_j^{1+2\delta} g_j(t)$ и повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2.1, то можно доказать, что сильное решение $u(t)$ задачи (5), (6) с начальным условием u_0 из $D\left(A^{1/2+\delta}\right)$ при $\delta < 1/8$ допускает оценку

$$\left\| A^{1/2+\delta} u(t) \right\| \le C(R,T), \qquad t \in [0,T], \tag{2.20}$$

если $\left\| A^{1/2+\delta} u_0 \right\| \le R$. Из (2.20) и представления вида

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} M(u(\tau))d\tau \tag{2.21}$$

следует, что решение $u(t)$ является сильно непрерывным в пространстве $D\left(A^{1/2+\delta}\right)$ при $\delta < 1/8$. А из оценок (2.13), (2.15), (2.16) легко извлекается непрерывная в $D\left(A^{1/2+\delta}\right)$ зависимость решения от начального условия. Детали рассуждений мы опускаем (они, в основном, повторяют соответствующие выкладки из [12]).

Теорема 2.2, лемма 2.1 и замечание 2.3 позволяют установить следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть выполнено* (1.1) *и* $p(x) \in H^1(\Omega)$. *Тогда существует сильно непреывная по t нелинейная полугруппа S_t, $t \geq 0$, непрерывных отображений, действующая в каждом из пространств $H_\beta = H^{2+\beta}(\Omega)\bigcap H_0^2(\Omega)$ при $0 \leq \beta < 5/2$ и такая, что $S_t u_0 = u(t)$, где $u(t)$ — сильное решение задачи* (5), (6) *с начальным условием $u_0 \in H_\beta$. Эта полугруппа в пространстве H_β при $0 \leq \beta < 5/2$ обладает компактным поглощающим множеством, т.е. существует компакт K_β в H_β такой, что для любого ограниченного множества B из $H_\beta S_t B \subset K_\beta$ для $t \geq t_0(B)$.*

Доказательство. Из результатов интерполяции пересечений соболевских пространств [10] вытекает, что $D\left(A^{1/2+\delta}\right) = H^{2+4\delta}(\Omega)\bigcap H_0^2(\Omega)$, $\delta < 5/8$. Следовательно, при $\beta < 1/2$ утверждение теоремы вытекает из замечания 2.3, леммы 2.1, диссипативности (2.11) и компактности вложения H_β в H_γ при $\beta > \gamma$. При этом $K_\beta = S_1 B_R$, где B_R — шар радиуса $R = 1 + A_2/\alpha$ в прострaнствне H_0; A_2, α — константы из (2.11). Чтобы доказать утверждения теоремы для других значений β, воспользуемся (2.21). Очевидно, что

$$\begin{aligned}\left\|A^{1/2+\delta}u(t)\right\| &\leq \left\|A^{1/2+\delta}e^{-tA}u_0\right\| + \\ &+ C\int_0^t (t-\tau)^{-1/2-\delta+\gamma} e^{-\alpha t}\left\|A^\gamma M(u(\tau))\right\|d\tau,\end{aligned} \tag{2.22}$$

где $t \in [0,T]$, $0 \leq \delta < 5/8$, а величина $0 \leq \gamma < 1/8$ выбирается так, чтобы $1/2 + \delta - \gamma < 1$. Из (2.18) и (1.7) имеем

$$\left\|A^\gamma M(u)\right\| \leq C\left(1 + \|u\|_2 + \|u+f\|_{2+4\gamma}\|v+\theta\|_{4-\sigma}\right),$$

где $0 < \sigma < 1$. Поэтому из (1.3) получаем

$$\left\|A^\gamma M(u)\right\| \leq C\left(1 + \|u\|_{2+4\gamma}\right)^3.$$

Следовательно, из (2.22) и (2.20) вытекает, во-первых, что S_t отображает H_β в себя при $1/2 \leq \beta < 5/2$, а во-вторых, оценка вида

$$\left\|A^{1/2+\delta}u(t)\right\| \leq C_R\left(1 + t^{-\delta+\gamma}\right), \qquad 0 < t < 1,$$

при условии, что $\left\|A^{1/2+\gamma}u_0\right\| \le R$, $0<\gamma<1/8$, $1/8 \le \delta < 5/8$, $\delta - \gamma < 1/2$. Это обстоятельство позволяет завершить доказательство теоремы.

§ 3. Существование и свойства аттрактора

Этот параграф посвящен изучению асимптотических свойств эволюционной полугруппы S_t. Как известно, при обсуждении подобных вопросов важную роль играют аттракторы, исследование которых позволяет дать ответ на вопрос о возможных предельных режимах рассматриваемой системы. К настоящему времени выполнено значительное число работ, в которых изучаются свойства аттракторов для различных классов бесконечномерных систем (см. [13–18]) и приведенные там ссылки, а также работы [5–8], посвященные исследованию системы уравнений Кармана и некоторых ее модификаций).

Теорема 3.1. *Пусть выполнено* (1.1) *и* $p(x) \in H^1(\Omega)$. *Тогда полугруппа эволюционных операторов* S_t, *построенная по сильным решениям задачи* (5), (6), *обладает в каждом из пространств* $H_\beta = H^{2+\beta}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $0 \le \beta < 5/2$, *компактным глобальным аттрактором, т.е. существует компактное в* H_β *множество* A *такое, что* S_tA = A *и для любого ограниченного множества* B *из* H_β

$$\lim_{t\to\infty} \sup \left\{ \operatorname{dist}_{H_\beta} (S_t u, \mathrm{A}) : u \in B \right\} = 0.$$

Глобальный аттрактор как компактное множество в $L^2(\Omega)$ *имеет конечную хаусдорфову размерность (определение см., например, в* [15, 16]).

Доказательство. Существование аттрактора вытекает из теоремы 2.3 и результатов общего характера, изложенных, например, в [15–18]. Для того чтобы установить его конечномерность, рассмотрим уравнение в вариациях, отвечающее задаче (5), (6). Оно имеет вид

$$\partial_t w + \Delta^2 w + M'\left(u(t)\right) w = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $u(t)$ — решение задачи (5), (6), $M'\left(u(t)\right) w$ определяется равенством

$$M'(u(t))w = -\left[w, v(u)+\theta\right] - \left[u+f, v^*(u,w)\right] + \rho\partial_{x_1} w, \tag{3.2}$$

где $v = v(u)$ и $v^* = v^*(u,w)$ вычисляются согласно (3) и (1.15). Пусть $u(t)$ — траектория системы (5), (6), лежащая в аттракторе. Тогда из леммы 1.1 вытекает, что семейство операторов $L(t) = -\Delta^2 - M'\left(u(t)\right) w$ является ограниченным из $H_0^2(\Omega)$ в $H^{-2}(\Omega)$. Очевидно, что

$$\left(M'\left(u(t)\right) w, w\right) = -\left([w,w], v(u)+\theta\right) + (1/2)\left\|\Delta v^*(u,w)\right\|^2. \tag{3.3}$$

Пользуясь леммой 1.4 и ограниченностью аттрактора в $H_0^2(\Omega)$, легко обнаружить, что

$$\left(L(t)w,w\right) \le -(1/2)\,\|\Delta w\|^2 + C\,\|w\|^2.$$

Указанные свойства операторов $L(t)$ позволяют в случае, когда $u(t) \in \mathrm{A}$, построить эволюционное семейство, отвечающее задаче (3.1) и показать, что оно является производной Фреше вектор-функции $S_t u_0$ при $u_0 \in \mathrm{A}$. Таким образом, выполнены условия теоремы 5.2 из [13] с $\nu = 1/4$, $h(t) = C$. Поэтому аттрактор А имеет конечную хаусдорфову размерность как компактное множество в $L^2(\Omega)$.

Действуя так же, как в [16] или [17], можно установить конечность и фрактальной размерности аттрактора.

Замечание 3.1. В том случае, когда $\rho = 0$, функционал $\Pi(u)$, определяемый равенством (2.8), не возрастает вдоль траекторий системы (5), (6). Это позволяет воспользоваться результатами, представленными в [15], и доказать регулярность аттрактора (соответствующее определение см. в [15]).

Дальнейшие рассмотрения параграфа посвящены доказательству теоремы о близости аттракторов систем (1), (2) и (5), (6) при $\mu \to 0$.

Как известно [7], для задачи (1), (2) имеет место теорема существования и единственности сильных решений, позволяющая определить в пространстве $\mathrm{H} = \left(H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right) \times H_0^2(\Omega)$ сильно непрерывную нелинейную группу S_t^μ непрерывных отображения формулой $S_t^\mu y(0) = \left(u(t);\ \partial_t u(t)\right)$, где $u(t)$ — сильное решение задачи (1), (2) с начальными условиями $y_0 = (u_0;\ u_1)$. Эта группа диссипативна в $\mathrm{H}_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ [7], т.е. существует $R > 0$ такое, что для любого ограниченного в H множества B

$$S_t^\mu B \subset \left\{ y = \left(u_0;\ u_1\right) : \mu \| u_1 \|^2 + \| u_0 \|_2^2 \le R^2 \right\} \tag{3.4}$$

для всех $t \ge t(B,\mu)$. Незначительная модификация рассуждений, проведенных в [7], дает возможность показать, что радиус диссипативности R может быть выбран не зависящим от $\mu \in (0, \mu_0)$, где μ_0 — фиксированное число. Кроме того, если в (1), (2) сделать замену переменных $t = \tau \mu^{1/2}$, то можно воспользоваться теоремой 3 [7] и утверждать существование и конечномерность глобального $\left(\mathrm{H}, \mathrm{H}_w\right)$-аттрактора A_μ задачи (1), (2) для достаточно малых $\mu > 0$. Напомним, что ограниченное в H множество A_μ называется глобальным $(\mathrm{H}, \mathrm{H}_w)$-аттрактором, если $S_t^\mu \mathrm{A}_\mu = \mathrm{A}_\mu$ и для любого ограниченного в H множества B и любой слабой окрестности O множества A_μ найдется $t_0 = t_0(B, O)$ такое, что $S_t^\mu B \subset O$ при $t \ge t_0$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено* (1.1) *и* $p \in H^1(\Omega)$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{\mu \to 0} \sup \left\{ \mathrm{dist}(y, \mathrm{A}^*) : y \in \mathrm{A}_\mu \right\} = 0, \tag{3.5}$$

где A_μ *— глобальный* $\left(\mathrm{H}, \mathrm{H}_w\right)$*-аттрактор системы* (1), (2),

$$\mathrm{A}^* = \left\{ (z_0, z_1) : z_0 \in \mathrm{A},\ z_1 = -\Delta^2 z_0 - M(z_0) \right\},$$

А *— глобальный аттрактор задачи* (5), (6), $\mathrm{dist}(y, \mathrm{A})$ *— расстояние от элемента* y *до множества* А *в пространстве* $\mathrm{H}_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $u(t)$ — решение задачи* (1), (2) *такое, что* $\| \Delta u(t) \| \le R$ *при* $t \ge 0$. *Тогда для всех* $t \ge 0$ *справедлива оценка*

$$\int_0^t \| \partial_t u(\tau) \|^2 e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \le 2\left(\mu \| \partial_t u(0) \|^2 + 2\Pi_0\left(u(0)\right)\right) e^{-\beta t} + C(R,\beta),$$

где β *— положительная константа,* $\beta\mu \le 1/2$, $\Pi_0(u)$ *— определяется формулой* (2.9).

Доказательство. Из энергетического соотношения (см. [7]) для задачи (1), (2) в условиях леммы вытекает, что

$$\partial_t\left(\mu \| \partial_t u(t) \|^2 + 2\Pi_0\left(u(t)\right)\right) + \| \partial_t u \|^2 \le C_R .$$

Умножим это неравенство на $\exp(\beta t)$. Тогда при $\beta\mu \le 1/2$ в силу того что $\| \Delta u(t) \| \le R$, имеем

$$\partial_t\left[e^{\beta t}\left(\mu \| \partial_t u(t) \|^2 + 2\Pi_0\left(u(t)\right)\right)\right] + (1/2)\| \partial_t u \|^2 e^{\beta t} < C(R,\beta) e^{\beta t} .$$

Интегрируя это соотношение от 0 до t получаем утверждение леммы.

Лемма 3.2. *Пусть $u(t)$ — решение задачи* (1), (2) *с начальными* $(u_0;u_1) \in \mathrm{H}$ *такое, что* $\mu \| \partial_t u(t) \|^2 + \| \Delta u(t) \|^2 < R^2$ *при* $t \ge 0$. *Тогда для функции* $w(t) = \partial_t u$ *при* $\mu \in (0, \mu_0]$, *где* $\mu_0 > 0$ *достаточно мало, справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \mu^{3/2} \| \partial_t w(t) \|^2 + \mu^{1/2} \| \Delta w(t) \|^2 \le \\ \le C_1\left(\mu \| \partial_t w(0) \|^2 + \| \Delta w(0) \|^2\right) \exp\left(-\beta_0 t\right) + C_2 , \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\beta_0 > 0$, $C_1, C_2 > 0$ *не зависят* $\mu \in (0, \mu_0]$.

Доказательство. Из рассмотрений работы [7] вытекает, что $w(t) = \partial_t u(t)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \mu \partial_t^2 w + \partial_t w + \Delta^2 w + M'\left(u(t)\right) w = 0 , \qquad w(0) = u_1 , \\ \mu \partial_t w(0) = -\left(u_1 + \Delta^2 u_0 + M(u_0)\right), \end{gathered} \tag{3.7}$$

где M и M' определяются соотношениями (2.3) и (3.2). При этом

$$\partial_t Q(\partial_t w, w) + \| \partial_t w \|^2 = -\Psi(w,u), \tag{3.8}$$

где

$$Q(w,\partial_t w) = (1/2)\Big(\mu\|\partial_t w\|^2 + \|\Delta w\|^2 +$$

$$+\ (1/2)\|\Delta v^*(u,w)\|^2 - \big([w,w],v(u)+\theta\big)\Big),$$

$$\Psi(w,u) = (3/2)\big([w,w],v^*(u,w)\big) + \rho\left(\partial_{x_1} w,\, \partial_t w\right),$$

элементы $v = v(u)$ и $v^* = v^*(u,w)$ определяются так же, как и в (3.2). Из леммы 1.4 вытекает, что на решениях задачи (1), (2), удовлетворяющих условию $\mu\|w(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 \le R^2$, справедливы оценки

$$\begin{gathered} \big|\,\Psi(u,w)\,\big| \le (1/2)\|\partial_t w\|^2 + b_0\big(1+\|w\|\big)\|\Delta w\|^2 \le \\ \le (1/2)\|\partial_t w\|^2 + b_1\mu^{-1/2}\|\Delta w\|^2, \\ b_2(\mu\|\partial_t w\|^2 + \|\Delta w\|^2) - b_3\|w\|^2 \le \\ \le Q(w,\partial_t w) \le b_4(\mu\|\partial_t w\|^2 + \|\Delta w\|^2), \end{gathered} \tag{3.9}$$

где константы $b_j = b_j(R) > 0$ не зависят от $\mu \in (0,\mu_0]$. Рассмотрим при $\nu > 0$ функцию

$$W(t) = Q(w,\partial_t w) + \nu(\mu(\partial_t w,w) + (1/2)\|w\|^2).$$

При условии $b_2 - \nu\mu \ge b_2/2$, $\nu \ge 4b_3$, справедливо соотношение

$$a_1\,(\mu\|\partial_t w\|^2 + \|\Delta w\|^2) \le W(t) \le a_2\nu\,(\mu\|\partial_t w\|^2 + \|\Delta w\|^2), \tag{3.10}$$

где $a_1 = b_2/2$, a_2 — константа, зависящая лишь от b_2, b_3 и b_4. Из (3.7), (3.3) и леммы 1.4 вытекает, что

$$\partial_t(\mu(\partial_t w,w) + (1/2)\|w\|^2) \le \mu\|\partial_t w\|^2 - (1/2)\,\|\Delta w\|^2 + C_R\|w\|^2. \tag{3.11}$$

Следовательно, с помощью (3.8) и (3.9) получаем

$$\partial_t W \le -(1/2 - \nu\mu)\|\partial_t w\|^2 - \left(\nu/2 - b_1\mu^{-1/2}\right)\|\Delta w\|^2 + \nu C_R\|w\|^2.$$

Положим $\nu = 4b_1\mu^{-1/2}$ и подберем $\mu_0 > 0$ так, чтобы $\nu\mu < 1/4$, $\nu\mu \le b_2/2$, $\nu \ge 4b_3$ для всех $\mu \le \mu_0$. В этом случае из (3.10) вытекает

$$\partial_t W + \alpha_1 W \le \alpha_2\mu^{-1/2}\|w(t)\|^2,$$

где α_1, $\alpha_2 > 0$ — константы, не зависящие от μ. Следовательно,

$$W(t) \le W(0)\exp(-\alpha_1 t) + \alpha_2\mu^{-1/2}\int_0^t \big\|\partial_t u(\tau)\big\|^2 \exp\{-\alpha_1(t-\tau)\}\,d\tau.$$

Поэтому оценка (3.6) следует из (3.10) и леммы 3.1.

Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что для любой траектории $S_t^{\mu}y_0 = \left(u_\mu(t);\partial_t u_\mu(t)\right)$, лежащей в аттракторе A_μ системы (1), (2), при всех $-\infty < t < \infty$ имеет место оценка

$$\mu^{3/2}\left\| \partial_t^2 u_\mu \right\|^2 + \mu^{1/2}\left\|\Delta\partial_t u_\mu\right\|^2 + \left\|\Delta u_\mu\right\|^2 \le R_1^2, \qquad (3.12)$$

где $R_1 > 0$ от μ не зависит, $\mu \in (0,\mu_0]$, μ_0 — достаточно мало.

Лемма 3.3. *Пусть* $\left(u_\mu(t);\partial_t u_\mu(t)\right)$ *— траектория системы (1), (2), лежащая в аттракторе* A_μ, $\mu \le \mu_0$. *Тогда при* $t \ge s$ *справедлива оценка*

$$\| \partial_t u_\mu(t) \|^2 + \int_s^t \left\|\Delta\partial_t u_\mu(\tau)\right\|^2 d\tau \le C_1 + C_2(t-s), \qquad (3.13)$$

где $C_1, C_2 > 0$ *от* $\mu \in (0,\mu_0]$ *не зависят.*

Доказательство. Пусть, как и в лемме 3.2, $w(t) = \partial_t u(t)$. Из (3.12) следует, что

$$\mu \left| (\partial_t w, w) \right| \le (1/2)\left(\mu^{3/2}\| \partial_t w \|^2 + \mu^{1/2}\| w \|^2\right) \le C_R .$$

Поэтому, интегрируя (3.11), имеем

$$\| w(t) \|^2 + \int_s^t \left\|\Delta w(\tau)\right\|^2 d\tau \le \| w(s) \|^2 + 2\mu I_1(t,s) + C_1 I_2(t,s) + C_2, \qquad (3.14)$$

где

$$I_1(t,s) = \int_s^t \left\|\partial_t w(\tau)\right\|^2 d\tau,$$

$$I_2(t,s) = \int_s^t \left\|w(\tau)\right\|^2 d\tau,$$

$t \ge s$, а константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от μ. Покажем, что найдутся константы $D_1, D_2 > 0$, не зависящие от μ и такие, что

$$\mu I_1(t,s) \le D_1 + D_2(t-s), \qquad (3.15)$$

$$I_2(t,s) \le D_1 + D_2(t-s). \qquad (3.16)$$

Действительно, из энергетического соотношения (см. [7]) для системы (1), (2) вытекает, что

$$(1/2)\int_s^t \left\|\partial_t u(\tau)\right\|^2 d\tau \le \left| E(t) \right| + \left| E(s) \right| + (1/2)\rho^2 \int_s^t \left\|u(\tau)\right\|_1^2 d\tau ,$$

где $E(t) = (1/2)\mu \| \partial_t u \|^2 + \Pi(u(t))$. Поэтому (3.16) следует из (3.12) и леммы 1.1. Для доказательства (3.15) заметим, что из (3.7) следует соотношение

$$\partial_t(\mu \| \partial_t w \|^2 + \| \Delta w \|^2) + \| \partial_t u \|^2 \le \| M'(u)w \|^2 . \tag{3.17}$$

Из (3.12) и леммы 1.1 получаем

$$\| M'(u)w \|^2 \le C_R \mu^{-1/2} \left(1 + \| u(t) \|_3^2\right).$$

Следовательно, интегрируя (3.17), с помощью (3.12) находим, что

$$\mu^{1/2} I_1(t,s) \le C_1 + C_2 \int_s^t \left(1 + \| u(\tau) \|_3^2\right) d\tau . \tag{3.18}$$

Но из (1), (3.12), (3.16) и леммы 1.1 вытекает, что

$$\int_s^t \| \Delta^2 u(\tau) \|_{-1}^2 d\tau \le C_1 + C_2(t - s) . \tag{3.19}$$

Поэтому (3.15) следует из (3.18).

Оценки (3.15) и (3.16) позволяют из (3.14) получить соотношение

$$\| w(t) \|^2 + \int_s^t \| \Delta w(\tau) \|^2 d\tau \le \| w(s) \|^2 + C_1 + C_2(t - s) ,$$

где C_1 , $C_2 > 0$ не зависят от μ . Проинтегрируем это соотношение по s от $t_0 - 1$ до t_0 , где $t_0 \le t$. В результате получим, что

$$\| w(t) \|^2 + \int_{t_0}^t \| \Delta w(\tau) \|^2 d\tau \le \int_{t_0 - 1}^{t_0} \| w(s) \|^2 ds + C_1 + C_2(t - t_0) .$$

Отсюда и из (3.16) следует утверждение леммы 3.3.

Лемма 3.4. *Для любой траектории $S_t^\mu y_0$ системы* (1), (2), *лежащей на аттракторе A_μ , при всех $-\infty < t < \infty$ справедлива оценка*

$$\mu \left\| \partial_t^2 u_\mu \right\|^2 + \left\| \Delta \partial_t u_\mu \right\|^2 + \left\| u_\mu \right\|_4^2 \le R^2 , \tag{3.20}$$

где $R > 0$ не зависит от $\mu \in (0, \mu_0]$, μ_0 — достаточно мало.

Доказательство. Из (3.13), в частности, следует, что величина $\|\partial_t u_\mu\|$ равномерно ограничена на аттракторе A_μ. Это позволяет для функционала $\Psi(u,w)$ вместо (3.9) на аттракторе получить оценку

$$|\Psi(u,w)| \le (1/2)\|\partial_t w\|^2 + b\|\Delta w\|^2$$

с константой b, не зависящей от μ. Поэтому можно повторить рассуждения леммы 3.2, выбирая при этом параметр ν, не зависящим от $\mu \in (0,\mu_0]$. В результате получим, что

$$\mu\|\partial_t^2 u_\mu\|^2 + \|\Delta\partial_t u_\mu\|^2 \le C. \tag{3.21}$$

Что касается величины $\|u_\mu\|_4$, то ее ограниченность вытекает из (1), (3.12), (3.21).

Лемма 3.4 дает возможность завершить доказательство теоремы 3.2. Действительно, так как $(\mathrm{H}, \mathrm{H}_\mu)$-аттрактор слабо замкнут в H [15], то существует элемент $y_\mu = \left(u_{0\mu}; u_{1\mu}\right)$ из A_μ такой, что

$$d(y_\mu) \equiv \operatorname*{dist}_{\mathrm{H}_0}(y_\mu, A^*) = \sup\left\{\operatorname*{dist}_{\mathrm{H}_0}(y, A^*) : y \in A_\mu\right\}.$$

Пусть $y_\mu(t) = \left(u_\mu; \partial_t u_\mu\right)$ — траектория системы (1), (2), лежащая в аттракторе A_μ и такая, что $y_\mu(0) = y_\mu$. Из (3.20) вытекает, что найдутся последовательность $\{u_{\mu_n}(t)\}$ и элемент $y(t) = (u; \partial_t u) \in L^\infty(\mathrm{R}, \mathrm{H})$ такие, что для любого отрезка $[a, b]$ $y_{\mu_n}(t)$ сходится к $y(t)$ при $\mu_n \to 0$ в $*$-слабой топологии пространства $L^\infty(a,b{:}\mathrm{H})$. Поэтому, в силу теоремы Ю. А. Дубинского [11] для любых $a < b$

$$\lim_{\mu_n \to 0} \max_{t \in [a,b]} \|u_{\mu_n}(t) - u(t)\|_2 = 0. \tag{3.22}$$

Но из (3.21) вытекает, что $\mu\|\partial_t^2 u_\mu\| \to 0$ при $\mu \to 0$. Поэтому, переходя в (1) к пределу $\mu \to 0$ получаем, что функция $u(t)$ является ограниченным на всей оси решением задачи (5), (6) и, следовательно, лежит в аттракторе A системы (5), (6). При этом, рассуждая от противного, с помощью (3.20), (3.22) легко обнаружить, что $d(y_\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$.

Список литературы

1. *В. В. Болотин*, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, Москва (1961), 339 с.
2. *И. И. Ворович*, О некоторых прямых методах нелинейной теории пологих оболочек.— Изв. АН СССР, сер. матем. (1957), т. 21, № 6, с. 747—784.
3. *Ж.-Л. Лионс*, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Мир, Москва (1972), 588 с.
4. *Н. Ф. Морозов*, Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, Ленинград (1978), 184 с.
5. *И. Д. Чуешов*, Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек.— Матем. сб. (1987), т. 133, № 4, с. 419—428.
6. *И. Д. Чуешов*, Структура максимального аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1987), вып. 47, с. 99—104.

7. *И. Д. Чуешов*, Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана .— Матем. сб. (1990), т. 181, № 1, с. 25—36.
8. *И. Д. Чуешов*, Задача о нелинейных колебаниях пологой оболочки в квазистатической постановке.— Матем. заметки (1990), т. 47, № 4, с. 128—137.
9. *И. Берг, И. Лефстрем*, Интерполяционные пространства. Введение . Мир, Москва (1980), 264 с.
10. *Ж.- Л. Лионс, Э. Мадженес*, Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, Москва (1971), 372 с.
11. *Ю. А. Дубинский*, Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.— Матем. сб. (1965), т. 67, № 4, с. 609—642.
12. *Д. Хенри*, Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Мир, Москва (1985), 376 с.
13. *А. В. Бабин, М. И. Вишик*, Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности.— УМН (1983), т. 38, вып. 4, с. 133—187.
14. *О. А. Ладыженская*, О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными.— УМН (1987), т. 42, вып. 6, с. 25—60.
15. *А. В. Бабин, М. И. Вишик*, Аттракторы эволюционных уравнений. Наука, Москва (1989), 294 с.
16. *R. Temam*, Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Springer, New York (1988), 500 p.
17. *И. Д. Чуешов*, Математические основы теории нерегулярных колебаний бесконечномерных систем: учебное пособие. Изд-во ХГУ, Харьков (1991), 80 с.
18. *И. Д. Чуешов*, Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики.— УМН (1993), т. 48, вып. 3, с. 136—162.

Quasistatic version of the system of von Karman equations

I. D. Chueshov

The existence and uniqueness of solutions of nonlinear oscillations problem of elastic shallow shell are investigated in quasistatic formulation. The asymptotic properties of the solutions are studied. The existence and the finite dimensionality of the global attractor are proved. Its nearness to the attractor of the corresponding problem in dynamical formulation with the small parameter in the inertial term is established.