Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с. 193–215

УДК 517.535.4

Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. Часть 1

А. Ф. Гришин

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 12 октября 1993 г.

Работа состоит из двух частей. В вводном разделе к обеим частям определяется важное понятие полной меры субгармонической в полуплоскости функции и предлагается новая форма представления функции конечного порядка, субгармонической в полуплоскости. В первой части изучается непрерывность субгармонической функции в заданной точке, лежащей внутри области субгармоничности или на прямолинейном участке границы этой области.

Робота має дві частини. У вступному розділі до обох частин дається важливе визначення повної міри субгармонійної у напівплощині функції і пропонується нова форма зображення функції скінченного порядку, що субгармонійна у напівплощині. В першій частині вивчається неперервність субгармонійної функції у заданій точці, що належить області субгармонійності функції або інтервалу, що знаходиться на межі області субгармонійності.

Вводный раздел (теоремы 1–10) содержит в себе результаты, в которых даются представления субгармонических функций и оценки потенциалов с различными ядрами. Классическими результатами в этом направлении являются, например, теорема Адамара о представлении целой функции конечного порядка и теорема Рисса–Мартина о представлении субгармонических функций, доказательство которой можно найти в книге М. Брело [2]. Результаты из вводного раздела можно доказать, несколько меняя рассуждения из работы автора [4], поэтому доказательства теорем не приводятся. Работе [4] предшествовали исследования Н. В. Говорова, в которых получены представления функций голоморфных в полуплоскости, и которые затем вошли в книгу [9]. Результаты, которые получены в работах [4], [10], пересекаются. Они получены независимо, однако, работа Ито [10] опубликована раньше. Причины, побудившие автора опубликовать вводный раздел, следующие. Автор считает важным введенное понятие полной меры субгармонической функции. Благодаря этому получается наиболее простое по форме и при наименьших ограничениях на функцию представление субгармонических функций в полуплоскости. Это представление по форме совпадает с представлением Брело–Адамара для функций субгармонических во всей плоскости (различие в ядре представления). Полная мера субгармонической в полуплоскости функции конечного порядка определяет эту функцию с точностью до гармонического полинома (однозначность должна получиться при соответствующей компактификации полуплоскости) так же, как риссовская мера субгармонической функции конечного порядка определяет эту функцию с той же точностью. Автор благодарит Л. И. Ронкина, справедливая критика которого побудила автора дополнить статью этими краткими историческими справками по теории представлений субгармонических функций.

Вводный раздел

Основные результаты работы следующие.

Пусть z_0 — точка, лежащая в области субгармоничности D функции $v(z)$. Мы доказываем критерий непрерывности функции $v(z)$ в точке z_0 вдоль множества E. Из этого критерия легко следует классический принцип Василеско и Эванса. Пусть z_0 есть точка, лежащая на прямолинейном участке границы области субгармоничности функции $v(z)$. Доказывается критерий непрерывности функции $v(z)$ в точке z_0. По определению Б. Я. Левина множество F называется C_0-множеством, если существует счетная система кругов, покрывающая множество F и имеющая линейную плотность ноль. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Для функций $v(z)$, субгармонических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, и удовлетворяющих неравенству $v(re^{i\theta}) \le MV(r)$, $\theta \in (0,\pi)$, мы доказываем критерий существования C_0-множества F такого, что

$$v(z,h) \underset{h\to 0}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } z,\, z + hz \,\overline{\in}\, F,$$

где

$$v(z,h) = \frac{1}{V(r)}\left(v(z+hz) - v(z)\right).$$

Этот результат дополняет исследование автора в работах [3–5], где были приведены достаточные признаки существования такого множества.

В случае, если область D ограничена замкнутой жордановой кривой $\mathcal{L}$, функция Мартина области D в точке $\zeta \in \mathcal{L}$ вычисляется по формуле

$$M(z,\zeta) = \lim \frac{G(z,\zeta_1)}{G(z_0,\zeta_1)}, \qquad (\zeta_1 \to \zeta,\ \zeta_1 \in D),$$

где G — функция Грина области D. Если кривая $\mathcal{L}$ в точке ζ имеет нормаль, а функция Грина производную в направлении внутренней нормали n, то

$$M(z,\zeta) = \frac{\dfrac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}}{\dfrac{\partial G(z_0,\zeta)}{\partial n}}.$$

О границе Мартина и функции Мартина области D можно прочитать в [2]. Следующая теорема — это специализация общей теоремы Рисса–Мартина о представлении субгармонических функций для полукруга $C_+(0,R) = \{ z\colon |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0 \}$.

Теорема 1. *. . ть $v(z)$ — субгармоническая функция в полукруге $C_+(0,R)$, имеющая в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Пусть μ — риссовская мера функции $v(z)$. Тогда существуют, однозначно определяемые функ-*

цией $v(z)$, вещественные числа a_1, a_2, меры ν_1 на интервале $(0,\pi)$ и ν на интервале $(-R,R)$ такие, что имеет место равенство

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}\, d\nu_1(\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n}\, d\nu(t) + a_1 M(z,R) + a_2 M(z,-R).$$

Причем, если $v(z_0) > -\infty$, то мера μ_1, $d\mu_1(\zeta) = G(z_0,\zeta)d\mu(\zeta)$, конечна в $C_+(0,R)$, а меры ν_2, ν_3,

$$d\nu_2(\varphi) = \frac{\partial G(z_0,Re^{i\varphi})}{\partial n}\, d\nu_1(\varphi), \qquad d\nu_3(t) = \frac{\partial G(z_0,t)}{\partial n}\, d\nu(t),$$

имеют конечную общую вариацию на интервалах $(0,\pi)$ и $(-R,R)$ соответственно. Имеют место формулы

$$\nu_1([\alpha,\beta]) = \lim_{r\to R-0} R\int\limits_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\varphi})d\varphi, \qquad [\alpha,\beta]\subset(0,\pi), \qquad \nu_1(\{\alpha\}) = \nu_1(\{\beta\}) = 0,$$

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0}\int\limits_{a}^{b} v(x+iy)dx, \qquad [a,b]\subset(-R,R), \qquad \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0,$$

$$d\nu_1(\varphi) = Rv\left(Re^{i\varphi}\right)d\varphi + d\sigma_1(\varphi),$$

$$d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t),$$

где почти всюду

$$v\left(Re^{i\varphi}\right) = \lim_{r\to R-0} v(re^{i\varphi}), \qquad v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy),$$

а σ_1 и σ — меры сингулярные относительно меры Лебега.

При дополнительных ограничениях на функцию $v(z)$ представление упрощается.

Теорема 2. *Пусть $v(z)$ есть субгармоническая функция в полукруге $C_+(0,R_1)$, $R_1 > R$, имеющая в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Тогда существует мера ν ограниченной полной вариации на сегменте $[-R,R]$ такая, что при $z\in C_+(0,R)$ имеет место представление*

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) + \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}\, v\left(Re^{i\varphi}\right)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n}\, d\nu(t).$$

Обозначим через SK класс функций, субгармонических в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и имеющих в каждой ограниченной области $D \subset \mathbf{C}_+$ положительную гармоническую мажоранту.

Следующая теорема дает описание функций класса SK и следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $v(z) \in SK$, μ — ее риссовская мера. Тогда:*

1) ***на вещественной оси существует мера ν, имеющая ограниченную полную вариацию на каждом сегменте $[a,b]$, причем, если $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$, то***

$$\nu([a,b]) = \lim_{y \to +0} \int_a^b v(x+iy)dx;$$

2) ***для почти всех в смысле меры Лебега $t \in (-\infty, \infty)$ существует предел***

$$\lim_{y \to +0} v(t+iy) = v(t),$$

причем функция $v(t)$ принадлежит классу Лебега L_1 на любом сегменте $[a,b]$;

3) ***имеет место равенство***

$$d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t),$$

где σ — мера сингулярная относительно меры Лебега;

4) ***для любого $R > 0$ выполняется неравенство***

$$\int_0^\pi |v(Re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi < \infty;$$

5) ***мера μ_1, $d\mu_1(\zeta) = 2\pi \mathrm{Im}\, \zeta d\mu(\zeta)$, конечна на любом компакте $K \subset \overline{\mathbf{C}}_+$;***

6) ***если функция $v(z)$ ограничена сверху в полукруге***

$$C_+(x_0,\delta) = \{z: |z - x_0| < \delta, \mathrm{Im}\, z > 0\},$$

то мера σ отрицательна на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Величина $v(t)$ называется граничным значением функции $v(z)$ в точке t, мера ν называется граничной мерой функции $v(z)$, а мера σ — сингулярной граничной мерой функции $v(z)$. Теорема 3 позволяет ввести для функций класса SK важное для теории субгармонических функций в полуплоскости понятие полной меры.

Пусть $v(z) \in SK$. Тогда мера λ, $d\lambda(\zeta) = d\mu_1(\zeta) - d\nu(t)$ называется полной мерой функции $v(z)$. Мы будем рассматривать меру λ как меру во всей плоскости. Мера λ обладает следующими свойствами:

i) ограничение меры λ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, z < 0$ есть нулевая мера;

$2i$) ограничение меры λ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ есть положительная мера;

$3i$) мера λ конечна на каждом компакте.

Мера λ в общем случае знакопеременная, ее отрицательная составляющая сосредоточена на вещественной оси и имеет вид

$$d\lambda_-(t) = v_+(t)dt + d\sigma_+(t).$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $v_1(z), v_2(z) \in SK$. *Для того чтобы эти функции имели одинаковые полные меры, необходимо и достаточно, чтобы существовала целая вещественная функция* $g(z)$ *такая, чтобы выполнялось равенство*

$$v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z), \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Теорема 5. *Пусть мера* λ *обладает свойствами i), 2i), 3i), сформулированными выше. Тогда существует функция* $v \in SK$ *такая, что ее полная мера совпадает с* λ.

Следующие ядра играют важную роль в теории функций субгармонических в полуплоскости.

$$K(z,\zeta) = K_0(z,\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta} \right|,$$

$$K_p(z,\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta} + z\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar\zeta}\right) + \ldots + \frac{z^p}{p}\left(\frac{1}{\zeta^p} - \frac{1}{\bar\zeta^p}\right)\right], \qquad p \geq 1.$$

Указанные равенства определяют ядра $K_p(z,\zeta)$ на множестве $(C_+ \times C_+) \setminus \operatorname{diag} (C_+ \times C_+)$. Однако эти ядра продолжаются непрерывным образом на множество $(\overline{C}_+ \times \overline{C}_+) \setminus \operatorname{diag} (\overline{C}_+ \times \overline{C}_+)$. Мы будем считать, что областью определения ядра $K_p(z,\zeta)$ будет множество $C_+ \times \overline{C}_+$, полагая $K_p(z,z) = -\infty$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Иногда нам будет удобно считать, что областью определения ядра $K_p(z,\zeta)$ является множество $C_+ \times C$, полагая $K_p(z,\zeta) = 0$ при $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Свойства ядер $K_p(z,\zeta)$ мы сформулируем в виде отдельного утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $z = re^{i\theta} = x + iy$, $\zeta = \tau e^{i\varphi} = \xi + i\eta$. *Для ядер* $K_p(z,\zeta)$ *справедливы следующие соотношения*:

1) $K(z,t) = 2 \operatorname{Im} \dfrac{1}{z-t} = \dfrac{-2y}{(x-t)^2 + y^2}$, $\qquad t$ — *вещественное*;

2) $$K_p(z,t) = 2 \operatorname{Im} \left[\frac{1}{z-t} + \frac{1}{t} + \ldots + \frac{z^p}{t^{p+1}} \right] =$$

$$= 2 \operatorname{Im} \frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(z-t)} = 2\frac{r^{p+1}\left(r \sin p\theta - t \sin (p+1)\theta\right)}{t^{p+1} \mid z-t \mid^2}, \qquad p \geq 1;$$

3) $K(z,\zeta)$ *отрицательно при* $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$;

4) $K_p(z,\zeta) = -\dfrac{2}{\eta} \displaystyle\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k\tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi$, $\qquad r < \tau$;

5) $K_p(z,\zeta) = -\dfrac{2}{\eta}\left[-\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{r^{2k}-\tau^{2k}}{kr^k\tau^k}\sin k\theta\sin k\varphi + \sum\limits_{k=p+1}^{\infty}\dfrac{\tau^k}{kr^k}\sin k\theta\sin k\varphi\right],\quad \tau<r;$

6) $\left|K_p(z,\zeta)\right| \le 4\dfrac{r^{p+1}}{\tau^{p+2}}\sin\theta,\quad \tau\ge 2r;$

7) $\left|K_p(z,\zeta)\right| \le 4\dfrac{r^{p}}{\tau^{p+1}}\sin\theta,\quad \tau\le\dfrac{1}{2}r,\quad p\ge 1;$

8) $\left|K(z,\zeta)\right| \le \dfrac{4}{r}\sin\theta,\quad \tau\le\dfrac{1}{2}r;$

9) *Существует величина M_p, зависящая только от p, такая, что при $|z-\zeta|\ge\alpha r$ выполняется неравенство*

$$\left|K_p(z,\zeta)\right| \le M_p\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\,\frac{r^{p+1}\sin\theta}{\tau^{p+1}(r+\tau)},\qquad p\ge 1,$$

$$\left|K(z,\zeta)\right| \le M\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\,\frac{r\sin\theta}{(r+\tau)^2};$$

10) *При $|\zeta-z|\ge\alpha r$ выполняется неравенство*

$$\left\|\nabla_\zeta K(z,\zeta)\right\| \le M(\alpha)\frac{y}{(r+\tau)^3};$$

11) *При $|\zeta-z|=\alpha r$ справедливы неравенства*

$$\frac{4}{\ln 3}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sin\theta+\alpha}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta+\alpha} \le K(z,\zeta) \le \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sin\theta+\alpha}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta+\alpha};$$

12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}K_p(zt,\zeta)dt = -\frac{2}{\eta}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{r^k}{k^2\tau^k}\sin k\theta\,\sin k\varphi,\quad r\le\tau;$

13) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}K_p(zt,\zeta)dt = -\frac{4}{\eta}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin k\theta\sin k\varphi + \frac{2}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau^k}{k^2r^k}\sin k\theta\sin k\varphi -$

$$-\frac{2}{\eta}\sum_{k=1}^{p}\frac{r^k}{k^2\tau^k}\sin k\theta\sin k\varphi,\qquad \tau<r;$$

14) *Функция* $\displaystyle\tau\int_0^1\frac{1}{t}K_p(zt,\zeta)dt$ *ограничена при* $\tau\in\left[\frac{1}{2}r,2r\right];$

15) *При всех z и ζ справедливо неравенство*

$$\left| \tau \int_0^1 \frac{1}{t} K(zt,\zeta)dt \right| \le \frac{1}{2}\pi^2;$$

16) $\left| \int_0^1 \frac{1}{t} K_p(zt,\zeta)dt \right| \le M_p \sin\theta \frac{r^{p+1}}{\tau^{p+2}}, \qquad \tau \ge 2r;$

17) $\left| \int_0^1 \frac{1}{t} K_p(zt,\zeta)dt \right| \le M_p \frac{r^p}{\tau^{p+1}}, \qquad \tau \le \frac{1}{2}r;$

18) $\left| \int_0^r K(tre^{i\theta},\zeta)dt \right| \le \pi^2 + 8\sin\theta \ln^+ \frac{r}{\tau};$

19) *Если $a(z)$ — непрерывная финитная функция в* $\mathbb{C}$, *то функция*

$$b(\zeta) = \iint_{\mathbb{C}_+} K_p(z,\zeta)a(z)dxdy$$

непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется формальным порядком функции $v(z)$ субгармонической в $\mathbb{C}_+$, если существует константа M такая, что

$$v(re^{i\theta}) \le MV(r), \qquad r \in (0,\infty), \qquad \theta \in (0,\pi).$$

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется полуформальным порядком функции $v(z)$ субгармонической в $\mathbb{C}_+$, если он является формальным порядком этой функции и существуют числа $q \in (0,1)$, $\delta \in (0,\frac{\pi}{2})$, M такие, что в каждой области

$$D(R,q,\delta) = \{ z: qR < |z| < \frac{1}{q}R, \delta < \arg z < \pi - \delta \}$$

найдется точка z такая, что $v(z) > -MV(|z|)$.

Через $SF(\rho(r))$ мы обозначаем класс функций субгармонических в $\mathbb{C}_+$, для которых $\rho(r)$ является формальным порядком.

Через $SHF(\rho(r))$ мы обозначаем класс функций субгармонических в $\mathbb{C}_+$, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком. Мы будем также использовать обозначения

$$C(z,a) = \{\zeta: |\zeta - z| < a\}, \qquad B(z,a) = \{\zeta: |\zeta - z| \le a\}.$$

Уточненный порядок $\rho(r)$ является формальным порядком для меры λ, если существует константа M такая, что

$$|\lambda|(B(0,r)) \le MV(r).$$

Субгармоническая в полуплоскости функция $v(z)$ называется функцией конечного порядка, если существует уточненный порядок $\rho(r)$, являющийся формальным по-

рядком функции $v(z)$. Мера λ в плоскости называется мерой конечного порядка, если существует уточненный порядок $\rho(r)$, являющийся формальным порядком меры λ.

В следующей теореме описываются свойства потенциалов ядер $K_p(z,\zeta)$, порожденных мерами конечного порядка. Эта теорема легко следует из теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть мера λ удовлетворяет условиям i, 2i, 3i. Пусть ее ограничение на вещественную ось имеет вид $d\lambda(t) = -v(t)dt - d\sigma(t)$, где σ — сингулярная мера. Пусть уточненный порядок $\rho(r) + 1$, $\rho = \lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) > 0$, есть формальный порядок меры λ. Пусть мера λ не нагружает некоторую окрестность нуля. Пусть в случае, когда ρ — целое, существует вещественное число c_ρ такое, что $R^\rho \mid \delta_\rho(R) \mid \le MV(R)$, где*

$$\delta_\rho(R) = c_\rho + \frac{1}{2}\iint\limits_{\overline{C}_+(0,R)} \frac{r^{2\rho} - \tau^{2\rho}}{r^{2\rho}} \frac{\sin\rho\varphi}{\rho\sin\varphi} \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^{\rho+1}}, \qquad \zeta = \tau e^{i\varphi}.$$

Тогда, если $p = [\rho]$ и

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\iint K_p(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta) + \sum_{k=1}^{p} d_k \operatorname{Im} z^k$$

с произвольными d_k, если ρ — нецелое, и с $d_p = \frac{2}{\pi}c_p$ и произвольными d_k при $k < p$, если ρ целое, то функция $v(z)$ обладает следующими свойствами:

1) *$v \in SK$ и λ — полная мера функции $v(z)$;*

2) *Для почти всех $x \in (-\infty,\infty)$ выполняется равенство $\lim\limits_{y\to+0} v(x+iy) = v(x)$;*

3) $v(re^{i\theta}) \le M\dfrac{1}{\sin\theta}V(r)$;

4) $\displaystyle\int_0^\pi \mid v(re^{i\theta}) \mid \sin\theta\, d\theta \le MV(r)$;

5) $\mid w(re^{i\theta}) \mid \le MV(r)$, где $w(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}v(tz)dt$;

6) *Если σ — отрицательная мера и выполняется неравенство $v(t) \le MV(\mid t \mid)$, t — вещественное, то $v(z) \in SHF(\rho(r))$.*

З а м е ч а н и е. В теореме рассматривается случай $\rho > 0$. Случай $\rho = 0$ имеет некоторые особенности и подробно рассмотрен в работе [5].

В следующей теореме описываются свойства классов $SF(\rho(r))$ и $SHF(\rho(r))$.

Теорема 8. *Пусть $v(z) \in SF(\rho(r))$ и в некоторой окрестности нуля представляется в виде*

$$v(z) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{Im} z^k.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Сингулярная граничная мера функции* $v(z)$ *отрицательная.*

2) *Для граничных значений* $v(t)$ *функции* $v(z)$ *выполняется неравенство* $v(t) \le MV(|t|)$.

3) *Для полной меры* λ *функции* $v(z)$ *справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{\overline{C}_+(0,R)} \frac{d|\lambda|(\zeta)}{1+|\zeta|^2} \le M\left(\int_0^R \frac{V(t)dt}{1+t^2} + \frac{V(R)}{R}\right).$$

4) $|\lambda|(\overline{C_+(0,R)}) \le MRV(R)$, *если* $\rho > 1$.

5) $\displaystyle\int_0^\pi |v(Re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \le MV(R)$, *если* $\rho > 1$.

6) $R\delta_1(R) \le MV(R)$, *если* $\rho = 1$,

$R^p\,|\delta_p(R)| \le MV(R)$, *если* $\rho = p > 1$,

где

$$\delta_p(R) = c_p + \frac{1}{2}\iint\limits_{\overline{C}_+(0,R)} \frac{r^{2p}-\tau^{2p}}{r^{2p}}\,\frac{\sin p\varphi}{p\sin\varphi}\,\frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^{p+1}}, \qquad \zeta = \tau e^{i\varphi}.$$

7) *Если* $\rho > 1$, *то* $v(z) \in SHF(\rho(r))$.

Если $v(z) \in SHF(\rho(r))$, *то* $v(z)$ *обладает еще свойствами, которые раскрываются в следующих пунктах.*

8) $|\lambda|(\overline{C_+(0,R)}) \le MRV(R)$.

9) $\displaystyle\int_0^\pi |v(Re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \le MV(R)$.

10) $R|\delta_1(R)| \le MV(R)$, *если* $\rho = 1$.

Доказательства этой и следующей теорем в основном содержатся в работе [4]. Поэтому мы эти доказательства здесь не приводим.

Теорема 9. *Пусть* $v(z) \in SF(\rho(r))$, $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, $p = [\rho]$. *Пусть* λ *— полная мера функции* $v(z)$, λ_1 *— ограничение* λ *на круг* $B(0,1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. *Тогда существуют вещественные числа* d_k *такие, что справедливо равенство*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\iint K(z,\zeta)\, d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\iint K_p(z,\zeta)\, d\lambda_2(\zeta) + \sum_{k=1}^{p} d_k \operatorname{Im} z^k, \qquad \rho \ge 1,$$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\int K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) + d_1 y, \quad d_1 \le 0, \quad \rho < 1.$$

При оценке субгармонической функции $v(z)$ ее обычно представляют в виде двух слагаемых $v(z) = r(z) + s(z)$ —регулярной и сингулярной частей. Причем сингулярная часть $s(z)$ — это потенциал риссовской или полной меры функции $v(z)$ по некоторой окрестности точки z, а $r(z) = v(z) - s(z)$. Оценку регулярной части для функции конечного порядка можно производить двумя способами. Первый из них исходит из представления $v(z)$, даваемого теоремой 9. Тогда, используя свойства ядер $K_p(z,\zeta)$, нужно повторить с большими или меньшими вариациями рассуждения, которые применяются для случая целых функций и изложены в работе [6]. Другой способ — это использование интегральных представлений в областях, отличных от полуплоскости. В этом случае нужно использовать свойства функции Грина соответствующей области. Оценки регулярной части функции $v(z)$ приводятся в следующей теореме. В этой же теореме изучаются свойства субгармонических функций промежуточного класса между $SHF(\rho(r))$ и $SF(\rho(r))$. Можно показать, что этот класс соответствует субгармоническим функциям с конечным индикатором. Каждая функция из класса $SHF(\rho(r))$ имеет конечный индикатор, в то время как индикатор функции $v(z) \in SF(\rho(r))$ может тождественно равняться минус-бесконечности. Так как при доказательстве используются стандартные в теории функций конечного порядка методы, то мы его опускаем. Приводимая ниже теорема решает более легкую часть задачи об оценках функции $v(z)$,она дает оценку ее регулярной части.

Теорема 10. *Пусть* $v(z) \in SF(\rho(r))$. *Пусть существуют числа* $q \in (0,1)$, $\delta \in (0,\pi/2)$, M *и последовательность* $R_n \to \infty$ *такие, что в каждой области* $D_n = D(R_n,q,\delta)$ *найдется точка* z, *в которой выполняется неравенство* $v(z) > -MV(|z|)$. *Пусть* λ *— полная мера функции* $v(z)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $|\lambda| \left(B(0,\frac{1}{q_1} R_n)\right) \le MR_n V(R_n), \quad M = M(q,q_1), \quad q_1 \in (0,1);$

2) $\displaystyle\int_0^\pi \left| v(re^{i\theta}) \right| \sin\theta\, d\theta \le MV(r), \quad r \in \left[q_1 R_n, \frac{1}{q_1} R_n\right];$

3) *Если* $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$ *— нецелое число, то для любых* $q_1 \in (0,1)$, $\delta_1 \in (0,\pi/2)$ *найдется функция* $v_1(z)$ *субгармоническая во всей плоскости и имеющая формальный порядок* $\rho(r)$ *такая, что функция* $v_2(z) = v(z) - v_1(z)$ *обладает свойствами:*

а) $v_2(z)$ *— субгармоническая в* $\mathbb{C}_+$ *функция;*

б) $v_2(z)$ *— гармоническая функция на множестве* $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(R_n,q_1,\delta_1)$;

в) $\left| v_2(z) \right| \le MV(r), \quad z \in D;$

г) $\left| v_2(z+hz) - v_2(z) \right| \le M\,|h|\,V(r), \quad z, z+hz \in D;$

4) $v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C(z,tr)} K(z,\zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{\sin\theta}{t^2} d(r,\theta,t) V(r)$, *где* $z = re^{i\theta}$, $K(z,\zeta) = 0$ *при* $\operatorname{Im}\zeta < 0$, $d(r,\theta,t)$ — *функция, ограниченная на множестве*

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[q_1 R_n, \frac{1}{q_1} R_n \right] \right) \times \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right];$$

5) $$v(z + hz) - v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C(z,tr)} \left(K(z + hz, \zeta) - K(z,\zeta) \right) d\lambda(\zeta) + \frac{|h|}{t^2} d_1(z,h,t) V(r),$$

где $d_1(z,h,t)$ — *ограниченная функция, если*

$$r = |z| \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[q_1 R_n, \frac{1}{q_1} R_n \right], \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im}(z + hz) > 0, \quad t \in (0, \tfrac{1}{2}], \quad |h| \le \tfrac{1}{2} t.$$

Часть 1

Мы переходим к изучению непрерывности в евклидовой топологии субгармонической функции в точках, принадлежащих области субгармоничности. Вначале мы сформулируем две теоремы на эту тему, принадлежащие М. Арсову и М. Л. Содину. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функциия в области D, μ — риссовская мера функции $v(z)$, D_δ — множество точек z таких, что $C(z,\delta) \subset D$. Пусть

$$\Phi_1(z,\delta) = \int_0^\delta \frac{\mu(B(z,t))}{t} dt, \qquad \Phi_1(\delta) = \sup_{z \in D_\delta} \Phi_1(z,\delta).$$

Теорема 11 (М. Арсов [1]). *Пусть* $v(z)$ — *субгармоническая функция в области* D *и пусть* $\lim\limits_{\delta \to 0} \Phi_1(\delta) = 0$. *Тогда функция* $v(z)$ *есть непрерывная функция в области* D.

Пусть μ — конечная положительная мера в плоскости. Обозначим

$$\Phi_2(\delta) = \sup_z \delta \int_\delta^1 \frac{\mu(B(z,t))}{t^2} dt.$$

Если $M_1 = \mu(\mathrm{C})$, то справедливо неравенство

$$\delta \int_\delta^1 \frac{\mu(B(z,t))}{t^2} dt = \delta \int_\delta^{\delta^{1/2}} \frac{\mu(B(z,t))}{t^2} dt + \delta \int_{\delta^{1/2}}^1 \frac{\mu(B(z,t))}{t^2} dt \le$$

$$\le \int_\delta^{\delta^{1/2}} \frac{\mu(B(z,t))}{t} dt + M_1 \delta \int_{\delta^{1/2}}^1 \frac{dt}{t^2} \le \Phi_1(\delta^{1/2}) + M_1 \sqrt{\delta}.$$

Поэтому $\Phi_2(\delta) \le \Phi_1(\sqrt{\delta}) + M_1\sqrt{\delta}$.

Теорема 12 (М. Л. Содин [7]). *Пусть $v(z)$ — субгармоническая во всей плоскости функция, μ — ее риссовская мера, $\mu(\mathbb{C}) < \infty$. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $v(z)$. Тогда справедливы неравенства*

$$\Phi_1(\delta) \le \omega(\delta) \le M\left(\Phi_1(\delta) + \Phi_2(\delta)\right).$$

З а м е ч а н и е. С учетом написанной для функции $\Phi_2(\delta)$ оценки равенство $\lim\limits_{\delta\to 0} \Phi_1(\delta) = 0$ является необходимым и достаточным условием непрерывности функции $v(z)$ во всей плоскости.

Теорема 13. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в окрестности точки z_0. Пусть z_0 — предельная точка для множества E. Для того чтобы функция $v(z)$ была непрерывной функцией в точке z_0 вдоль множества E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim \Phi_1(z,\delta) = 0, \ z \to z_0, z \in E, \delta \to 0. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть круг $B(z_0,3R)$ лежит в области субгармоничности функции $v(z)$. Мы будем исходить из формулы Иенсена для субгармонических функций

$$v(z_0) = -\int_0^R \frac{\mu(B(z_0,t))}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi.$$

Если написать аналогичное равенство с заменой z_0 на z, а затем вычесть одно равенство из другого, то получим

$$\int_0^\delta \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt = \int_0^\delta \frac{\mu(B(z_0,t))}{t}\,dt + \int_\delta^R \frac{\mu(B(z_0,t)) - \mu(B(z,t))}{t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v(z + Re^{i\varphi}) - v(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}))\,d\varphi + v(z_0) - v(z). \tag{2}$$

Пусть теперь ε — произвольное строго положительное число. Из конечности $v(z_0)$ следует сходимость интеграла

$$\int_0^R \frac{\mu(B(z_0,t))}{t}\,dt.$$

Если этот интеграл сходится, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\int_0^{\delta_0} \frac{\mu(B(z_0,t))}{t}\, dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Если мера μ не нагружает окружность $|\zeta - z_0| = t$, то выполняется равенство

$$\lim_{z \to z_0} \mu(B(z,t)) = \mu(B(z_0,t)).$$

В частности, это равенство выполняется для почти всех $t \in [0,R]$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{z \to z_0} \int_{\delta_0}^{R} \frac{\mu(B(z_0,t)) - \mu(B(z,t))}{t}\, dt = 0.$$

По теореме Рисса о представлении субгармонической функции справедливо равенство

$$v(w) = h(w) + \iint_{C(z_0,3R)} \ln|w - \zeta|\, d\mu(\zeta), \qquad w \in C(z_0,3R),$$

где $h(w)$ — гармоническая функция в круге $C(z_0,3R)$. Поэтому существует число $\delta_2 > 0$ такое, что при $|z - z_0| < \delta_2$ и для всех $\varphi \in [0,2\pi]$ будет выполняться неравенство

$$\left| h(z_0 + Re^{i\varphi}) - h(z + \mathrm{Re}^{i\varphi}) \right| \le \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда для указанных z выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left| \int_0^{2\pi} \left(h(z_0 + Re^{i\varphi}) - h(z + Re^{i\varphi})\right) d\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Далее, учитывая равенство $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a - e^{i\varphi}|\, d\varphi = \ln^+ a$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \iint_{C(z_0,3R)} \left(\ln|z_0 + Re^{i\varphi} - \zeta| - \ln|z + Re^{i\varphi} - \zeta|\right) d\mu(\zeta)\, d\varphi =$$

$$\iint_{C(z_0,3R)} \left(\ln^+\left|\frac{z_0 - \zeta}{R}\right| - \ln^+\left|\frac{z - \zeta}{R}\right|\right) d\mu(\zeta).$$

Подынтегральная функция непрерывна по совокупности переменных z и ζ и поэтому интеграл является непрерывной функцией от z. Учитывая все вышесказанное, получим, что существует число $\delta_3 > 0$ такое, что при $|z - z_0| < \delta_3$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(v(z_0+Re^{i\varphi})-v(z+Re^{i\varphi})\right)d\varphi\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Предположим теперь, что функция $v(z)$ непрерывна в точке z_0 вдоль множества E. Тогда из равенства (2) и доказанных неравенств следует, что существует число $\delta_4>0$ такое, что при $|z-z_0|<\delta_4$, $z\in E$, будет выполняться неравенство

$$\int_0^{\delta_0}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt<\varepsilon.$$

Тогда при $\delta<\delta_0$, $|z-z_0|<\delta_4$ справедливо неравенство

$$\int_0^{\delta}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt\le\int_0^{\delta_0}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt<\varepsilon.$$

Тем самым доказано равенство (1). Обратно, пусть выполняется равенство (1). Тогда

$$\int_0^{R}\frac{\mu(B(z_0,t))}{t}\,dt<\infty.$$

Теперь из равенств (1) и (2) и доказанных неравенств следует непрерывность функции $v(z)$ в точке z_0 вдоль множества E. Теорема доказана.

Из этой теоремы как следствие получается такой вариант принципа непрерывности Василеско и Эванса.

Теорема 14. *Пусть функция $v(z)$ субгармонична в некоторой окрестности точки z_0, принадлежащей носителю $s(\mu)$ ее риссовской меры. Пусть z_0 — предельная точка для $s(\mu)$. Пусть $v(z)$ непрерывна в точке z_0 вдоль носителя $s(\mu)$. Тогда $v(z)$ непрерывна в точке z_0.*

Доказательство. По теореме 13

$$\lim\int_0^{\delta}\frac{\mu(B(w,t))}{t}\,dt=0,\qquad w\to z_0,\ w\in s(\mu),\ \delta\to 0. \tag{3}$$

Пусть z — произвольная точка из области субгармоничности функции $v(z)$, $a(z)=d(z,s(\mu))$ — расстояние от точки z до $s(\mu)$. Пусть $w\in s(\mu)$ такая точка, что $a(z)=d(z,w)$. Если $\delta<a(z)$, то

$$\int_0^{\delta}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt=0.$$

В противном случае

$$\int_0^\delta \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt = \int_{a(z)}^\delta \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt \le \int_{a(z)}^\delta \frac{\mu(B(w,t+a(z)))}{t}\,dt =$$

$$= \int_{a(z)}^\delta \frac{\mu(B(w,t+a(z)))}{t+a(z)}\,\frac{t+a(z)}{t}\,dt \le 2\int_{a(z)}^\delta \frac{\mu(B(w,t+a(z)))}{t+a(z)}\,dt =$$

$$= 2\int_{2a(z)}^{\delta+a(z)} \frac{\mu(B(w,u))}{u}\,du \le 2\int_0^{\delta+a(z)} \frac{\mu(B(w,u))}{u}\,du.$$

Теперь из равенства (3) следует, что

$$\lim \Phi_1(z,\delta) = 0, \qquad z \to z_0,\ \delta \to 0.$$

Вновь, применяя теорему 13, получим, что функция $v(z)$ непрерывна в точке z_0. Теорема доказана.

Теорема 15. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в области D, $D_1 \subset D$, $d(D_1, CD) = \delta_0 > 0$. Для того чтобы функция $v(z)$ была непрерывной в каждой точке множества D_1, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_1(z,\delta)$ была непрерывной в каждой точке множества $D_1 \times [0, \frac{1}{2}\delta_0]$.*

Доказательство.

Достаточность. Пусть $z_0 \in D_1$. Поскольку $\Phi_1(z_0,0) = 0$, а функция $\Phi_1(z,\delta)$ непрерывна в точке $(z_0,0)$, то $\lim \Phi_1(z,\delta) = 0$, $z \to z_0$, $\delta \to 0$. По теореме 13 функция $v(z)$ непрерывна в точке z_0.

Необходимость. Пусть $z_0 \in D_1$, $\delta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\delta_0\right)$, $\gamma \in (0,\delta_1)$. По теореме 13 функция $\Phi_1(z,\delta)$ непрерывна в точке $(z_0,0)$. Имеем

$$\Phi_1(z_0,\delta_1) - \Phi_1(z,\delta) = \Phi_1(z_0,\delta_1) - \Phi(z,\delta_1) - \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt =$$

$$= \Phi_1(z_0,\gamma) - \Phi_1(z,\gamma) - \int_\gamma^{\delta_1} \frac{\mu(B(z_0,t)) - \mu(B(z,t))}{t}\,dt - \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt.$$

Пусть ε — произвольное строго положительное число. Из непрерывности функции $\Phi_1(z,\delta)$ в точке $(z_0,0)$ следует, что существуют числа $\gamma \in (0,\delta_1)$ и $r_1 > 0$ такие, что при $|z - z_0| < r_1$ будет выполняться неравенство

$$|\Phi_1(z_0,\gamma) - \Phi_1(z,\gamma)| < \varepsilon.$$

При доказательстве теоремы 13 мы получили, что

$$\lim_{z\to z_0}\int\limits_{\gamma}^{\delta_1}\frac{\mu(B(z_0,t))-\mu(B(z,t))}{t}\,dt=0.$$

Кроме того, при $|z-z_0|<\frac{1}{8}\delta_0$, $|\delta-\delta_1|<\frac{1}{2}\delta_0$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt\right|\le\mu\left(B(z_0,\tfrac{3}{4}\delta_0)\right)\left|\ln\frac{\delta}{\delta_1}\right|.$$

Из проведенных рассуждений следует, что $\lim\Phi_1(z,\delta)=\Phi_1(z_0,\delta_1)$, $z\to z_0,\delta\to\delta_1$. Теорема доказана.

Почти дословным повторением проведенных рассуждений доказывается следующая теорема.

Теорема 16. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в области D, $D_1\subset D$, $d(D_1,CD)=\delta_0>0$. Для того чтобы функция $v(z)$ была непрерывной на множестве D_1 вдоль этого множества, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_1(z,\delta)$ была непрерывной на множестве $D_1\times\left[0,\frac{1}{2}\delta_0\right]$ вдоль этого множества.*

Мы переходим к изучению поведения субгармонической функции в окрестности граничной точки. Отметим, что близкие вопросы, касающиеся существования некасательного предельного значения в заданной точке t_0 вещественной оси модуля голоморфной функции из класса H^∞ в полуплоскости, рассматривались в работе [8].

Теорема 17. *Пусть t_0 — вещественное число, $v(z)$ — субгармоническая функция в области D, содержащей полукруг $C_+(t_0,3\alpha)=\{z:|z-t_0|<3\alpha,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$. Пусть интервал $(t_0-3\alpha,t_0+3\alpha)$ является частью границы области D. Пусть функция $v(z)$ имеет положительную гармоническую мажоранту в полукруге $C_+(t_0,3\alpha)$. Пусть функция $v(t)=\lim\limits_{y\to+0}v(t+iy)$, $t\in(t_0-3\alpha,t_0+3\alpha)$, непрерывна в точке t_0. Пусть сингулярная граничная мера функции $v(z)$ на интервале $(t_0-3\alpha,t_0+3\alpha)$ не нагружает некоторую окрестность точки t_0. Пусть μ — риссовская мера функции $v(z)$, а мера μ_1 определяется по формуле*

$$d\mu_1(\zeta)=2\pi\,\mathrm{Im}\,\zeta\,d\mu(\zeta).$$

Пусть $E\subset C_+(t_0,3\alpha)$ и t_0 — предельная точка для множества E. Для того чтобы функция $v(z)$ была непрерывной функцией в точке t_0 вдоль множества E, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta>0$ выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}}y\int\limits_0^{\delta}\frac{\mu_1(C_+(z,t))}{t(t+y)^2}\,dt=0,\qquad z=x+iy. \tag{4}$$

Доказательство. Можно считать, что сингулярная граничная мера равняется нулю на интервале $(t_0 - 3\alpha,\ t_0 + 3\alpha)$. Пусть $G(z,\zeta)$ и $G_1(z,\zeta)$ — функции Грина полукруга $C_+(t_0,2\alpha)$ и верхней полуплоскости. Тогда из теорем 1 и 2 следует, что для $z \in C_+(t_0,2\alpha)$ выполняется равенство

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(t_0,2\alpha)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,t_0+2\alpha e^{i\varphi})}{\partial n} v(t_0+2\alpha e^{i\varphi})\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-2\alpha}^{t_0+2\alpha} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n} v(t)\,dt = -\iint\limits_{C_+(t_0,2\alpha)\setminus C_+(t_0,\alpha)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) - \iint\limits_{C_+(t_0,\alpha)} \big(G(z,\zeta) - G_1(z,\zeta)\big)\,d\mu(\zeta) +$$

$$+\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,t_0+2\alpha e^{i\varphi})}{\partial n} v(t_0+2\alpha e^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-2\alpha}^{t_0+2\alpha}\left(\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} - \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n}\right) v(t)dt -$$

$$-\iint\limits_{C_+(t_0,\alpha)} G_1(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-2\alpha}^{t_0+2\alpha} \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n} v(t)\,dt = \sum_{k=1}^{6} v_k(z).$$

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что выполняются равенства

$$\lim_{z\to t_0} v_k(z) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \lim_{z\to t_0} v_6(z) = v(t_0).$$

Таким образом, теорема сводится к соответствующему утверждению для функции

$$v_5(z) = -\iint\limits_{C_+(t_0,\alpha)} G_1(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_+(t_0,\alpha)} K(z,\zeta)\,d\mu_1(\zeta).$$

Будем считать, что μ_1 — мера во всей комплексной плоскости, и что ее ограничение на внешность $C_+(t_0,\alpha)$ есть нулевая мера. Мы можем также считать, что $t_0 \geq 4$, $\alpha < 1$. Тогда, если $\zeta - z = ure^{i\psi}$, $z = re^{i\theta}$, то согласно утверждению 11 теоремы 6 выполняются неравенства

$$v_5(z) \leq M\frac{1}{r}\iint\limits_{C(t_0,\alpha)} \frac{1}{u+\sin\theta}\ln\frac{u+2\sin\theta}{u}\,d\mu_1(\zeta) \leq$$

$$\leq M\frac{1}{r}\int\limits_0^1 \frac{1}{u+\sin\theta}\ln\frac{u+2\sin\theta}{u}\,d\mu_1(C(z,ur)), \tag{5}$$

$$-v_5(z) \geq M\frac{1}{r}\int\limits_0^\delta \frac{1}{u+\sin\theta}\ln\frac{u+2\sin\theta}{u}\,d\mu_1(C(z,ur)). \tag{6}$$

Последнее неравенство выполняется для некоторого $\delta > 0$ и для всех z, достаточно близких к t_0. Пусть

$$\varphi(u) = \frac{1}{u + \sin\theta} \ln \frac{u + 2\sin\theta}{u}.$$

Тогда

$$-\varphi'(u) = \frac{2\sin\theta}{u(u+\sin\theta)^2}\left[\frac{u}{2\sin\theta}\ln\left(1 + \frac{2\sin\theta}{u}\right) + \frac{u + \sin\theta}{u + 2\sin\theta}\right],$$

$$\frac{\sin\theta}{u(u+\sin\theta)^2} \le -\varphi'(u) \le \frac{4\sin\theta}{u(u+\sin\theta)^2}.$$

Поэтому

$$|v_5(z)| \le M\frac{1}{r}\frac{1}{1+\sin\theta}\ln(1 + 2\sin\theta)\mu_1(C(z,r)) + M\frac{\sin\theta}{r}\int_0^1 \frac{\mu_1(C(z,ur))}{u(u+\sin\theta)^2}\,du =$$

$$= M\frac{1}{r}\frac{1}{1+\sin\theta}\ln(1 + 2\sin\theta)\mu_1(C(z,r)) + My\int_0^r \frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\,dt.$$

Если теперь выполняется равенство (4), то $\lim\limits_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}} v_5(z) = 0$ и "достаточная" часть теоремы доказана. Пусть теперь $\lim\limits_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}} v_5(z) = 0$. Тогда, в частности, для всех $z \in E$ и близких к t_0 величина $v_5(z)$ будет конечной. Из этого следует сходимость интеграла

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{u}\,d\mu_1(C(z,ur)),$$

из чего, в свою очередь, следует равенство $\lim\limits_{u\to+0} \ln\frac{1}{u}\mu_1(C(z,ur)) = 0$.

Тогда

$$\frac{1}{r}\int_0^\delta \varphi(u)\,d\mu_1(C(z,ur)) = \frac{1}{r}\varphi(\delta)\mu_1(C(z,\delta r)) + \frac{1}{r}\int_0^\delta(-\varphi'(u))\mu_1(C(z,ur))\,du \ge$$

$$\ge \frac{\sin\theta}{r}\int_0^\delta \frac{\mu_1(C(z,ur))}{u(u+\sin\theta)^2}\,du = y\int_0^{\delta r}\frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\,dt.$$

Из полученного неравенства и (6) следует равенство (4). Теорема полностью доказана.

Теорема 18. *Равенство* (4) *эквивалентно следующим двум условиям*:

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in E}} \frac{1}{y} \int_0^y \frac{\mu_1(C(z,t))}{t}\, dt = 0 \tag{7}$$

и

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in E}} y \int_y^\delta \frac{\mu_1(C(z,t))}{t^3}\, dt = 0. \tag{8}$$

Пусть $S(t_0,\delta) = \{ z : \delta < \arg(z - t_0) < \pi - \delta \}$. *Тогда, если для некоторого* $\delta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *точка* t_0 *является предельной точкой множества* $E \cap S(t_0,\delta)$, *то из равенства* (8) *следует равенство*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mu_1(C(t_0,t))}{t} = 0. \tag{9}$$

В случае, если для некоторого $\delta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $E \subset S(t_0,\delta)$, *то равенства* (8) *и* (9) *эквивалентны.*

Доказательство. Равенство (4) эквивалентно следующим двум равенствам:

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in E}} y \int_0^y \frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\, dt = 0 \tag{10}$$

и

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in E}} y \int_y^\delta \frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\, dt = 0. \tag{11}$$

Равенство (10) эквивалентно равенству (7), а равенство (11) эквивалентно равенству (8). Равенство (8), в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in E}} y \int_y^\delta \frac{\mu_1(C(z,Nt))}{t^3}\, dt = 0 \tag{12}$$

для любого $N \ge 1$. Теперь, если $z \in S(t_0,\delta)$, то для достаточно больших N справедливы соотношения при $t \ge y$

$$C(t_0,t) \subset C(z,Nt) \subset C(t_0,2Nt). \tag{13}$$

Учитывая эти соотношения, получим, что если t_0 — предельная точка для множества $E \cap S(t_0,\delta)$, то из равенства (12) следует равенство

$$\lim_{y\to+0} y\int_y^\delta \frac{\mu_1(C(t_0,t))}{t^3}\,dt = 0. \tag{14}$$

Равенство (14) эквивалентно равенству (9). Если $E \subset S(t_0,\delta)$, то равенства (14) и (12) эквивалентны. Поэтому эквивалентны равенства (8) и (9). Теорема доказана.

Как следствие теоремы 17 получается следующая теорема.

Теорема 19. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в полукруге $C_+(t_0,\alpha)$ и имеет в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Пусть μ — риссовская мера функции $v(z)$, $d\mu_1(\zeta) = 2\pi\mathrm{Im}\,\zeta d\mu(\zeta)$, $d\nu(t)$ — граничная мера функции $v(z)$ на интервале $(t_0-\alpha,\ t_0+\alpha)$. Пусть функция $\nu(t)$ имеет в точке t_0 конечную производную $\nu'(t_0)$. Пусть $E \subset C_+(t_0,\alpha)$ и точка t_0 — предельная точка для множества E. Пусть множество E не касается вещественной оси в точке t_0, то есть*

$$\varliminf_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}} \frac{y}{|z-t_0|} > 0.$$

Тогда для того чтобы функция $v(z)$ имела предел в точке t_0 вдоль множества E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}} y\int_0^\delta \frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\,dt = 0. \tag{15}$$

Замечание. В рассматриваемом случае по теореме 18 равенство (15) эквивалентно равенствам

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in E}} \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\mu_1(C(z,t))}{t}\,dt = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \frac{\mu_1(C(t_0,t))}{t}\,dt = 0.$$

Теорема 20. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в полукруге $C_+(t_0,\alpha)$, $v(t) = \lim\limits_{y\to+0} v(t+iy)$, $|v(t_0)| < \infty$. Пусть μ — риссовская мера функции $v(z)$, $d\mu_1(\zeta) = 2\pi\mathrm{Im}\,\zeta d\mu(\zeta)$. Для справедливости равенства*

$$\lim v(z) = v(t_0), \qquad z\to t_0,\ \mathrm{Im}\,z>0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *Функция $v(z)$ имеет положительную гармоническую мажоранту в некотором полукруге $C_+(t_0,\beta)$, $\beta>0$;*

2) $\lim\limits_{t\to t_0} v(t) = v(t_0)$, *$t$ — вещественное;*

3) *Сингулярная граничная мера* σ *функции* $v(z)$ *не нагружает некоторую окрестность точки* t_0 ;

4) *Для некоторого* $\delta > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} y \int_0^{\delta} \frac{\mu_1(C(z,t))}{t(t+y)^2}\, dt = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Если $\lim v(z) = v(t_0)$, $z \to t_0$, $\operatorname{Im} z > 0$, то функция $v(z)$ будет ограничена в полукруге $C_+(t_0,\beta)$ при некотором $\beta > 0$ и поэтому будет иметь в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Далее, допустим, что условие 2 не выполнено. Тогда существует последовательность t_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(t_n) \neq v(t_0)$. Так как $v(t_n) = \overline{\lim\limits_{y\to+0}}\, v(t_n + iy)$, то существует $y_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ такое, что $\left| v(t_n) - v(t_n + iy_n) \right| < \frac{1}{n}$. Мы считаем, для определенности, что

$v(t_n) \neq \infty$. Случай, когда это не выполняется, рассматривается аналогично. Мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} v(t_n + iy_n) \neq v(t_0)$. Это противоречит равенству $\lim v(z) = v(t_0)$, $z \to t_0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Справедливость условия 2 доказана.

Пусть $\beta_1 > 0$ и такое, что

$$P = (t_0 - \beta_1,\, t_0 + \beta_1)\times(0,\beta_1) \subset C_+(t_0,\beta).$$

Тогда функция $v(z)$ будет ограничена в прямоугольнике P. По теореме 1 для почти всех $t \in (t_0 - \beta_1,\, t_0 + \beta_1)$ существует предел

$$v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy).$$

По этой же теореме граничная мера ν на вещественной оси определяется по формуле

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0} \int_a^b v(t+iy)\, dt, \text{ если } \quad \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\nu([a,b]) = \int_a^b v(t)dt.$$

Таким образом, мера ν абсолютно непрерывна на интервале $(t_0 - \beta_1,\, t_0 + \beta_1)$. Тем самым условие 3 доказано. Из условий 1,2,3 и теоремы 17 следует условие 4.

Если выполняются условия 1, 2, 3, 4, то по теореме 17 получаем, что $\lim v(z) = v(t_0)$, $z \to t_0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 21. *Пусть $v(z) \in SK$, λ — полная мера функции $v(z)$. Пусть граничная мера функции $v(z)$ равна нулю. Для того чтобы функция $v(z)$ была непрерывной функцией на множестве $D \subset \overline{C}_+$ вдоль этого множества, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\Psi_2(z,\delta) = \begin{cases} y\int\limits_0^{\delta} \dfrac{\lambda(B(z,t))}{t(t+y)^2}\,dt, & y>0, \quad z = x+iy, \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

была непрерывной на множестве $D \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ вдоль этого множества.

Доказательство. Напомним обозначение

$$\Phi_1(z,\delta) = \int\limits_0^{\delta} \frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt,$$

где μ — риссовская мера функции $v(z)$. Пусть $\delta \le qr\sin\theta$, $q \in (0,1)$, $z = re^{i\theta}$. Тогда при $t \in [0,\delta]$ справедливы неравенства

$$\lambda(B(z,t)) = 2\pi \iint\limits_{B(z,t)} \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta) \le 2\pi(1+q)y\mu(B(z,t)),$$

$$\lambda(B(z,t)) \ge 2\pi(1-q)y\mu(B(z,t)).$$

Из этих оценок следует неравенство

$$2\pi\frac{1-q}{(1+q)^2}\Phi_1(z,\delta) \le \Psi_2(z,\delta) \le 2\pi(1+q)\Phi_1(z,\delta). \tag{16}$$

Пусть функция $v(z)$ непрерывна на D вдоль этого множества. Пусть $z_0 \in D$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Тогда из неравенства (16) и теоремы 13 следует, что $\lim \Psi_2(z,\delta) = 0$, $z \to z_0$, $z \in D$, $\delta \to 0$. Из этого равенства, повторяя рассуждение из доказательства теоремы 15, получим, что $\lim \Psi_2(z,\delta) = \Psi_2(z_0,\delta_0)$, $z \to z_0$, $z \in D$, $\delta \to \delta_0$.

Пусть $z_0 \in D$, $\operatorname{Im} z_0 = 0$. По теореме 17

$$\lim \Psi_2(z,\delta) = \Psi_2(z_0,\delta_0) = 0, \qquad z \to z_0,\ z \in D,\ \delta \to \delta_0.$$

Таким образом, функция $\Psi_2(z,\delta)$ непрерывна на множестве $D \times \left[0,\frac{1}{2}\right]$ вдоль этого множества. Вторая часть теоремы следует из неравенства (16) теорем 13 и 17. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Американского математического общества.

Список литературы

1. *M. G. Arsove*, Normal families of subharmonic functions.— Proc. Am. Math. Soc. (1956), v. 7, № 1–2, p. 115—126.
2. *М. Брело*, О топологиях и границах в теории потенциала. Мир. Москва (1972), 222 с.

3. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1968), № 6, с. 3—29.
4. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1968), № 7, с. 59—84.
5. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1969), № 8, с. 126—135.
6. *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, Москва (1956), 632 с.
7. *М. Л. Содин*, Об асимптотической регулярности субгармонических функций конечного порядка.— Укр. мат. журнал (1984), т. 36, № 5, с. 646—650.
8. *А. П. Мул*, Необходимые и достаточные условия существования граничных значений модуля ограниченной аналитической в полуплоскости функции.— Известия АН СССР, сер. матем. (1984), т. 48, № 4, с. 750—778.
9. *Н. В. Говоров*, Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Наука, Москва (1986), 240 с.
10. *ITO JUN-ITI*, Subharmonic functions in a half-plane.— Trans. Amer. Math. Soc. (1967), v. 129, № 3, p. 479—499.

Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions

A. F. Grishin

The paper has two parts and a preliminary. There are an important definition of a complete measure of subharmonic function in a half-plane and a new form of expansion of subharmonic functions of finite order in the half-plane in the preliminary. Questions of continuity of subharmonic function in a fixed point which placed in a domain of subharmonicity or on a straight part of boundary are studied in the first part of the paper.