Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с.232–239

УДК 514

Геодезические слоения с положительной смешанной секционной кривизной

В. Ю. Ровенский

Красноярский педагогический институт, Россия, 660049, г. Красноярск, ул. Лебедевой, 89
e-mail: roven@bdk.krasnoyarsk.su

Статья поступила в редакцию 16 декабря 1993 г.

В статье доказана теорема о слоениях риманова многообразия на замкнутые геодезические, дающая внутренне геометрическое объяснение результата, полученного ранее автором: если линейчатая поверхность M^{n+1} в сфере S^N с образующей S^1 однозначно проектируется на вполне геодезическую S^{n+1} (например, имеет положительную смешанную секционную кривизну), то n — четное число.

В статті доведено теорему про шарування ріманового многовиду на замкнені геодезичні, яка дає внутрішнє геометричне пояснення результату, отриманого раніше автором: якщо лінійчата поверхня M^{n+1} в сфері S^N з твірною S^1 однозначно проектується на цілком геодезичну S^{n+1} (наприклад, має додатну змішану секційну кривину), то n — парне число.

В работах [1,2] показано, что если линейчатая поверхность M^{n+1} в сфере S^N или в вещественном проективном пространстве RP^N с одномерной образующей S^1 или RP^1 однозначно проектируется на вполне геодезическую S^{n+1} или RP^{n+1} (для этого достаточно иметь положительную смешанную секционную кривизну), то n — четное число. (Примером для любого четного n может служить расслоение Хопфа сферы S^{n+1} на большие окружности и его факторизация по двулистному накрытию RP^{n+1}.) В данной статье выявлены внутренне геометрические и топологические причины этого факта.

Определение. *Векторное поле $y: L \to TL^{\perp}$ вдоль геодезической кратчайшей L: $[0,l] \to M$ назовем однозначно проектируемым, если существует такая 2-мерная плоскость $\sigma(y) \subset TL^{\perp}(0)$, содержащая вектор $y(0)$, что векторы $y(t)$, $y'(t)$, $0 \le t < l$ при параллельном переносе в точку $L(0)$ вдоль L и затем проекции на $\sigma(y)$ составляют базис $\sigma(y)$.*

Свойством однозначной проектируемости обладают, например, поля Якоби без нулей в S^N или в RP^N.

Теорема. *Пусть M^{n+1} — риманово многообразие с C^2-регулярным слоением на замкнутые геодезические $\{ L \}$ и с условиями:*

1) *смешанная секционная кривизна $K(x,y) > 0$, $(x \in TL,\ y \in TL^{\perp})$;*

2) *функции $\{ y^2 \}$ квадраты длин L-полей (т.е. индуцированных слоением полей Якоби $\{ y \}$) имеют связные множества локальных минимумов;*

3) *L-поля $\{ y \}$, имеющие постоянную длину, однозначно проектируемые.*

Тогда n — четное число.

Следствие. *Пусть M^{n+1} — риманово многообразие с C^2-регулярным слоением на замкнутые геодезические $\{L\}$ и с условиями:*

1') *смешанная секционная кривизна*

$$0 < k_1 \le K(x,y) \le k_2, \ (x \in TL, y \in TL^{\perp});$$

2') *как* 2) *в теореме*;

3') *длина L не больше* $\dfrac{\pi}{\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}}$.

Тогда n — четное число.

Замечания.

1. Так как поля Якоби в $RP^N(1)$ имеют вид $y(t) = \bar{y}\cos(t) + \bar{z}\sin(t)$, $(0 \le t \le \pi)$, то для них выполнено условие 2). Условие 2) в теореме или в следствии можно заменить следующим требованием, выполненным для полей Якоби в S^N или в RP^N:

4) функции $\{y^2\}$ квадратов длин L-полей имеют невырожденные локальные минимумы либо постоянные.

2. Без условия 2) или условия 4) теорема и следствие неверны, что показывает приведенный в работе [3] пример расслоения области комплексного проективного пространства CP^m (4) на замкнутые геодезические $\{L\}$: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, длина L равна π, т.е. выполнено 3'), а значит, и 3), но $n = 2m - 1$ — нечетное число.

3. Теорема и следствие легко обобщаются для слоений на произвольные замкнутые кривые, не обязательно геодезические. При этом условие 1) нужно заменить на

$$K(x,y) > \frac{(\nabla_y H, y) + (H,y)^2}{y^2},$$

где $H \subset TL^{\perp}$ — вектор кривизны слоев $\{L\}$, и соответственно откорректировать 1'), 3') и лемму 1. (Формула второй производной длины L-поля в точке экстремума длины имеет вид

$$|y|''\,|y| = (\nabla_y H, y) + (H,y)^2 + \left|\nabla_x y\right|^2 - K(x,y)\,|y|^2.)$$

В доказательстве теоремы использованы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $y: L \to TL^{\perp}$ — поле Якоби постоянной длины $|y| > 0$ вдоль естественно параметризованной геодезической $L: [0,l] \to M$ и выполнены условия:*

$$0 < k_{\min} \le K(x,y) \le k_{\max}, \qquad (x \in TL, y \in TL^{\perp}); \tag{1}$$

$$l \le \frac{\pi}{2(\sqrt{k_{\max}} - \sqrt{k_{\min}})}. \tag{2}$$

Тогда y — однозначно проектируемое вдоль L.

Лемма 2. *Пусть $A: R^n \to R^n$, $n \ge 2$, — симметричный линейный оператор с собственными числами $0 < k_1 \le \ldots \le k_n$. Тогда*

$$\max_{y \in R^n \setminus 0} \left\{ \frac{(Ay,Ay)}{(Ay,y)} - \frac{(Ay,y)}{(y,y)} \right\} = (\sqrt{k_n} - \sqrt{k_1})^2 ,$$

причем оптимальный вектор y_0 лежит в 2-плоскости, содержащей собственные векторы оператора A с собственными числами k_n и k_1 .

Доказательство теоремы. В силу замкнутости кривых $\{ L \}$ в окрестности почти любой из них слоение является тривиальным расслоением. Поэтому ниже рассматривается окрестность $O(L)$, диффеоморфная произведению $L \times R^n$, слои из $O(L)$ соответствуют множествам $L \times \{ a \}$, $a \in R^n$. Соответственно, нормальное векторное расслоение $TL^{\perp}$ диффеоморфно $L \times R^n$, и множествами $L \times \{ y \}$ служат L-поля, а расслоение единичных нормалей $T_1 L^{\perp}$ диффеоморфно $L \times S^{n-1}$, и множествами $L \times \{ y \}$ служат пронормированные L-поля. Обозначим через p_1 , p_2 проекции $TL^{\perp}$ (или $T_1 L^{\perp}$) на сомножители L и $TL^{\perp}(0) = R^n$ (или $T_1 L^{\perp}(0) = S^{n-1}$). Пусть r: $[-l/2, l/2] \to L$ — естественная параметризация (l — длина L, $r(l/2) = r(-l/2)$ ввиду замкнутости L). Так как L-поля $\{ y(t) \}$ в $TL^{\perp}$ инвариантны относительно линейных комбинаций, то на основе ковариантного дифференцирования L-полей определен линейный оператор $D : TL^{\perp} \to TL^{\perp}$ правилом $Dy = y'$.

Зададим множество $\Sigma_1 \subset T_1 L^{\perp}$ "экстремумов длин L-полей" уравнением

$$(Dy,y) = 0, \ (y \in T_1 L^{\perp}).$$

Так как

$$| y(t) |' = \frac{1}{2} | y(t) |^{-1/2} \big(y(t)', y(t) \big),$$

то Σ_1 содержит множество $\Sigma_{\min}$ "минимумов длин L-полей", определяемое правилом:

$$\Sigma_{\min} = \{ y \in T_1 L^{\perp} : \text{длина } L\text{-поля } y(t) \ni y \text{ имеет}$$

$$\text{локальный минимум при } t = r^{-1}(p_1 y) \}.$$

Заметим, что L-полям постоянной единичной длины соответствует множество $\Sigma_0 = \tilde{\Sigma}_0 \times L \subset T_1 L^{\perp}$, причем $\tilde{\Sigma}_0 = \left\{ \bigcap p_2 \big(\Sigma_1(t) \big) : | t | \le l/2 \right\}$ — пересечение квадрик, где $\Sigma_1(t) = \Sigma_1 \bigcap p_1^{-1}(r(t))$.

Если $\Sigma_0 = T_1 L^{\perp}$, то слоение риманово, что в случае 1) возможно лишь для четного n [3]. Ниже предполагаем Σ_0 непустым, так как иначе доказательство упрощается (см. лемму 3).

Для каждого $z \in S^{n-1} \setminus \tilde{\Sigma}_0$ обозначим через $c(z)$ центр тяжести связного множества $p_2^{-1}(z) \bigcap \Sigma_{\min}$ (отрезка или точки, см. 2)). Множество $\Sigma_m = \{ c(z) : z \in S^{n-1} \setminus \tilde{\Sigma}_0 \}$ является топологическим многообразием размерности $n - 1$ (после аппроксимации его можно считать гладким), причем $p_2 : \ \Sigma_m \to S^{n-1} \setminus \tilde{\Sigma}_0$ — однолистное накрытие. В силу 1) и формулы второй производной длины поля Якоби [4]

$$| y(t) |'' = -K(y(t))| y(t) | + \frac{A^2(y(t),y(t)')}{| y(t) |^3}, \tag{3}$$

где A — площадь параллелограмма на соответствующих векторах, векторы y и Dy, $(y \in \Sigma_m)$, не коллинеарны. Поэтому можно определить непрерывное отображение $n: \Sigma_m \to T_1 S^{n-1}$, полагая $n(y)$ равным пронормированной ортогональной p_2 yсоставляющей вектора $p_2(Dy)$. После проекции получаем непрерывное векторное поле $\tilde{v}(z) = n(c(z))$ на сфере S^{n-1} с особенностью на множестве $\tilde{\Sigma}_0$. Ниже мы устраним эту особенность. И, наконец, завершением доказательства теоремы послужит тот факт, что сфера S^{n-1} допускает непрерывное единичное векторное поле лишь в случае четного n.

Лемма 3. *Существует непрерывное отображение (гомотопия)* F: $\Sigma_0 \times [0,1] \to T_1 S^{n-1} |_{\tilde{\Sigma}_0}$ *со свойствами:* $F(y,0) = n(y)$, $F(y,\tau) \in T_1 S^{n-1}(p_2 y)$, *множество* $F(\Sigma_0, 1)$ *гомеоморфно проектируется на* $\tilde{\Sigma}_0$.

Доказательство леммы 3. Гомотопию F построим в 2 этапа.

а) Пусть $(y,\tau) \in \Sigma_0 \times [0,1/2]$, причем $p_1 y \neq r(\pm l/2)$, т.е. $t_y = r^{-1}(p_1 y) \in (-l/2, l/2)$. Перенесем y по L-полю в точку со значением параметра $(1-2\tau)t_y$ и полученный вектор обозначим через y_τ, т.е. $p_1(y_\tau) = r((1-2\tau)t_y)$, $p_2(y_\tau) = p_2 y$. Затем векторы y, Dy перенесем параллельно по кратчайшему участку L в точку $r((1-2\tau)t_y)$ и получим два ортогональных вектора, определяющих плоскость $\sigma(y,\tau)$, причем $\sigma(y,0) = y \wedge Dy$, $\sigma(y,1/2) \subset TL^\perp(0)$. В силу условия 3) плоскость $\sigma(y,\tau)$ не ортогональна $\sigma(y_\tau)$, т.е. существует единственный единичный вектор $f(y,\tau) \in \sigma(y,\tau)$, который ортогонален y_τ, при $\tau = 0$ совпадает с $Dy/|Dy|$ и непрерывно зависит от (y,τ). Положим $F_1(y,\tau)$ равным нормированной ортогональной p_2 yсоставляющей вектора $p_2(f(y,\tau))$.

По непрерывности продолжим F_1 на пары (y,τ) со значением параметра $t_y = \pm l/2$. Заметим, что $F_1(p_2^{-1}(z),1/2)$ при любом $z \in \tilde{\Sigma}_0$ является кривой в полусфере (по одну сторону в $TS^{n-1}(z)$ от гиперплоскости ортогональной $\sigma(z)$), как и кривая $p_2^{-1}(z)$ параметризуется $t \in (-l/2, l/2)$. В этой же полусфере лежат "отрезки", соединяющие концы кривых $F_1(p_2^{-1}(z),\tau)$ для всех $0 \le \tau \le 1/2$. Поэтому после перепараметризации вдоль $p_2^{-1}(z)$ и добавления двух половин указанных отрезков мы замкнем кривые $F_1(p_2^{-1}(z),\tau)$ и добьемся непрерывности отображения F_1 (обозначение сохраняем), определенного уже на $\Sigma_0 \times [0,1/2]$. Очевидно, $F_1(y,0) = n(y)$, $F_1(y,\tau) \in T_1 S^{n-1}(p_2 y)$.

б) С помощью стягивания по отрезкам в полусфере каждой замкнутой кривой $F_1(p_2^{-1}(z),1/2)$ в ее центр тяжести $d(z)$, который непрерывно зависит от z, построим непрерывное отображение (гомотопию) F_2: $\Sigma_0 \times [1/2, 1] \to T_1 S^{n-1} |_{\tilde{\Sigma}_0}$, причем

$F_2(y,1/2) = F_1(y,1/2)$, $F_2(y,1) = d(p_2 y)$. Склеивая гомотопии F_1 и F_2, получим требуемое отображение $F(y,\tau)$. Лемма 3 доказана.

Ввиду (3) и условия 1) существует такая окрестность $\widetilde{U}$ множества $\widetilde{\Sigma}_0$, что для всех $y \in U = p_2^{-1}(\widetilde{U})$ векторы y, Dy не коллинеарны. Значит, как и для Σ_m, определено непрерывное отображение n: $U \to T_1 S^{n-1}$, где $n(y)$ — пронормированная ортогональная $p_2 y$ составляющая вектора $p_2(Dy)$. Можно считать, что граница $\partial \widetilde{U}$ — гладкое $(n-2)$-мерное подмногообразие S^{n-1} и соответственно граница $\partial U = \partial\widetilde{U} \times L$ — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие $T_1 L^{\perp}$. Ниже для удобства будем рассматривать Σ_m вне U, т.е. $\partial\Sigma_m = \partial U \cap \Sigma_m$ — граница $(n-1)$-мерного многообразия Σ_m. Рассмотрим основной случай $\dim \widetilde{\Sigma}_0 \le n-3$ (случай, когда $\widetilde{\Sigma}_0$ содержит $(n-2)$-мерный страт, рассмотрен в конце доказательства). Заметим, что аналитическое подмножество $\widetilde{\Sigma}_0$ в S^{n-1} является CW-подпространством. Поэтому можно предположить, что $\widetilde{\Sigma}_0$ — сильный деформационный ретракт $\widetilde{U}$ [5]. Значит, существует такая гомотопия $\widetilde{H}_1 : \partial\widetilde{U} \times [0,1] \to \widetilde{U}$, что $\widetilde{H}_1(z,0) = z$, $\widetilde{H}_1(z,1) \in \widetilde{\Sigma}_0$. (Если $\widetilde{\Sigma}_0$ — подмногобразие S^{n-1}, то $\widetilde{U}$ — трубчатая окрестность и $\widetilde{H}_1(z,1)$ — ближайшая к $z \in \partial\widetilde{U}$ точка $\widetilde{\Sigma}_0$.)

Поднятие H_1: $\partial\Sigma_m \times [0,1] \to U \cap \Sigma_{\min}$ гомотопии $\widetilde{H}_1$ обладает свойствами $H_1(y,0) = y$, $H_1(y,1) \in \Sigma_0$. Подклеим к Σ_m по границе "воротник" $W_1 = \partial\Sigma_m \times [0,1]$ и продолжим построенное выше отображение $v = n$: $\Sigma_m \to T_1 S^{n-1}$ непрерывно на W_1, полагая $v(y,t) = n(H_1(y,t))$, где $(y,t) \in W_1$. Приклеим к краю $\Sigma_m \cup W_1$ второй "воротник" $W_2 = \partial\Sigma_m \times [0,1]$ и непрерывно продолжим на него отображение v: $\Sigma_m \cup W_1 \to T_1 S^{n-1}$, полагая $v(y,t) = F(H_1(y,1),t)$, где $(y,t) \in W_2$ (F определено в лемме 3). Так как $\dim \widetilde{\Sigma}_0 \le n-3$, то существует гомотопия $\widetilde{H}_2 : \widetilde{\Sigma}_0 \times [0,1] \to S^{n-1}$ со свойствами: $\widetilde{H}_2(\cdot,0) : \widetilde{\Sigma}_0 \to S^{n-1}$ — вложение, $\widetilde{H}_2(\cdot,1) : \widetilde{\Sigma}_0 \to S^{n-1}$ — постоянное отображение в некоторую точку z_1, $\widetilde{H}_2$ "не задевает" окрестность $U(z_0)$ некоторой точки $z_0 \notin \widetilde{U}$ (можно считать $\widetilde{H}_2$ стягиванием в точку по отрезкам в S^{n-1}). С помощью параллельного переноса векторов в TS^{n-1} и аналогичной $\widetilde{H}_2$ гомотопии в сфере $T_1 S^{n-1}(z_1)$ (стягивания в точку многообразия коразмерности ≥ 1) можно перейти к гомотопии H_3, которая стягивает множество $F(\Sigma_0,1)$ (см. лемму 3) по $T_1 S^{n-1}$ в точку из $T_1 S^{n-1}(z_1)$, причем композиция $\pi \odot H_3$ "не задевает" $U(z_0)$.

Приклеим к $\Sigma_m \cup W_1 \cup W_2$ третий "воротник" $W_3 = \partial\Sigma_m \times [0,1]$ и продолжим непрерывно отображение v: $\Sigma_m \cup W_1 \cup W_2 \to T_1 S^{n-1}$ на W_3, полагая $v(y,t) = H_3(F(y,1),t)$, где $(y,t) \in W_3$. Так как v постоянно на границе $\Sigma_m \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3$, то приклеивая $\widetilde{U}$ и доопределяя v постоянным отображением, мы получим непрерывное отображение v:

$$\Sigma_m \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup \widetilde{U} \to T_1 S^{n-1},$$

определенное на многообразии гомеоморфном S^{n-1}. Так как прообраз $v^{-1}(z)$ любой точки $z \in U(z_0)$ является точкой, то степень композиции $\pi \odot v$ равна 1, где $\pi : T_1 S^{n-1} \to S^{n-1}$ — проекция. Значит, $\pi \odot v$ гомотопно гомеоморфизму сферы [5]. На основе параллельного переноса векторов последняя гомотопия поднимается до гомотопии отображения v, позволяющей при $t = 1$ получить непрерывное единичное векторное поле на S^{n-1}. Значит, n — четное число, что доказывает теорему в случае $\dim \tilde{\Sigma}_0 \le n-3$.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{\Sigma}_0$ содержит $(n-2)$-мерный страт, т.е. либо $\tilde{\Sigma}_0$ невырожденная квадрика и все $p_2\left(\Sigma_1(t)\right)$ совпадают, либо $\tilde{\Sigma}_0$ распадается на две большие сферы V^{n-2} и V^k, и каждая квадрика $p_2\left(\Sigma_1(t)\right)$ распадается на две большие $(n-2)$-мерные сферы. Первый случай невозможен, так как в силу компактности L для любой точки $z \in S^{n-1}$ существует такое t, что $z \in p_2\left(\Sigma_1(t)\right)$. Во втором случае из $S^{n-1} \setminus V^{n-2} = \bigcup \left(p_2\left(\Sigma_1(t)\right) \setminus V^{n-2}\right)$ и соображений размерности и гладкости следует $k = n-3$, т.е. $\tilde{\Sigma}_0 = V^{n-2} \bigcup V^{n-3}$. Пусть V^{n-3} не содержится в V^{n-2} (случай $V^{n-3} \subset V^{n-2}$ проще) и тогда $V^{n-4} = V^{n-2} \bigcap V^{n-3}$ — большая сфера. Сначала устраним особенность векторного поля $\tilde{v}$ на гиперповерхности $V^{n-2} \setminus V^{n-4}$: в качестве $\partial\tilde{U}$ используем конус около $V^{n-2} \setminus V^{n-4}$, проходящей через V^{n-4}, а его проекцию на V^{n-2} "пропустим" через гомотопию F леммы 3. После этого оставшуюся особенность на V^{n-3} устраним, как в основном случае с $\dim \tilde{\Sigma}_0 \le n-3$. Теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Пронормируем производную L-поля $z(t) = y'(t)/\,|\,y'(t)\,|$, $(0 \le t \le l)$, так как из условий $|\,y(t)\,| = \mathrm{const} > 0$ и формулы второй производной длины L-поля вытекает

$$|\,y'\,|^2 = (Ry,y) > 0. \tag{4}$$

Оценим скорость поворота плоскости $\sigma(t)$ с ортонормированным базисом $y(t)/\,|\,y(t)\,|$, $z(t)$. Так как $y'(t) \in \sigma(t)$, то остается оценить $\sigma(t)^{\perp}$-составляющую вектора $z'(t)$

$$w = z' - (z',y)\frac{y}{|\,y\,|^2} = -\frac{Ry}{|\,y'\,|} + \frac{(Ry,y')}{|\,y'\,|^3}y' + \frac{(Ry,y)}{|\,y'\,|\,|\,y\,|^2}y.$$

Следовательно, с учетом (4) имеем

$$|\,w\,|^2 = \frac{(Ry,Ry)}{(Ry,y)} - \frac{(Ry,y')^2}{(Ry,y)^2} - \frac{(Ry,y)}{(y,y)} \le \frac{(Ry,Ry)}{(Ry,y)} - \frac{(Ry,y)}{(y,y)}.$$

С помощью леммы 2 (доказательство см. ниже) и условия (1) получаем неравенство для скорости поворота плоскости $\sigma(t)$

$$|\,w\,| \le \sqrt{k} \quad \sqrt{k_1}. \tag{5}$$

Значит, на интервале $0 \le t < l$ вдоль бой вектор плоскости σ повернется на угол $\varphi < |\,w\,|\,l$. Из (5) и условия (2) сле.

$$\varphi < \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{k_1}\right) \frac{\pi}{2\left(\sqrt{k_n} - \sqrt{k_1}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, плоскость $\sigma(t)$ $(0 \le t < l)$ при параллельном переносе в точку $r(0)$ не является ортогональной $\sigma(0)$, что доказывает лемму 1.

Доказательство леммы 2. Вычисляя дифференциал функции

$$f(y) = \frac{(Ay,Ay)}{(Ay,y)} - \frac{(Ay,y)}{(y,y)},$$

получим

$$\frac{1}{2}\, df(y) = \frac{(Ay,y)(y,y)^2 A^2 y + (y,y)\,[(Ay,y)^2 - (A^2 y,y)\,]Ay + (Ay,y)y^3}{(Ay,y)^2 (y,y)^2}.$$

(Мы использовали симметричность $A^T = A$ и $(Ay,Ay) = (A^2 y,y)$.) На оптимальном векторе y_0, для которого $f(y_0) = \max\{\, f(y) : y \ne 0\,\}$ выполнено необходимое условие $df(y_0) = 0$ и, следовательно, *векторы* $A^2 y_0$, Ay_0, y_0 *линейно зависимы (компланарны)*. Пусть $\{\,\partial_1,\dots,\partial_n\}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора A с собственными числами $k_{\min} = k_1 \le \ldots \le k_n = k_{\max}$, т.е. $A\partial_i = k_i\,\partial_i$ $(1 \le i \le n)$. Разложим вектор y по базису: $y = \Sigma y_i \partial_i$. Тогда $Ay = \Sigma(k_i y_i)\partial_i$ и $A^2 y = \Sigma(k_i^2 y_i)\partial_i$. Условие

$$A^2 y = \alpha y + \beta Ay$$

равносильно системе уравнений $k_i^2 y_i = \alpha y_i + \beta k_i y_i$, $(1 \le i \le n)$, или $y_i(k_i^2 - \beta k_i - \alpha) = 0$, $(1 \le i \le n)$. Так как квадратное уравнение $k^2 - \beta k - \alpha = 0$ имеет два корня, то вектор y может иметь ненулевые координаты y_i лишь для двух направлений ∂_i и ∂_j с различными собственными числами k_i и k_j: $y = y_i \partial_i + y_j \partial_j$. Тогда

$$f(y) = \frac{k_i^2 y_i^2 + k_j^2 y_j^2}{k_i y_i^2 + k_j y_j^2} - \frac{k_i y_i^2 + k_j y_j^2}{y_i^2 + y_j^2} = \frac{(k_i - k_j)^2 y_i^2 y_j^2}{(k_i y_i^2 + k_j y_j^2)(y_i^2 + y_j^2)}.$$

Положим $x = (y_i / y_j)^2$ и получим дифференцируемую функцию одного аргумента $x \ge 0$

$$f(y) = \tilde{f}(x) = (k_i - k_j)^2 \frac{x}{(k_i x + k_j)(x + 1)}.$$

Максимум функции $\tilde{f}(x)$ (он существует, так как $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\infty) = 0$, но $\tilde{f} \ge 0$) будем искать из условия $\tilde{f}'(x) = 0$, т.е.

$$\left[\frac{x}{(k_i x + k_j)(x + 1)}\right]' = \frac{(k_i x + k_j)(x + 1) - [\,k_i(x + 1) + (k_i x + k_j)\,]}{(k_i x + k_j)^2 (x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-k_i x^2 + k_j}{(k_i x + k_j)^2 (x+1)} = 0.$$

Поэтому в точке $x_0 = \sqrt{k_j / k_i}$ функция $\tilde{f}$ достигает максимума равного $\left(\sqrt{k_j} - \sqrt{k_i}\right)^2$. Ввиду неравенства $\left(\sqrt{k_j} - \sqrt{k_i}\right)^2 \le \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{k_1}\right)^2$, получаем

$$\max\{ f(y) : y \ne 0 \} = \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{k_1}\right)^2,$$

что доказывает лемму 2.

Автор благодарен профессору В. А. Топоногову за полезные критические замечания и профессору С. В. Буяло, предложившему более конструктивные формулировки теоремы и следствия, как утверждений о свойствах 2) или 4) решений уравнения Якоби при предположениях 1) и 3) или 3′) для четного n.

Исследования поддержаны Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект № 94-01-00271.

Список литературы

1. *В. Ю. Ровенский*, Квазиразвертывающиеся и параболические поверхности в сфере. — Докл. АН СССР (1984), т. 278, № 2, с. 286—288.
2. *В. Ю. Ровенский*, Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^n и CP^n. — Укр. геометр. сб. (1985), вып. 28, с. 106—116.
3. *В. Ю. Ровенский*, Вполне геодезические слоения. — Сиб. матем. журн. (1982), т. 23, № 3, с. 217—219.
4. *Р. Бишоп, Р. Криттенден*, Геометрия многообразий. Мир, Москва (1967), 390 с.
5. *А. Дольд*, Лекции по алгебраической топологии. Мир, Москва (1976), 240 с.

Geodesic foliations with positive mixed sectional curvature

V. Yu. Rovenskii

The theorem on foliations of Riemannian manifolds by closed geodesics proved in the paper gives an intrinsic geometrical explanation of the author's result which had been obtained before: if a ruled surface M^{n+1} with generatrix S^1 in a sphere S^N is uniquely projectable onto the totally geodesic S^{n+1} (for instance, M is of positive mixed sectional curvature), then n is even.