Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с. 240–251

УДК 517.550.1: 517.546.28

О росте голоморфных отображений из конечномерного пространства в банахово

С. Ю. Фаворов

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 8 октября 1993 г.

Пусть f — голоморфное отображение шара $B \subset \mathbf{C}^m$ (или всего $\mathbf{C}^m$) в произвольное банахово пространство X. В работе рассматривается связь между ростом f и распределением нулей функций (g,f), где $g \in X^*$ — линейные функционалы. В частности, получены достаточные условия, при которых отображение f является полиномом (или ограниченным отображением) после умножения на скалярную голоморфную функцию без нулей в терминах нулей функций (g,f), где g принадлежит неплюриполярному множеству в X^*.

Нехай f — голоморфне відображення кулі $B \subset \mathbf{C}^m$ (або усього $\mathbf{C}^m$) у довільний банахів простір X. В роботі розглядається зв'язок між зростанням f та розподілом нулів функцій (g,f), де $g \in X^*$ — лінійні функціонали. Зокрема, одержані достатні умови для того, щоб відображення f було поліномом (або обмеженим відображенням) після домноження на скалярну голоморфну функцію буз нулів у термінах нулів функцій (g,f), де g належить неплюріполярній множині в X^*.

По теореме Пикара–Бореля (см. [1]) мероморфная в плоскости $\mathbf{C}$ функция $F(z)$, для которой уравнение

$$F(z) = a \tag{1}$$

имеет конечное число решений для трех значений $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$, является отношением двух полиномов. Этот результат можно сформулировать иначе: пусть $f(z) = \left(f_1(z), f_2(z)\right)$ — голоморфное отображение из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^2$, а уравнения

$$\langle A, f(z) \rangle = 0, \tag{2}$$

где через $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение в $\mathbf{C}^2$, имеют конечное число решений для трех векторов A_1, A_2, A_3, из которых любые два линейно независимы. Тогда компоненты отображения f имеют вид

$$e^{h(z)} P_j(z), \tag{3}$$

где $h(z)$ — целая функция, а $P_j(z)$, $j = 1,2$, — полиномы в $\mathbf{C}$. Это утверждение допускает обобщение на голоморфные отображения из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^p$. В этом случае для того чтобы все компоненты отображения f имели вид (3) (с одной и той же функцией $h(z)$), достаточно, чтобы уравнение (2) имело конечное число решений для $(p+1)$-го вектора $A_1, \ldots, A_{p+1} \in \mathbf{C}^p$, любые p из которых линейно независимы. В таком виде это впервые было сформулировано, по-видимому, Э. Картаном [2]. В различных формах это утверждение распространяется и на голоморфные отображения комплексных многомерных многообразий (см. [3].) Отметим, что современные доказательства теоремы Пикара–Бореля и ее обобщений используют, как правило, тот или иной вариант второй основной теоремы неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций (см. [1]).

Если $F(z)$ — мероморфная функция в круге конечного радиуса R, то утверждение теоремы Пикара–Бореля, вообще говоря, не имеет места. Тем не менее, справедлива следующая теорема Фростмана ([4], см. также [1]).

Пусть $F(z)$ — мероморфная функция в круге радиуса $R < \infty$, причем для точек a из некоторого множества $E \subset \mathbf{C}$ положительной емкости уравнение (1) имеет или конечное число решений, или эти решения λ_n удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_n \left(R - |\lambda_n|\right) < \infty . \tag{4}$$

Тогда решения уравнения (1) удовлетворяют условию Бляшке при любом $a \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, а функция $F(z)$ представима в виде отношения двух ограниченных в круге аналитических функций.

Этот результат также допускает обобщения на голоморфные отображения из круга в пространство $\mathbf{C}^p$ (см. [5]). Отметим также, что как сама теорема Фростмана, так и ее обобщения являются простым следствием теоремы Альфорса–Неванлинны о равнораспределении значений мероморфных функций (см. [1]) и ее обобщений на голоморфные кривые (см. [5]).

Если $f(z)$ — голоморфное отображение в банахово пространство X, естественно вместо уравнения (2) рассматривать уравнение

$$(g,f)(z) = 0, \tag{5}$$

где g — линейный функционал из X^*. Однако даже в том случае, когда компоненты f имеют достаточно общий вид, уравнение (5) может не иметь решений для несчетных семейств линейно независимых функционалов из X^*. Например, так будет для голоморфного отображения из $\mathbf{C}$ в l^1 вида

$$f(z) = \left(1, \varphi(z), \varphi(z)^2/2!, \varphi(z)^3/3!, \dots\right), \tag{6}$$

где $\varphi(z)$ — скалярная целая функция в $\mathbf{C}$, и для функционалов $g_w = (1, w, w^2, w^3, \dots) \in l^\infty$ при $|w| \le 1$. Таким образом, при обобщении как теоремы Пикара–Бореля, так и теоремы Фростмана на бесконечномерный случай возникает необходимость в описании "редких" множеств исключительных функционалов в X^*. В настоящей работе это делается в терминах теории потенциала. При этом используется полученный автором в [6–7] "банаховозначный" вариант теоремы Альфорса–Неванлинны о равнораспределении значений голоморфных отображений, а также доказываемый здесь "банаховозначный суррогат" второй основной теоремы Неванлинны. Из последнего в качестве следствия получается классическая теорема Вимана о связи между ростом максимума модуля в круге голоморфной функции и ростом максимального члена ее степенного ряда. Эти "банаховозначные" теоремы имеют и другие приложения (см. [7]).

Для того чтобы точно сформулировать полученные результаты, введем некоторые определения и обозначения.

Через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в произвольном банаховом пространстве X или сопряженную норму в X^*, через $|\cdot|$ — евклидову норму в пространствах R^m, $\mathbf{C}^m$ или $\mathbf{C}$. Шар радиуса r с центром в начале координат будем обозначать через

$B(r)$ (при этом допускается случай $r = \infty$), а пространство скалярных функций, голоморфных в шаре $B(r) \subset \mathbf{C}^m$, — через $H(B(r))$. Наконец, через $\mathrm{M}(r,\psi)$ обозначим усреднение по конечномерной сфере $\partial B(r)$ интегрируемой функции $\psi(x)$.

Для голоморфного отображения $f: B(R) \to X$, $B(R) \subset \mathbf{C}^m$, полагаем при $t < R$

$$T(t,f) = \mathrm{M}(t, \log \|f\|), \tag{7}$$

$$\widetilde{T}(t,f) = \sup \{ \mathrm{M}(t, \log |(g,f)|) : g \in X^*, \ \|g\| \le 1 \}.$$

Функцию $T(t,f)$ назовем неванлинновской характеристикой голоморфного отображения f. Отметим, что когда f — голоморфная кривая над $B(R)$, т.е. голоморфное отображение круга $B(R) \subset \mathbf{C}$ в пространство $\mathbf{C}^p$, достаточно в (7) заменить норму $\|f\|$ на $|f|$, чтобы получить определение Э. Картана ([2]) неванлинновской характеристики этой кривой*.

Пример. Рассмотрим отображение вида

$$f(z) = \sum_n x_n z^n, \quad z \in \mathbf{C}, \quad x_n \in X, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Условие $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|x_n\|} \le R^{-1}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы f было голоморфным отображением круга $B(R) \subset \mathbf{C}$ в банахово пространство X. Пусть теперь $X = l^2$, $x_n = \alpha_n e_n$, где $\alpha_n \in \mathbf{C}$, а e_n, $n = 0,1,2,\ldots$, — ортонормированный базис в l^2. Тогда

$$T(t,f) = (1/2) \log \sum_n |\alpha_n|^2 t^{2n} = (1/2) \log m(t^2, \varphi),$$

где $m(r, \varphi)$ — максимум модуля в круге $B(r)$ функции

$$\varphi(z) = \sum_n |\alpha_n|^2 z^n \in H\left(B(R^2)\right).$$

Далее, для любого $g = \sum\limits_n \lambda_n e_n \in l^2$

$$\mathrm{M}\left(t, \log |(g,f)|\right) = \frac{1}{2} \mathrm{M}\left(t, \log \left(\sum_n |\lambda_n|^2 |\alpha_n|^2 |z|^{2n} + \sum_{k \ne n} \bar{\lambda}_n \lambda_k \alpha_n \bar{\alpha}_k z^n \bar{z}^k\right)\right).$$

Пользуясь неравенством Йенсена для вогнутой функции $\log x$ и ортогональностью на $\partial B(t)$ степеней z, получаем при $\|g\| \le 1$

$$\mathrm{M}\left(t, \log |(g,f)|\right) \le \frac{1}{2} \log \sum_n |\lambda_n|^2 |\alpha_n|^2 t^{2n} \le (1/2) \log \mu(t^2, \varphi),$$

где $\mu(r, \varphi)$ — максимальный член ряда для $\varphi(z)$ при $|z| = r$. Так как при $g = e_{\nu(t^2)}$, где $\nu(r)$ — номер максимального члена,

* При условии $|f(0)| = 1$

$$\mathrm{M}\left(t, \log |(g,f)|\right) = \log\left(|\alpha_{\nu(t^2)}|\, t^n\right) = \frac{1}{2}\log\mu(t^2,\varphi),$$

то

$$\widetilde{T}(t,f) = \frac{1}{2}\log\mu(t^2,\varphi).$$

Для любого голоморфного отображения $f: B(R) \to X$ имеем

$$\log\|f(z)\| = \sup\{\log|(g,f)(z)| : g \in X^*,\ \|g\| \le 1\}.$$

Поэтому $\log\|f(z)\|$ — плюрисубгармоническая функция в шаре $B(R)$ и, следовательно, $T(t,f)$ монотонно не убывает на $(0,R)$. Нетрудно видеть, что функция $\widetilde{T}(t,f)$ также монотонно не убывает на $(0,R)$ и что для всех t

$$\widetilde{T}(t,f) \le T(t,f) \tag{8}$$

Порядком отображения f назовем величину

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log T(t,f)}{\log t} \qquad \text{при } R=\infty$$

и

$$\overline{\lim_{t\to R}}\frac{\log T(t,f)}{-\log(R-t)} \qquad \text{при } R<\infty.$$

Далее, для функции $\psi(z) \in H(B(R))$, $B(R) \subset C^m$, через $N(t,\psi)$ обозначим неванлинновскую считающую функцию дивизора $\psi(z) = 0$ (см. [3]). Эту функцию можно, например, определить равенством

$$N(t,\psi) = \mathrm{M}\left(1, \int_0^t \left[n_z(s) - n_z(0)\right]\frac{ds}{s} + n_z(0)\log t\right),$$

где усреднение * берется по переменной $z \in \partial B(1)$, а $n_z(s)$ означает число корней (с учетом кратности) функции $\varphi_z(w) = \psi(wz)$ переменного $w \in \mathrm{C}$ в круге $|w| \le s$. Применяя к функции $\varphi_z(w)$ формулу Йенсена, немедленно получаем

$$N(t,\psi) = \mathrm{M}(t, \log|\psi|) + C(\psi), \tag{9}$$

где константа $C(\psi)$ равна $-\log|\psi(0)|$ в случае $\psi(0) \ne 0$. Равенство (9) позволяет для голоморфного отображения $f: B(R) \to X$ и функционала $g \in X^*$ при изучении роста считающей функции $N(t, (g,f))$ дивизора $(g,f) = 0$ рассматривать вместо нее величину $\mathrm{M}\left(t, \log|(g,f)|\right)$.

Теперь можно дать точную формулировку второй основной теоремы Р. Неванлинны для голоморфных кривых в форме Э. Картана (см. [8]; оценка остаточного члена взята в [1]).

* В случае m = 1 усреднение, очевидно, можно опустить.

Теорема К. *Пусть $f(z)$ — голоморфное отображение круга $B(R) \subset \mathbb{C}$ в пространство $\mathbb{C}^p \setminus \{0\}$ с неограниченной при $t \to R$ неванлинновской характеристикой $T(t,f)$, а $A_1, \ldots, A_q$, $q > p$, — произвольный набор векторов из $\mathbb{C}^p$, любые p из которых линейно независимы. Тогда*

$$(q-p)T(t,f) \le \sum_{j=1}^{q} N(t, \langle A_j, f \rangle) + Q(t,f),^{*} \tag{10}$$

где остаточный член $Q(t,f)$ при $t \to R$ удовлетворяет следующим условиям Δ:
в случае конечного порядка f

$$Q(t,f) = O\left(\log (R-t)^{-1}\right) \quad \text{при} \quad R < \infty, \tag{11}$$

$$Q(t,f) = O(\log t) \quad \text{при} \quad R = \infty. \tag{12}$$

В общем случае для каждого $\lambda \ge 0$ найдется множество $E_\lambda \subset (0,R)$ такое, что

$$\int_{E_\lambda} \frac{dt}{\alpha(t)} < \infty, \tag{13}$$

где $\alpha(t) = (R-t)^{\lambda+1}$ при $R < \infty$ и $\alpha(t) = t^{1-\lambda}$ при $R = \infty$ и при $t \to R$, $t \notin E_\lambda$,

$$Q(t,f) = O\left(\log \left(T(t,f)(R-t)^{-1}\right)\right) \quad \text{при} \; R < \infty, \tag{14}$$

$$Q(t,f) = O\left(\log (tT(t,f))\right) \quad \text{при} \; R = \infty. \tag{15}$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ и $t \to R = \infty$, $t \notin E_0$,

$$Q(t,f) = O(\log T(t,f)). \tag{16}$$

В случае $R = \infty$, $p = 2$ эта теорема совпадает с наиболее распространенной формой второй основной теоремы для мероморфных в плоскости функций. При этом обычно выбирается $\lambda = 1$, что означает, что оценка (15) выполняется вне множества конечной меры. Отметим также, что оценка сверху (с точностью до ограниченного слагаемого) функции $N(t, \langle A, f \rangle)$ величиной $T(t,f)$ легко следует из соотношения (9) и определения (7).

Как показывает пример отображения, определенного равенством (6), для банаховозначных голоморфных отображений нельзя определить характеристику так, чтобы она, с одной стороны, росла не медленее считающей функции дивизора $(g,f) = 0$ для любого функционала $g \in X^*$, а с другой, оценивалась сверху через сумму конечного или счетного числа считающих функций дивизоров $(g_n, f) = 0$ для достаточно произвольного набора $g_n \in X^*$. Поэтому здесь в роли второй основной теоремы Неванлинны выступает следующий результат.

* Здесь при определении $N(t, \langle A, f \rangle)$ следует каждый корень кратности k считать с кратностью $\min\{k, p-1\}$.

Теорема 1. *Для голоморфного отображения $f : B(R) \to X$, $B(R) \subset \mathbb{C}^p$ с неограниченной при $t \to R$ характеристикой справедливо соотношение*

$$T(t,f) \le \widetilde{T}(t,f) + Q(t,f),$$

где остаточный член $Q(t,f)$ удовлетворяет условиям Δ.

Заметим, что в конечномерном случае теорема 1 с $Q(t,f) = O(1)$ при $t \to R$ немедленно следует из формулы Картана (см., напр., [9], с. 33) или из ее обобщения на случай голоморфных кривых.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Для любой системы из N функционалов $g_1,\ldots g_N \in X^*$, $\|g_n\| = 1$, $n = 1,\ldots,N$, и любого $t > 0$*

$$\mathrm{M}\left(t, \max\{\log|(g_n,f)| : n = 1,\ldots,N\}\right) \le$$
$$\le \sup\{\mathrm{M}\left(t, \log|(g,f)|\right) : \|g\| \le 1\} + \log N.$$

Доказательство. Для любых $a_1,\ldots,a_N \in \mathbb{C}$ ввиду плюрисубгармоничности функции $\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = \log|a_1\lambda_1 + \ldots + a_N\lambda_N|$

$$\log \max_{1 \le n \le N} |a_n| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \log\left|\sum_{n=1}^N a_n e^{i\varphi_n}\right| d\varphi_1 \ldots d\varphi_N.$$

Полагая здесь $a_n = (g_n,f)(z)$ и интегрируя по сфере $|z| = t$, приходим к неравенству

$$\mathrm{M}\left(t, \max\{|(g_n,f)| : n = 1,\ldots,N\}\right) \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\left(t, \log\left|\left(\sum_{n=1}^N g_n e^{i\varphi_n}, f\right)\right|\right) d\varphi_1 \ldots d\varphi_N \le$$
$$\le \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_N} \mathrm{M}\left(t, \log\left|\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g_n e^{i\varphi_n}, f\right)\right|\right) + \log N.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в шаре $B(1+\beta) \subset R^m$. Для любых $\delta < \min\{\beta, c_1\}$, $\gamma < 1$ на сфере $\partial B(1)$ найдется $N < c_2 \gamma^{2-2m} \delta^{1-m}$ точек x_n таких, что для любой субгармонической в шаре $B(1+\beta)$ функции $v(x) \le u(x)$, для которой $v(x_n) = u(x_n)$, $n = 1,\ldots,N$, выполняется неравенство*

$$\mathrm{M}(1,u) \le \left(1 - (m+2)\gamma\right)\mathrm{M}(1,v) + (m+2)\gamma\mathrm{M}(1+\delta, u). \qquad (16)$$

Константы c_1, c_2 зависят только от размерности m.

Доказательство. Пусть $w(x)$ — гармоническая в шаре $B(1+\delta)$ функция с граничными значениями, равными $u(x)$. Положим $\widetilde{u}(x) = u(x) - w(x)$,

$\tilde{v}(x) = v(x) - w(x)$. Покроем сферу $\partial B(1)$ шарами B_n радиуса $2^{-1}\delta\gamma^2$. Это можно сделать так, чтобы число таких шаров не превосходило $c_2\delta^{1-m}\gamma^{2-2m}$. В каждом множестве $\partial B(1)\bigcap \overline{B}_n$ выберем точку x_n, в которой функция $\tilde{u}(x)$ достигает своего максимума на этом множестве. Так как $\tilde{v}(x) \le 0$ при $|x| < 1+\delta$ и для каждого $x \in \partial B(1)$ при некотором $n \in \overline{1,N}$ $B(x,(1-\gamma)\delta\gamma) \subset B(x_n, \delta\gamma)$ и одновременно $\tilde{u}(x) \le \tilde{u}(x_n)$, то

$$\tilde{u}(x) \le \tilde{v}(x_n) \le \omega(B(1))^{-1}(\delta\gamma)^{-m}\int\limits_{|y|<\delta\gamma}\tilde{v}(x_n+y)\omega(dy) \le$$

$$\le \omega(B(1))^{-1}(\delta\gamma)^{-m}\int\limits_{|y|<\delta\gamma(1-\gamma)}\tilde{v}(x+y)\omega(dy).$$

Поэтому для любого фиксированного $x' \in \partial B(1)$

$$\mathrm{M}(1,\tilde{u}) \le \omega(B(1))^{-1}(\delta\gamma)^{-m}\int\limits_{|y|<\delta\gamma(1-\gamma)}\mathrm{M}(|x'+y|,\tilde{v})\omega(dy) \le (1-\gamma)^m\,\mathrm{M}(1+\delta\gamma,\tilde{v})\,. \quad (17)$$

Функция $M(r,\tilde{v})$ монотонно неубывающая и выпуклая относительно функции

$$h(r) = \begin{cases}\log r, & m=2\\ -r^{2-m}, & m>2,\end{cases}$$

поэтому, учитывая, что $M(1+\delta,\tilde{v}) \le 0$, имеем

$$\mathrm{M}(1+\delta\gamma,\tilde{v}) \le \left(1-\frac{h(1+\delta\gamma)-h(1)}{h(1+\delta)-h(1)}\right)\mathrm{M}(1,\tilde{v}). \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует при малых c_1 и $\delta < c_1$

$$\mathrm{M}(1,\tilde{u}) \le (1-m\gamma)(1-2\gamma)\mathrm{M}(1,\tilde{v}) \le (1-\gamma(m+2))\mathrm{M}(1,\tilde{v}).$$

Переходя здесь к функциям u, v и пользуясь равенством $\mathrm{M}(1,w) = \mathrm{M}(1+\delta,u)$, получаем (16). Лемма доказана.

Следующее утверждение есть, по существу, вариант классической леммы Бореля–Неванлинны (ср. [9], с. 120).

Лемма 3. *Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная неубывающая строго положительная функция на $[t_o, R)$ $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to R$. Тогда для каждого $\lambda \ge 0$ множество*

$$E = E_\lambda = \{\, t \in [t_0, R) : \varphi(t + \alpha(t)/\varphi(t)) \ge 2\varphi(t)\,\}$$

удовлетворяет условию (13).

Доказательство. Положим $t_1 = \min\{\, t: t\in E\,\}$, $t_1' = \min\{t : \varphi(t) \ge 2\varphi(t_1)\,\}$. Так как $\varphi(t)$ неубывающая, то $t_1' > t_1$ и $t_1' \le t_1 + \alpha(t_1)/\varphi(t_1)$. Если точки t_i, t_i', $t_{i-1}' \le t_i < t_i'$, $i = 1,\dots,n-1$, уже выбраны, полагаем $t_n = \min\{\, t: t\in E,\ t \ge t_{n-1}'\,\}$,

$t_n' = \min\{t : \varphi(t) \geq 2\varphi(t_n)\}$. Нетрудно видеть, что $t_n' > t_n$ и $t_n' \leq t_n + \alpha(t_n)/\varphi(t_n)$. Так как для всех n $\varphi(t_n) \geq \varphi(t_{n-1}') = 2\varphi(t_{n-1})$, то $\varphi(t_n) \geq 2^{n-1}\varphi(t_0)$ и поэтому

$$t_n' \leq t_n + \alpha(t_n)/2^{n-1}\varphi(t_0). \tag{19}$$

Кроме того, $\varphi(t_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому $t_n \to R$ и $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[t_n, t_n'\right]$. Для доказательства леммы осталось заметить, что ряд

$$\sum_n \int_{t_n}^{t_n'} \frac{dt}{\alpha(t)}$$

сходится, поскольку согласно (19) при $n \to \infty$ и $R = \infty$

$$t_n' = t_n\left(1 + O(2^{-n}t_n^{-\lambda})\right),$$

а при $R < \infty$

$$(R - t_n')^{-1} = (R - t_n)^{-1}\left(1 + O(2^{-n}(R - t_n)^{-\lambda})\right).$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Неравенство $Q(t,f) \geq 0$ следует из (8). Для получения оценки сверху положим в лемме 2 для $x \in R^{2m} = C^m$

$$u(x) = \log\|f(tx)\|, \quad \delta = t^{-1}\alpha(t)T(t,f)^{-1}, \quad \gamma = T\left(t(1+\delta), f\right)^{-1}.$$

Так как при $t \to R$ $T(t,f) \to \infty$, причем $t\alpha^{-1}(t) = O(1)$ при $R = \infty$ и $t^{-1}\alpha(t) = O(R - t)$ при $r < \infty$, то для достаточно больших t условия этой леммы выполняются. Пусть $x_1,\ldots,x_N$ — те точки на сфере $\partial B(1)$, о которых идет речь в лемме, $g_1,\ldots,g_N$ — функционалы из X^* такие, что $(g_n, f)(tx_n) = \|f(tx_n)\|$ и $\|g_n\| = 1$, $n = 1,\ldots,N$. Функция $v(x) = \max\{\log|(g_n, f)(tx)| : n \in \overline{1,N}\}$ субгармоническая в шаре $B(R/t)$ и удовлетворяет остальным условиям леммы 2, поэтому, учитывая равенство $M(r,u) = T(rt,f)$ и определение γ, имеем

$$T(t,f) \leq \left(1 - (2m+2)\gamma\right)\mathrm{M}(1,v) + 2m + 2.$$

Можно считать, что $T(t,f) > 2m + 2$, поэтому $M(1,v) > 0$ и

$$T(t,f) \leq \mathrm{M}(1,v) + 2m + 2.$$

Отсюда по лемме 1

$$T(t,f) \leq \sup\{\mathrm{M}(t, \log|(g,f)|) : \|g\| \leq 1\} + 2m + 2 + \log N.$$

Таким образом, оценка числа N, данная в лемме 2, позволяет утверждать, что остаточный член $Q(f,t)$ не больше чем

$$(2m+2) + \log c_2 + (2m-1)\log\left[t\alpha^{-1}(t)T(t,f)T^2\left(t + \frac{\alpha(t)}{T(t,f)}\right)\right]$$

Отсюда в случае конечного порядка оттображения f немедленно следуют утверждения (11), (12). Соотношения (14–16) (вне исключительного множества значений t, удовлетворяющего (13)) легко получаются с помощью леммы 3, примененной к функции $T(t,f)$. Теорема доказана.

Пусть функция $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(B(R))$, где $B(R) \subset \mathbb{C}$, $R \le \infty$. Отображение $f = \left(\sqrt{|b_n|}\, z^n\right)_{n=0}^{\infty}$ является голоморфным отображением круга $B(\sqrt{R})$ в l^2. При этом, как было отмечено выше,

$$T(t,f) = (1/2) \log m\,(t^2, \varphi),\ \hat{T}(t,f) = (1/2) \log \mu(t^2, \varphi),$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |\, b_n \,|\, z^n .$$

Так как $\mu(r, \varphi) = \mu(r, \psi) \le m(r, \psi) \le m(r, \varphi)$, а вне исключительного множества при $r \to R$ $\log m(r, \varphi) \sim \log \mu(r, \varphi)$, то из теоремы 1 вытекает следующий вариант теоремы Вимана о максимальном члене.

Теорема 2. *Максимальный член $\mu(r, \psi)$ и максимум модуля $m(r, \psi)$ функции $\psi(z)$ связаны соотношением*

$$\log \mu(r, \psi) \le \log m(r, \psi) \le \log \mu(r, \psi) + Q(r, \psi),$$

где остаточный член $Q(r, \psi)$ удовлетворяет условиям Δ (с заменой в них $T(t,f)$ на $\log m(r, \psi)$).

Исключительное множество в оценке остаточного члена в теореме 1 отбросить нельзя. Это следует уже из того, что существуют целые функции с неотрицательными коэффициентами, для которых на последовательности $r_n \to \infty$ $\log \mu(r_n, \psi) = o(\log m(r_n, \psi))$. Отметим также, что в [7] приводится пример голоморфного отображения $f : \mathbb{C} \to l^1$, для которого $\tilde{T}(2^m, f) = o(T(2^m, f))$ при $m \to \infty$.

Прежде чем формулировать следующие теоремы, введем некоторые определения.

Функцию $P : X^* \to [-\infty, \infty)$ назовем плюрисубгармонической в X^*, если она является полунепрерывной сверху в слабой * топологии пространства X^*, а ее сужение на любую комплексную прямую $\{ g_1 + w g_2 \colon w \in \mathbb{C} \}$, $g_1, g_2 \in X^*$, является субгармонической функцией переменного w.

Множество $E \subset X^*$ назовем плюриполярным, если $E \subset \{ g \colon P(g) = -\infty \}$ для некоторой плюрисубгармонической в X^* функции $P(g) \not\equiv -\infty$.

Подробнее о свойствах плюрисубгармонических функций и плюриполярных множеств в сопряженном банаховом пространстве см. [7,10]. Здесь только отметим, что счетное объединение плюриполярных множеств также является плюриполярным ([10]).

Следующая теорема является банаховозначным аналогом теоремы о равнораспределении значений Альфорса–Неванлинны.

Теорема 3. *Для голоморфного отображения $f\colon B(R) \to X$ с неограниченной при $t \to R$ функцией $T(t,f)$ и любого $\alpha > 1/2$*

$$\mathrm{M}\left(t, \log|(g,f)|\right) = \widetilde{T}(t,f) + O\left(\widetilde{T}(t,f)^{\alpha}\right)$$

при $t \to R$ для всех $g \in X^*$, кроме, быть может, функционалов из некоторого плюриполярного множества.

Доказательство этой теоремы в случае $R = \infty$ приведено в [7] (первая часть теоремы 4). Однако оно практически без изменений переносится на случай $R < \infty$.

Теперь можно сформулировать бесконечномерный аналог теоремы Пикара–Бореля.

Теорема 4. *Пусть $f\colon \mathbb{C}^m \to X$ — голоморфное отображение, причем при всех g из некоторого неплюриполярного множества дивизор $(g,f)(z) = 0$ является алгебраическим (в случае $m = 1$ это просто означает, что функция $(g,f)(z)$ имеет конечное число корней). Тогда отображение f имеет вид*

$$f(z) = e^{h(z)}\,P(z), \tag{20}$$

где $h \in H(\mathbb{C}^m)$, а $P(z)$ — полином переменной $z \in \mathbb{C}^m$ с коэффициентами из X.

Действительно, дивизор является алгебраическим тогда и только тогда, когда его считающая функция растет как $O(\log t)$. Поэтому для какого-то натурального r множество

$$E_r = \{\, g \in X^* : \mathrm{M}\left(t, \log|(g,f)|\right) \le r \log t,\ \ t \in (2,\infty)\,\}$$

не является плюриполярным. По теоремам 1 и 3 заключаем, чтс $T(t,f) = O(\log t)$ при $t \to \infty$. Осталось воспользоваться следующей теоремой:

Теорема 5. *Если для голоморфного отображения $f\colon \mathbb{C}^m \to X$*

$$\varliminf_{t \to \infty} T(t,f)(\log t)^{-1} = \gamma < \infty,$$

то оно имеет вид (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ — ассоциированная по Риссу мера плюрисубгармонической функции* $\log\|f(z)\|$, $\nu(t) = t^{2-2m}\mu(B(t))$. С помощью формулы Йенсена–Привалова для субгармонических в $\mathbb{R}^{2m}$ функций заключаем, что $\nu(t) \le \gamma < \infty$ для всех $t \in (0,\infty)$. По теореме Брело для субгармонических функций

$$\log\|f(z)\| = u(z) + K_0(\mu'', z) + U(\mu', z), \tag{21}$$

* Подробнее об ассоциированных мерах, канонических потенциалах и канонических представлениях суб- и плюрисубгармонических функций см. [11].

где $U(\mu', z)$ — ньютонов (или логарифмический при $m = 1$) потенциал сужения μ' меры μ на шар $B(r_0)$, $K_0(\mu'', z)$ — канонический потенциал рода 0 меры $\mu'' = \mu - \mu'$, а $u(z)$ — гармоническая функция в $\mathbf{R}^{2m}$. При $m > 1$ так же, как это сделано в теореме Лелона о каноническом представлении плюрисубгармонических в $\mathbf{C}^m$ функций *, можно показать, что функция $u(z)$ плюригармоническая в $\mathbf{C}^m$. Выберем $h(z) \in H(\mathbf{C}^m)$ так, чтобы $\operatorname{Re} h(z) = -u(z)$ и положим $f_1(z) = \exp\{h(z)\}f(z)$. Так как канонический потенциал допускает оценку сверху вида

$$K_0(\mu'', z) \le \int_{r_0}^{|z|} \nu(t)t^{-1}\,dt + |z| \int_{|z|}^{\infty} \nu(t)t^{-2}\,dt,$$

а потенциал $U(\mu', z)$ имеет рост не выше логарифмического, то для любого $\varepsilon > 0$ при больших $|z|$ выполняется неравенство

$$\log \|f_1(z)\| \le (\gamma + \varepsilon)\log|z|;$$

разлагая отображение $f_1(z)$ в ряд Тэйлора по степеням z и оценивая коэффициенты этого разложения с помощью неравенств Коши, заключаем, что $f_1(z)$ — полином. Теорема доказана.

Прежде чем переходить к обобщению на банаховозначный случай теоремы Фростмана, отметим, что условие Бляшке (4) на корни функции $\psi \in H(B(R))$, $B(R) \subset \mathbf{C}$, $R < \infty$, как следует из формулы Йенсена, эквивалентно условию

$$\mathrm{M}\left(t, \log|\psi|\right) \le c < \infty, \qquad t \in (0,R), \tag{22}$$

или, что то же самое, ограниченности при $t \to R$ функции $N(t,\psi)$. Таким образом, для дивизоров $\psi(z) = 0$ в шаре $B(R) \subset \mathbf{C}^m$ условие Бляшке принимает вид (22) (см. [12]). Но при $m > 1$, в отличие от плоского случая, такой дивизор уже может не быть дивизором ограниченной в $B(R)$ аналитической функции. Тем не менее, по теореме Хенкина-Шкоды, функция, удовлетворяющая условию (22), представима в виде $\psi(z) = \varphi(z)\exp h(z)$, где $h \in H(B(R))$, а функция φ лежит в классе Неванлинны $N(B(R))$, т.е. удовлетворяет условию

$$\mathrm{M}\left(t, \log^+|\varphi|\right) \le c < \infty, \qquad t \in (0,R).$$

Теорема 6 (аналог теоремы Фростмана). *Пусть $f(z)$ — голоморфное отображение шара $B(R) \subset \mathbf{C}^m$ в банахово пространство X, и пусть для всех функционалов g из некоторого неплюриполярного множества в X^* дивизоры $(g,f)(z) = 0$ удовлетворяют условию* (22). *Тогда они удовлетворяют этому условию при всех $g \in X^*$. Далее, найдется такая функция $h \in H(B(R))$, что для голоморфного отображения*

$$f_1(z) = [\exp\{-h(z)\}]f(z) \tag{23}$$

* В теореме Лелона предполагается, что в некоторой окрестности 0 $\mu \equiv 0$ и поэтому в (21) слагаемое $U(\mu', z)$ отсутствует. Однако в случае рода 0 или 1 она легко обобщается и на наш случай.

все функции вида $(g,f_1)(z)$ *лежат в классе Неванлинны* $N(B(R))$. *В случае* $m = 1$ *функцию* h *можно выбрать так, чтобы* $\|f_1(z)\| \le 1$ *для всех* $z \in B(R)$.

Доказательство. Как и в теореме 4, с помощью теорем 3 и 1 сразу же получаем, что характеристика $T(t,f)$ ограничена при $t \to R$. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Далее, по теореме 17.1.3 из [12] находим плюригармоническую в $B(R)$ функцию v такую, что величина $M\left(t, |\log\|f\| - v|\right)$ ограничена при $t \to R$. Если теперь $h \in H(B(R))$ выбрать так, что $\operatorname{Re} h = v$, то для отображения f_1, определенного в (23), выполяется условие

$$M\left(t, \log^+ |f_1|\right) \le c < \infty, \qquad t \in (0,R).$$

Отсюда следует второе утверждение теоремы. Наконец, при $m = 1$ в качестве v надо выбрать гармоническую мажоранту в шаре $B(R)$ функции $\log\|f(z)\|$ (она существует вследствие ограниченности сверху величины $M\left(t, \log\|f\|\right) = T(t,f)$. Поэтому теперь $\log\|f_1(z)\| \le 0$ в $B(R)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции. Гостехиздат, Москва (1941), 388 с.
2. *H. Cartan*, Sur les zeros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données.— Mathematica (1939), v. 7, p. 5—31.
3. *Б. В. Шабат*, Распределение значений голоморфных отображений. Наука, Москва (1982), 288 с.
4. *O. Frostman*, Uber die defecten Werte einer meromorphen Funktion. VIII Congr. Math. Skand. Stokholm (1934).
5. *С. Ю. Фаворов*, Об одном свойстве целых кривых.— Функцион. анализ и его прил. (1975), т. 9, № 2, с. 87—88.
6. *С. Ю. Фаворов*, Распределение значений голоморфных отображений в C^m в банахово пространство.— Функцион. анализ и его прил. (1987), т. 21, № 3, с. 91—92.
7. *С. Ю. Фаворов*, Рост и распределение значений голоморфных отображений конечномерного пространства в банахово.— СМЖ (1990), т. 31, № 1, с. 161—171.
8. *А. А. Гольдберг*, Некоторые вопросы теории распределения значений. Дополнение к книге Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Наука, Москва (1960), 319 с.
9. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970), 592 с.
10. *С. Ю. Фаворов*, Плюрисубгармонические функции и плюриполярные множества в сопряженных банаховых пространствах.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1993), № 57, с. 59—66.
11. *Л. И. Ронкин*, Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, Москва (1971), 430 с.
12. *У. Рудин*, Теория функций в единичном шаре из C^n. Мир, Москва (1984), 455 с.

On growth of holomorphic maps from finite dimensional space into banach space

S. Yu. Favorov

Let f be a holomorphic map of the ball $B \subset C^m$ (or the whole C^m) into an arbitrary Banach space X. In this paper we consider the connection of the growth of f and the distribution of zeroes of functions (g,f), where $g \in X^*$ are linear functionals. In particular, it is obtained sufficient conditions that f is a polynomial (or bounded map) multiplied by a scalar holomorphic function without zeroes in terms of zeroes of functions (g,f) where g belongs to some nonpluripolar set in X^*.