Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с. 175–185

УДК 517.9

Изогнутые асимптотические солитоны уравнения Кадомцева-Петвиашвили-I

И. А. Андерс

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина АН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 14 февраля 1994 г.

Доказано существование решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I, временная асимптотика которых представляется в виде суперпозиции изогнутых солитонов.

Доведено існування розв'язків рівняння Кадомцева–Петвіашвілі-I, часова асимптотика яких подається у вигляді суперпозиції зігнутих солітонів.

Рассмотрим уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{d}{dx}\left(u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x\right) = -\sigma^2\frac{3}{4}u_{yy}. \tag{1}$$

Оно является естественным обобщением уравнения Кортевега–де Фриза в двумерной ситуации и имеет физический смысл в обоих формах. Уравнение КП-I ($\sigma = i$) описывает распространение волн на поверхности воды, когда сила поверхностного натяжения достаточно велика. Оно возникает также при описании распространения внутренних волн в стратифицированной жидкости. Ранее [1] был развит подход, который в рамках метода обратной задачи рассеяния позволил доказать, что решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза при $t \to \infty$ распадается в бесконечный цуг солитонов. Реализацией метода обратной задачи рассеяния для случая двух пространственных переменных является "метод одевания" Захарова–Шабата [2]. В [3] показано, что решение уравнения КП-II ($\sigma = 1$), построенное по схеме, представленной в [2], при $t \to \infty$ распадается в бесконечный цуг солитонов с изогнутыми линиями постоянной фазы. При этом оказалось, что четные солитоны в некоторой области являются сингулярными.

Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, что существует решение уравнения КП-I, которое при подходящем выборе компакта Ω и функции $g(k)$ распадается при $t \to \infty$ на солитоны вида

$$u_n(x,t,y) = \frac{2a^2(Y)}{\operatorname{ch}^2\left\{ a(Y)\left(x - C(Y)t + \frac{1}{2a(Y)}\ln t^{\gamma_n(Y)} - \alpha_n(Y)\right)\right\}},$$

где $Y = y/t$, а функции $a(Y), C(Y), \gamma_n(Y), \alpha_n(Y)$ вещественны и определяются выбором компакта Ω и функцией $g(k)$. При любых x, y, t функции $u_n(x,y,t)$ являются регулярными.

Следуя схеме Захарова–Шабата [2], представим его решения в виде

$$u(x,y,t) = 2\partial/\partial x\, K(x,z,t,y), \tag{2}$$

где функция $K(x,z,t,y)$ является решением интегрального уравнения Марченко

$$K(x,z,t,y) + F(x,z,t,y) + \int_x^\infty K(x,\xi,t,y)F(\xi,z,t,y)d\xi = 0. \tag{3}$$

Ядро $F(x,z,t,y)$ этого уравнения удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$F_t + F_{xxx} + F_{zzz} = 0, \qquad iF_y + F_{xx} - F_{zz} = 0. \tag{4}$$

Выберем ядро F в следующей форме:

$$F(x,z,t,y) = \iint_\Omega \varphi(k,x,y,t)\overline{\varphi}(k,z,y,t)g(k)dk,\ k = p + iq. \tag{5}$$

Эта функция удовлетворяет уравнениям (4) при любом выборе функции $g(k)$ с компактным носителем $\Omega \subset \mathbf{R}_2$. Полагая в (5) $\varphi(k,x,y,t) = \exp\,(ikx + \beta y + \gamma t)$, находим представление для функции $F(x,z,y,t)$ в виде

$$F(x,z,y,t) = \iint_\Omega \exp\left[ip(x - z) - q(x + z) + 4pqy - 2q(3p^2 - q^2)t\right]g(p,q)dpdq. \tag{6}$$

Пусть Ω есть произвольное компактное множество, лежащее в области $q > 0$. Тогда решение $u(x,y,t)$ уравнения КП-I будет стремиться к нулю при $x \to \infty$. Относительно функции $g(p,q)$ будем в дальнейшем предполагать, что она является положительной и ограниченной на Ω. Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция F имеет вид* (6), *где* $g(p,q) \geq 0$. *Тогда решение уравнения КП-I, задаваемое схемой Захарова–Шабата* (2)–(4), *существует при любых x, y, t.*

Доказательство. Рассмотрим пространство функций $h(y) \in L_2[x,\infty)$ и введем в нем оператор

$$[\hat{F}h](z) = \int_x^\infty F(s,z,y,t)h(s)ds.$$

Из (6) легко видеть, что оператор $\hat{F}$ является оператором Гильберта–Шмидта при любых фиксированных x, y, t. Покажем, что оператор $\hat{F}$ — положительный:

$$(\hat{F}h,h) = \int_x^\infty\int_x^\infty F(s,z,y,t)h(s)ds\overline{h}(z)dz =$$

$$= \iint_\Omega g(p,q)e^{-2q(3p^2 - q^2)t + 4pqy}\left|\int_x^\infty e^{ips - qs}h(s)ds\right|^2 dpdq \geq 0. \tag{7}$$

Из этого следует, что оператор $(I + \hat{F})^{-1}$ существует, причем для любых x, y, t, $\|(I + \hat{F})^{-1}\| \leq 1$. Это означает, что уравнение (3) разрешимо. Можно показать, что его решение является достаточно гладким. Таким образом, определено некоторое решение уравнения КП-I.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение этого решения при больших t.

Теорема. *Пусть*

$$f(\lambda, Y) = q^2 - 3p^2 + 2pY,$$

где $\lambda = p + iq \in C$, $Y = y/t$, *и компактное множество* Ω,*лежащее в области* $q > |p| \sqrt{3}$ *таково, что максимальное значение функции* $f(\lambda, Y)$ *на* Ω *положительно и достигается лишь в одной точке* $\lambda_0(Y) \in \Omega$ *для почти всех* Y $(|Y| < A_\Omega)$:

$$C(Y) = \max_{\lambda \in \Omega} f(\lambda, Y);$$

функция $g(\lambda)$ *является положительной, ограниченной и бесконечно дифференцируемой на* Ω.

Тогда существует решение $u(x,y,t)$ *уравнения Кадомцева—Петвиашвили-I, которое в области*

$$G_N = \{\, x,y,t\colon x \ge Ct - \frac{1}{2q_0} \ln t^{N+1} ,\ |y| < A_\Omega t,\ t > T(N) \,\}$$

представимо в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} u_n(x,y,t) + O\left(\frac{1}{t^{1/2+\varepsilon}}\right),$$

$$u_n(x,y,t) = \frac{2q_0^2(Y)}{2\,\mathrm{ch}^2\left[q_0(Y)\left(x - C(Y)t + \frac{1}{2q_0}(\ln t^{\gamma_n(Y)} - \ln \varphi_n(Y,t))\right)\right]}, \tag{8}$$

где функции $\varphi_n(Y)$ *и* $\gamma_n(Y)$ *определяются поведением функции* $g(\lambda)$ *и структурой множества* Ω *в окрестности точки* $\lambda_0(Y)$. *При этом асимптотика справедлива всюду вне точек разрыва функций* $\varphi_n(Y), \gamma_n(Y)$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить для специального выбора компакта Ω. Пусть

$$\Omega = \{\, (p,q)\colon q > |p| \sqrt{3},\ h(p,q) \le 0 \,\}, \tag{9}$$

где

$$h(p,q) = q^2 - 2p^2 - b^2, \qquad b > 0. \tag{10}$$

Основная идея доказательства состоит в том, что ядро уравнения (3) представимо в виде суммы вырожденного ядра и ядра, которое имеет малую операторную норму в пространстве $L_2[x,\infty)$. Основной вклад в асимптотику вносит вырожденное ядро, что позволяет найти эффективные формулы для решения уравнения КП-I при $t \to \infty$. Для любого другого выбора компакта Ω вида

$$\Omega = \{\, (p,q)\colon q > |p| \sqrt{3}\ ,\ C(Y) > 0,\ |Y| < A_\Omega \,\}, \tag{11}$$

при котором $\max\limits_{\Omega} f(\lambda)$ достигается лишь в одной точке, доказательство проводится по аналогичной схеме. Ниже мы приведем асимптотические формулы для решения уравнения КП-I, соответствующие различным выборам компакта Ω вида (11).

Нетрудно убедиться, что в этом случае максимум функции $f(p,q,Y)$ на компакте Ω достигается в точке $(p_0(Y), q_0(Y))$ гиперболы $h(p,q) = 0$, причем

$$p_0(Y) = Y, \qquad q_0(Y) = \sqrt{2Y^2 + b^2}, \qquad C(Y) = Y^2 + b^2\,, \qquad |\,Y\,| < b. \tag{12}$$

Для изучения асимптотического поведения при $t \to \infty$ ядра (6) уравнения Марченко положим

$$x = C(Y)t + \xi, \qquad z = C(Y)t + \zeta.$$

Для достаточно малого ε рассмотрим кривую

$$2q\big(f(p,q,Y) - C(Y)\big) + \varepsilon = 0, \tag{13}$$

которая делит область Ω на две подобласти так, что $\Omega = O_\varepsilon \bigcup \Omega_\varepsilon$, где O_ε есть часть Ω, которая лежит между гиперболой $h(p,q) = 0$ и кривой (12), причем $\big(p_0(Y), q_0(Y)\big) \in O_\varepsilon$, а Ω_ε есть дополнение множества O_ε до всей области Ω. Согласно этому разбиению ядро (6) есть сумма двух ядер, которые мы обозначим через $F_1(x,z,y,t)$ и $F_2(x,z,y,t)$ соответственно.

Произведем замену переменных, положив

$$r = 2q\big(C(Y) - f(p,q,Y)\big)$$

в интеграле $F_1(x,z,y,t)$, где интегрирование проводится по множеству O_ε. Пусть u есть проекция радиус-вектора из точки $\big(p_0(Y), q_0(Y)\big)$ в точку $(p,q) \in \Omega$ на вектор, касательный к гиперболе $h(p,q) = 0$ в точке $\big(p_0(Y), q_0(Y)\big)$:

$$u = 2p_0 q + q_0 p - 3p_0 q_0\,.$$

Выберем $\varepsilon \le \Delta$ таким, чтобы система уравнений

$$\Delta = 2q\big(C(Y) - f(p,q,Y)\big),$$
$$\Delta = 2p_0 q + q_0 p - 3p_0 q_0$$

была однозначно разрешима относительно p и q. Тогда в окрестности точки (p_0, q_0) переменные p и q могут быть выражены через r и u. В окрестности точки $\big(p_0(Y), q_0(Y)\big)$ уравнение (10) может быть записано в форме

$$r = \alpha^2(Y)u^2 + \beta^2(Y)u^3 + \ldots,$$

где $\alpha = \alpha(p_0, q_0)$, $\beta = \beta(p_0, q_0)$. Выражая отсюда u как функцию от r, имеем

$$u = \pm\, a(Y)\sqrt{r} + b(y)r + \ldots.$$

Следовательно, функция $F_1(\xi,\zeta,y,t)$ может быть записана в виде

$$F_1(\xi,\zeta,y,t) = \int_0^{\varepsilon} dr \int_{-a\sqrt{r}+br}^{a\sqrt{r}+br} du\, j(r,u) g(u,r)\, e^{ip(\xi-\zeta) - q(\xi+\zeta) - rt},$$

где $j(r,u) = \left| \dfrac{D(k,\lambda)}{D(r,u)} \right|$.

Введем обозначение

$$E_0(\xi,\zeta,Y) = e^{ip_0(\xi-\zeta) - q_0(\xi+\zeta)},$$

где $p_0 = p_0(Y)$, $q_0 = q_0(Y)$, и преобразуем функцию $F_1(\xi,\zeta,y,t)$ следующим образом

$$F_1(\xi,\zeta,y,t) = E_0 \int_0^{\varepsilon} dr \int_{-a\sqrt{r}+br}^{a\sqrt{r}+br} du\, j(r,u) g(u,r)\, e^{i(p-p_0)(\xi-\zeta) - (q-q_0)(\xi+\zeta) - rt}.$$

Разложим подынтегральное выражение по степеням r и u в окрестности точки $\left(p_0(Y), q_0(Y)\right)$:

$$g(r,u) j(r,u)\, e^{i(p-p_0)(\xi-\zeta) - (q-q_0)(\xi+\zeta)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} \sum_{m=0}^{n-j} \zeta^j \xi^{n-j} r^{l+m} u^{n-l-m} \varphi_{n,j,l,m}(1 + \psi_n(r,u)), \tag{14}$$

где

$$\varphi_{n,j,l,m} = \frac{(-1)^{n-m}}{l!\,m!\,(n-j-m)!\,(j-l)!} \times$$
$$\times (ik_1 + \lambda_1)^l (ik_2 + \lambda_2)^{j-l} (ik_1 - \lambda_1)^m (\lambda_2 - ik_2)^{n-j-m} g_0 j_0,$$
$$k_1 = \frac{\partial}{\partial r} p_0(0,0), \qquad \lambda_1 = \frac{\partial}{\partial r} q_0(0,0), \qquad k_2 = \frac{\partial}{\partial u} p_0(0,0), \qquad \lambda_2 = \frac{\partial}{\partial u} q_0(0,0),$$
$$p_0 = p_0(Y), \qquad q_0 = q_0(Y)$$

а функции $\psi_n(r,u)$ удовлетворяют неравенствам $|\psi_n(r,u)| \le Anru$. Из (14) следует, что

$$F_1(\xi,\zeta,y,t) = E_0(\xi,\zeta,Y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \zeta^j \xi^{n-j} \frac{(-1)^n a^{n+j+1}}{2(n-j)!} \times$$
$$\times g_0 j_0 (ik_2 + \lambda_2)^j (\lambda_2 - ik_2)^{n-j} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{t^{(n+3)/2}} + I_{nj}(t) \right],$$

причем $|I_n(t)| \le \dfrac{A(n,j)}{t^{(n+j)/2+2}}$.

Таким образом, функцию $F_1(\xi,\zeta,y,t)$ можно представить в виде

$$F_1(\xi,\zeta,y,t) = E_0(\xi,\zeta,Y) \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-n-1} \zeta^n \xi^j \frac{\psi_{nj}(Y)}{t^{(n+j+3)/2}} (1 + \delta_n(t)) + \Delta_N(\xi,\zeta,y,t)\,, \quad (15)$$

где

$$| \delta_n(t) | \le \frac{B_{nj}}{\sqrt{t}}\,, \qquad | \Delta_N | \le A E_0(\xi,\zeta,y,t) \frac{\zeta^N \xi^N}{t^{(N+3)/2}}\,.$$

$$\psi_{nj} = \frac{g_0 j_0 a^{n+j+1}}{2n!j!} \Gamma\left(\frac{n+j+1}{2}\right)(1 + (-1)^{n+j})(ik_2 + \lambda_2)^n (\lambda_2 - ik_2)^j\,,$$

а из (12) следует, что

$$\lambda_2(Y) = \frac{Y}{6Y^2 + b^2}\,, \qquad k_2(Y) = \frac{\sqrt{2Y^2 + b^2}}{2(6Y^2 + b^2)}\,,$$

$$j_0(Y) = 1/16\sqrt{6Y^2 + b^2}\,, \qquad a(Y) = b/2\sqrt{2(6Y^2 + b^2)}\,.$$

При $| \xi \zeta | < t$ в области $\zeta > \xi > -\frac{1}{2q_0} \ln t^{N+1}$ справедлива оценка

$$\int_x^\infty \int_x^\infty | \Delta_N(s,z,y,t) |^2 dsdz \le \frac{A(N)}{\sqrt{t}}\,. \quad (16)$$

Рассмотрим оператор $\hat{F}_2$ в пространстве $L_2[x,\infty)$

$$[\hat{F}_2 h](z) = \int_x^\infty F_2(s,z,y,t) h(s) ds$$

и оценим функцию $| F_2(s,z,y,t) |^2$:

$$| F_2(s,z,y,t) |^2 = \left| \iint_{\Omega_\varepsilon} e^{ip(x-z) - q(x+z) + 4pqy - 2q(3p^2 - q^2)t} g(p,q)\, dpdq \right|^2 \le$$

$$\le \iint_{\Omega_\varepsilon} | g(p,q) |^2 dpdq \iint_{\Omega_\varepsilon} e^{-2q(s+z) + 4qf(p,q,Y)} dpdq \le$$

$$\le A \iint_{\Omega_\varepsilon} e^{-2q(s+z) + 4qf(p,q,Y)} dpdq. \quad (17)$$

Используя (17), оценим норму оператора $\hat{F}_2$

$$\int_x^\infty \int_x^\infty | F_2(s,z,y,t) |^2 dsdz \le$$

$$\leq A \iint_{\Omega_\varepsilon} e^{4qf(p,q,Y)t} \left(\int_x^\infty e^{-2qs}\, ds \right)^2 dpdq \leq O(e^{-\varepsilon t}) \tag{18}$$

при $x > C(Y)t - \frac{1}{2q}\varepsilon t,\ t > 0.$

Принимая во внимание (15), (16), и (18), можно сформулировать следующий результат.

Лемма. *Пусть N — любое натуральное число и*

$$\xi > \zeta > -\frac{1}{2q_0} \ln t^{N+1}.$$

Тогда ядро $F(\xi,\zeta,y,t)$ при $t \to \infty$ представимо в виде

$$F(\xi,\zeta,y,t) = F_N(\xi,\zeta,y,t) + G(\xi,\zeta,y,t), \tag{19}$$

где

$$F_N(\xi,\zeta,y,t) = e^{ip_0(\xi-\zeta) - q_0(\xi+\zeta)} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-n-1} \zeta^n \xi^j \frac{\psi_{nj}(Y)}{t^{(n+j+3)/2}},$$

а для функции $G(s,z,y,t)$ справедлива оценка

$$\int_x^\infty \int_x^\infty |\, G(s,z,y,t)\,|^2\, dsdz = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{20}$$

Нетрудно показать [1], что главный вклад в асимптотику решения уравнения КП-I в области $x > C(Y)t - \frac{1}{2q_0}\ln t^{N+1}$, $t \to \infty$, дает решение интегрального уравнения (3) с вырожденным ядром F_N. Заменив в уравнении (3) ядро F вырожденным ядром F_N и полагая $x = C(Y)t + \xi$, $z = C(Y)t + \zeta$, получим следующее интегральное уравнение для $K(\xi,\zeta,y,t)$:

$$K(\xi,\zeta,t,y) + F_N(\xi,\zeta,t,y) + \int_\xi^\infty K(\xi,s,t,y)\, F_N(s,\zeta,y,t)ds = 0, \qquad \zeta > \xi, \tag{21}$$

где

$$F_N(\xi,\zeta,y,t) = e^{ip_0(\xi-\zeta) - q_0(\xi+\zeta)} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta^n \sum_{j=0}^{N-n-1} \xi^j \frac{\psi_{nj}(Y)}{t^{(n+j+3)/2}},$$

$$\psi_{nj} = \frac{g_0 h_0 a^{n+j+1}}{2n!j!} \Gamma\left(\frac{n+j+1}{2}\right)(1 + (-1)^{n+j})(ik_2 + \lambda_2)^n (\lambda_2 - ik_2)^j (1 + \delta_n(t)),$$

$$\delta_n(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \tag{22}$$

причем $p_0 = p_0(Y)$, $q_0 = q_0(Y)$, $\psi_{nj} = \psi_{nj}(Y)$. Согласно (2), (19), (20) при $x > C(Y)t - \frac{1}{2q_0}\ln t^{N+1}$

$$u(x,y,t) = 2\frac{d}{d\xi}K(\xi,\zeta,y,t)\Big|_{\zeta=\xi=x-C(Y)t} + O(t^{-1/2+\varepsilon}).$$

Будем искать решение уравнения (21) в виде

$$K(\xi,\zeta,y,t) = \sum_{n=0}^{N-1}\gamma_n(\xi,Y,t)\,\zeta^n e^{ip_0(\xi-\zeta)-q_0(\xi+\zeta)}. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (21), получаем систему уравнений для функций $\gamma_n(\xi,Y,t)$:

$$\gamma_n + \sum_{m=0}^{N-1}\gamma_m\sum_{j=0}^{N-n-1}\frac{\psi_{nj}(Y)}{t^{(n+j+3)/2}}\int_\xi^\infty s^{j+m}e^{-2q_0 s}\,ds = -\sum_{j=0}^{N-n-1}\frac{\psi_{nj}(Y)}{t^{(n+j+3)/2}}\xi^j e^{-q_0\xi}.$$

Учитывая (20), из этой системы следует, что

$$K(\xi,\xi,y,t) = \frac{d}{d\xi}\ln\det\,(E + A(\xi,\xi,y,t)),$$

где E — единичная $N\times N$ матрица, $A(\xi,\xi,y,t)$ — матрица с элементами

$$[A]_{n+1,m+1} = \sum_{j=0}^{N-n-1}\frac{\psi_{nj}}{t^{(n+j+3)/2}}I_{j+m}, \qquad n, m = 0,\dots, N-1, \tag{24}$$

$$I_{j+m} = \int_\xi^\infty s^{j+m}e^{-2q_0 s}\,ds,$$

где функции ψ_{nj} определены в (22).

Таким образом, для решения $u(x,y,t)$ справедлива асимптотическая формула

$$u(x,y,t) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det\,[E + A(x-Ct,\,x-Ct,\,y,\,t)] + O\left(t^{-1/2+\varepsilon}\right), \qquad t\to\infty.$$

Анализ структуры матрицы $E + A(\xi,\xi,y,t)$ показывает, что величину $\Delta = \det\,[E + A(\xi,\xi,y,t)]$ можно представить в виде

$$\Delta = 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{P_n(\xi,Y,t)}{t^{n(n+2)/2}}e^{-2nq_0\xi}, \tag{25}$$

где $P_n(\xi,Y,t)$ — многочлены от ξ степени не выше N^n с ограниченными по t коэффициентами. При этом, если $n < [(N+1)/2]$, то справедливы асимптотические равенства

$$\frac{P_n(\xi,Y,t)}{t^{n(n+2)/2}}e^{-2nq_0\xi} = \det\,[A^n(\xi,Y,t)]\left(1 + O(t^{-1/2})\right) + \frac{R_n(\xi,Y,t)}{t^{n(n+2)/2+1}}e^{-2nq_0\xi}, \tag{26}$$

где $A^n(\xi,Y,t)$ — матрица порядка n с элементами

$$A^{(n)}_{i+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-j-1} \frac{\psi_{ij}}{t^{(i+j+3)/2}} \int_{\xi}^{\infty} s^{j+k} e^{-2q_0 s}\, ds, \qquad i,k = 0,\dots,n-1,$$

а $R_n(\xi,Y,t)$ — многочлены с ограниченными по ξ коэффициентами.

Матрицу $A_n(\xi,Y,t)$ можно представить как произведение двух матриц. Учитывая формулы (19),(21), получаем

$$\det\,[A^{(n)}(\xi,Y,t)\,] = \frac{(g_0 j_0)^n a^{n(n+2)} (\lambda_2^2 + k_2^2)^{n(n+1)/2}}{2^n \left(\Pi_{j=0}^{n-1} j!\right)^2} \frac{\Gamma^{(n)} I^{(n)}(\xi)}{t^{n(n+2)/2}}, \tag{27}$$

где $\lambda_2(Y)$, $k_2(Y)$, $j_0(Y)$ определены в (15), а $\Gamma^{(n)}$ и $I^{(n)}(\xi)$ — определители порядка n, элементы которых определяются формулами

$$\Gamma^{(n)}_{i+1,k+1} = \Gamma\left(\frac{i+k+1}{2}\right)(1 + (-1)^{i+k}), \qquad I^{(n)}_{i+1,k+1} = \int_{\xi}^{\infty} s^{j+k} e^{-2q_0 s}\, ds,$$

$$i,k = 0,\dots,n-i.$$

Как показано в [1], $I^{(n)}(\xi) = I^{(n)}(0) e^{-2nq_0\xi}$, где определитель $I^{(n)}$ с точностью до множителя 2^{-n^2} является определителем Грамма системы функций $\xi^k e^{-\xi/2}$ $(k = 0,\dots,n-1)$ на полуоси $(0,\infty)$, поэтому $I^{(n)}(0) \neq 0$. Так как оператор $\hat{F}$ положителен, то определитель Δ в области $\xi > -\dfrac{1}{2q_0}\ln t^{N+1}$ не обращается в нуль. Пользуясь формулами (25)–(27), нетрудно убедиться, что $\Gamma^{(n)} I^{(n)} > 0$.

Таким образом, при $n \le [(N+1)/2]$ многочлены $P_n(\xi,Y,t) = P_n(Y,t)$ не зависят от ξ, причем

$$P_n(Y,t) = \frac{(g_0 j_0)^n a^{n^2} (\lambda_2^2 + k_2^2)^{n(n-1)/2}\, \Gamma^{(n)} I^{(n)}(0)}{2^n \left(\Pi_{j=0}^{n-1} j!\right)^2} \left(1 + O(t^{-1/2})\right) > 0.$$

Покроем область $\xi > -\dfrac{1}{2q_0}\ln t^{N+1}$ интервалами

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2q_0}\ln t^{2+\varepsilon} < \xi < \infty\right),$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2q_0}\ln t^{n+1+\varepsilon} < \xi < -\frac{1}{2q_0}\ln t^{n-\varepsilon}\right), \qquad n = 2,3,\dots,m,$$

$$a_m = \left(-\frac{1}{2q_0}\ln t^{N+1} < \xi < -\frac{1}{2q_0}\ln t^{m-\varepsilon}\right),$$

где $m = [(N+1)/2]$. Нетрудно показать [1], что равномерно по $\xi \in a_n$ $(n = 1,2,\dots,m)$ для решения $u(x,y,t)$ уравнения КП-I справедливы асимптотические формулы

$$u_n(x,y,t) = \frac{2q_0^2(Y)}{\operatorname{ch}^2\left[q_0(Y)\left(x - C(Y)t + \frac{1}{2q_0}(\ln t^{\gamma_n(Y)} - \ln \varphi_n(Y,t))\right)\right]}, \tag{28}$$

где $p_0(Y) = Y$, $\quad q_0(Y) = \sqrt{2Y^2 + b^2}$, $\quad C(Y) = Y^2 + b^2$, $|Y| < b$,

$$\varphi_n(Y,t) = \frac{q_0 j_0 a^{2n-1} I^{(n)}(0)\,\Gamma^{(n)}}{2((n-1)!)^2 (\lambda_2^2 + k_2^2)^{(n-1)} I^{(n-1)}(0)\,\Gamma^{(n-1)}}, \qquad \gamma_n = n + 1/2,$$

а функции $\lambda_2(Y)$, $k_2(Y)$, $j_0(Y)$, $a_2(Y)$ определены в (15). Таким образом, решение уравнения КП-I в области $x > C(Y)t - \frac{1}{2q_0}\ln t^{N+1}$ распадается на $[(N+1)/2]$ солитонов вида

$$u_n(x,y,t) = \frac{2q_0^2(Y)}{\operatorname{ch}^2\left[q_0(Y)\,\psi_n(x,t,y)\right]}$$

с изогнутыми линиями постоянной фазы

$$\psi_n(x,t,y) = x - C(Y)t + \frac{1}{2q_0}\left(\ln t^{\gamma_n(Y)} - \ln \varphi_n(Y,t)\right).$$

Теорема доказана.

Приведем другие примеры реализации компакта Ω и соответствующие им асимптотические формулы для решения уравнения КП-I.

Пусть Ω — отрезок, лежащий в области $q > |p|\sqrt{3}$:

$$\Omega = \{(p,q) : q = kp,\ |k| > \sqrt{3},\ 0 < q \le \alpha\}.$$

Тогда максимум функции $f(p,q,Y)$ достигается в точке $q_0 = \alpha$, $p_0 = \alpha/k$ и

$$C(Y) = \frac{\alpha}{k}\left(\alpha\frac{k^2-3}{k} + 2Y\right),$$

$$|Y| < \frac{\alpha}{k}\frac{k^2-3}{|k|} = A_\Omega.$$

При этом для решения уравнения КП-I в области

$$x > C(Y)t - \frac{1}{2\alpha}\ln t^{N+1},\ |Y| < A_\Omega,$$

справедлива асимптотическая формула

$$u_n(x,y,t) = \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} \frac{2\alpha^2}{\operatorname{ch}^2\left[\alpha\left(x - C(Y)t + \frac{1}{\alpha}(\ln t^{n+1/2} - \ln \varphi_n(Y,t))\right)\right]} + O\left(\frac{1}{t^{1/2+\varepsilon}}\right),$$

которая представляет собой цуг из $[(N+1)/2]$ солитонов с прямыми линиями постоянной фазы.

Пусть теперь Ω — объединение m отрезков:

$$\Omega = \bigcup \Omega_i, \qquad i = 1,\dots,m,$$

$$\Omega_i = \{ (p,q) : q = k_i p, \ |k_i| > \sqrt{3}, 0 < q \le \alpha \},$$

границы которых лежат на прямой $q = \alpha$. Множества Ω_i занумерованы таким образом, что величина $p_i = \alpha / k_i$ возрастает с ростом i. В этом случае максимум функции $f(p,q,Y)$ достигается в одной точке (p_0,q_0) и

$$q_0 = \alpha, \qquad p_0 = \frac{\alpha}{k_i},$$

$$C(Y) = \frac{\alpha}{k_i}\left(\alpha\frac{k_i^2-3}{k_i} + 2Y\right),$$

$$\alpha\frac{3}{2}\frac{k_{i-1}^2 + k_i^2}{k_{i-1} - k_i} < Y < \alpha\frac{3}{2}\frac{k_i^2 + k_{i+1}^2}{k_i - k_{i+1}}.$$

При этом асимптотическая формула для решения уравнения КП-I имеет вид (8), где $\gamma_n = n + 1/2$. Она представляет собой цуг солитонов с постоянной амплитудой и линиями постоянной фазы в виде ломаных.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Е. Я. Хруслову и В. П. Котлярову за внимание к работе и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда Сороса (грант No U20000).

Список литературы

1. *Е. Я. Хруслов*, Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки.— Мат. сб. (1976), т. 99, № 2, с. 261–281.
2. *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат*, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния, ч. I.— Функц. анализ (1974), т. 8, вып. 3, с.43–53.
3. *I. A. Anders, E. Ya. Khruslov, V. P. Kotlyarov*, Curved Asymptotic solitons of the Kadomtsev–Petviashvili Equation.— Proc. of the 8th International Workshop "Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems" (NEEDS–92). Ed. by V. G. Makhankov et. al. World Scientific (1993), p. 77–83.

Curved asymptotic solitons of the Kadomtsev–Petviashvili-I equation

I. A. Anders

The existence of the solutions of the Kadomtsev–Petviashvili-I equation is proved. Time asymptotics of the solutions are represented by a chain of curved solitons.