Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с. 252–264

УДК 517

Одна теорема единственности, связанная с весовой полиномиальной аппроксимацией на последовательности

А. Е. Фрынтов

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 12 октября 1993 г.

Говорят, что $q(z)$ — функция класса Гамбургера, если она вещественна, с простыми вещественными нулями $\{\lambda_k\}$, и удовлетворяет условиям: справедливо разложение

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{q'(\lambda)(z-\lambda)}$$

со сходящимися рядами

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda^m}{q'(\lambda)}, \qquad (m = 0,1,2,\ldots).$$

П. Кусис заметил, что не любая функция $q(z)$ класса Гамбургера обладает тем свойством, что полиномы полны в пространстве $L_2(\Lambda, 1/(q'(\lambda))^2)$, и дал критерий такой полноты.

Тем не менее, остался открытым вопрос: будут ли некоторые функции, важные для приложений, действительно удовлетворять этому критерию. В статье доказывается, что полиномы в соответствующем пространстве полны, если нули λ_k функции $q(z)$ разделены в следующем смысле: для некоторого $d > 0$ круги $|z - \lambda_k| \le d\lambda_k^{1-\rho}$, $\lambda_k \in \Lambda$, не пересекаются ($\rho < 1/2$ — показатель сходимости последовательности λ_k).

Кажуть, що $q(z)$ є функція класу Гамбургера, якщо вона дійсна, з простими дійсними нулями $\{\lambda_k\}$ та задовольняє умовам: має місце розклад

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{q'(\lambda)(z-\lambda)}$$

такий, що

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda^m}{q'(\lambda)}, \qquad (m = 0,1,2,\ldots).$$

П. Кусіс зауважив, що не усяка функція $q(z)$ з класу Гамбургера має таку властивість, що поліноми повні у просторі $L_2(\Lambda, 1/(q'(\lambda))^2)$, та дав критерій такої повноти.

Проте залишилось відкритим питання про те, чи будуть деякі функції, важливі для застосування, дійсно відповідати цьому критерію. У статті доводиться, що поліноми у відповідному просторі повні, якщо нулі λ_k функції $q(z)$ відокремлені у наступному значенні: для деякого $d > 0$ кола $|z - \lambda_k| \le d\lambda_k^{1-\rho}$, $\lambda_k \in \Lambda$, не перетинаються ($\rho < 1/2$ — показник збіжності послідовності λ_k).

Настоящая работа посвящена одной теореме единственности для целых функций. Мотивировкой рассматриваемого вопроса послужила теорема, недавно установленная П. Кусисом [1] в связи с описанием канонических последовательностей узлов проблемы моментов Г. Гамбургера в неопределенном случае.

Определение. *Целая вещественная функция $q(z)$ принадлежит классу Гамбургера, если все ее корни $\Lambda = \{\lambda_j\}$ вещественные и простые, имеет место сходящееся разложение*

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{q'(\lambda)(z-\lambda)},$$

и сходятся все ряды

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda^m}{q'(\lambda)}, \qquad (m = 0,1,2,\ldots).$$

Отметим, что по теореме М. Г. Крейна (см., например, [2], с. 258) из первого условия вытекает конечность экспоненциального типа функции $q(z)$. В настоящее время имеется ряд работ, связанных с каноническими решениями проблемы моментов Г. Гамбургера в неопределенном случае, в которых фактически используется полнота полиномов в пространстве $l_2(\Lambda, 1/(q'(\lambda))^2)$ и неявно предполагается, что она должна следовать из принадлежности функции $q(z)$ классу Гамбургера. Однако, как недавно показал П. Кусис, одна принадлежность классу Гамбургера еще не влечет за собой полноту полиномов в этом пространстве. Он построил пример функции $q(z)$ класса Гамбургера такой, что полиномы не плотны в соответствующем пространстве, и доказал такую теорему.

Теорема К (П. Кусис [1]). *Пусть $q(z)$ — функция класса Гамбургера. Для того чтобы полиномы были плотны в пространстве $l_2(\Lambda, 1/(q'(\lambda))^2)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой целой функции $f(z)$ нулевого экспоненциального типа из условий $f(z) \in l_2(\Lambda)$ и*

$$y^n \frac{f(iy)}{q(iy)} \to 0, \qquad y \to \pm\infty, \qquad n = 0,1,3,\ldots$$

вытекало, что $f \equiv 0$.

И. В. Островский обратил внимание автора на эту теорему, заметив, что даже существование хотя бы одной функции класса Гамбургера, удовлетворяющей ее условиям, не является очевидным.

Пусть λ — последовательность положительных чисел, являющаяся R-множеством с показателем $\rho < 1/2$. Это означает, что

1) для считающей функции $n_\lambda(r)$ последовательности λ справедлива асимптотика

$$n_\lambda(z) \simeq \gamma r^{\rho(r)}, \qquad r \to \infty, \qquad \gamma > 0,$$

2) точки множества Λ разделены в следующем смысле:

для некоторого $d > 0$ круги $|z - \lambda_k| \le d\lambda_k^{1-\rho(\lambda_k)}$, $\lambda_k \in \lambda$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $n_\lambda(r)$ в смысле Валирона (см. [2], с. 32), не пересекаются.

Через $\varphi(z)$ обозначим каноническое произведение, построенное по множеству Λ. Нетрудно видеть, что функция $\varphi_\lambda(z)$ принадлежит классу Гамбургера (см., например, [2], с. 96).

Основным результатом настоящей работы является доказательство того факта, что в этом случае функция $\varphi_\lambda(z)$ удовлетворяет условиям теоремы П. Кусиса [1], и, следовательно, полиномы плотны в пространстве $l_2(\Lambda, 1/(\varphi'_\lambda(\lambda))^2)$.

Перейдем к изложению основных результатов статьи.

Пусть $\lambda_k \ge 1$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ — возрастающая последовательность чисел с показателем сходимости $\rho < 1$. Целая функция

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

имеет порядок $\rho < 1$. Функции $u_m(z)$, $m \in \mathbf{N}^+$,

$$u_m(z) = \sup_{P \in \mathbf{P}} \{ \ln |P(z)| : |P(\lambda_k)| \le \lambda_k^m |\varphi'(\lambda_k)| \},$$

где $\mathbf{P}$ — множество всех полиномов, а supremum берется по тем полиномам, для которых

$$|P(\lambda_k)| \le \lambda_k^m |\varphi'(\lambda_k)|, \quad \forall k \in \mathbf{N}^+, \tag{1}$$

будем называть полиномиальными мажорантами последовательности $\{\lambda_k\}$. Через $\mathbf{P}_\varphi$ будем обозначать множество всех полиномов, для которых выполнено соотношение (1).

Покажем, что если при некотором $m \in \mathbf{N}^+$ выполнено

$$u_m(0) = +\infty,$$

то последовательность $\varphi'(\lambda_k)$ имеет сверхполиномиальный рост.

Сначала отметим, что любое множество полиномов фиксированной степени N, равномерно ограниченное на конечном множестве из $N+1$ точки, будет равномерно ограниченным на любом компакте $\mathbf{C}$. Действительно, пусть $Q_0(z)$ — полином степени $N+1$ с корнями на этом множестве. Тогда для любого полинома P, $\deg(P) < N+1$, выполнено

$$P(z) = Q_0(z) \sum_{Q_0(t)=0} \frac{P(t)}{(z-t)Q_0'(t)},$$

а так как $|P(t)| \le A$, $Q_0(t) = 0$, то семейство полиномов равномерно ограничено на любом компакте плоскости $\mathbf{C}$.

Пусть для некоторого полинома Q выполнено $\lambda_k^m |\varphi'(\lambda_k)| \le |Q(\lambda_k)|$, тогда все полиномы семейства $\mathbf{P}_\varphi$ имеют степень не выше степени $Q(z)$, которую мы обозначим через N. Так как множестьо полиномов $\mathbf{P}_\varphi$ равномерно ограничено в $N+1$ точке (например, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{N+1}$), то оно равномерно ограничено на любом компакте C, что противоречит условию $u_m(0) = +\infty$, а значит, $\varphi'(\lambda_k)$ растет сверхполиномиально (т.е. $\lambda_k^m \mid \varphi'(\lambda_k) \mid \to 0$ для любого m).

Теперь мы докажем такую теорему.

Теорема. *Пусть $h(z)$ — целая функция, имеющая рост не выше минимального типа при порядке* 1, *и выполнены условия*:

$$\text{a)} \lim_{|y| \to \infty} \frac{| P(iy)h(iy) |}{| \varphi(iy) |} = 0, \ \forall P \in \mathbf{P}, \quad y \in \mathbf{R};$$

$$\text{b)} \ \{ h(\lambda_k) \}_{k=1}^{\infty} \in l^2 .$$

Если при некотором $m \in \mathbf{N}^+$ полиномиальная мажоранта последовательности корней функции $\varphi(z)$ такова, что

$$u_m(z) = +\infty ,$$

то $h(z) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала сделаем такое замечание: пусть α_k — последовательность, для которой сходится ряд

$$\sum_k \left| \frac{\alpha_k}{\varphi'(\lambda_k)} \right| < +\infty.$$

Тогда мероморфная функция

$$R(z) = \sum_k \frac{\alpha_k}{(z - \lambda_k)\varphi'(\lambda_k)}$$

имеет порядок не выше ρ. Справедливость этого замечания следует непосредственно из оценки неванлинновской характеристики функции $R(z)$

$$T(r,R) = m(r,R) + N(r,R) \le C + N(r,1/\varphi).$$

Кроме того, очевидно

$$\lim_{|y| \to +\infty} | R(iy) | = 0, \qquad y \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Пусть P — произвольный полином. Справедливо представление (в силу сверхполиномиального роста $\varphi'(\lambda_k)$)

$$P(z)h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\lambda_k)h(\lambda_k)\varphi(z)}{(z - \lambda_k)\varphi'(\lambda_k)} . \tag{3}$$

Действительно, обозначив функцию справа через $H_P(z)$, согласно замечанию и условию а) теоремы имеем целую функцию

$$\frac{H_P(z) - P(z)h(z)\varphi(z)}{\varphi(z)} ,$$

у которой рост не выше минимального типа при порядке 1, ограниченную и стремящуюся к нулю при $z = iy$, $|y| \to +\infty$. По теореме Фрагмена–Линделефа она тождественно равна нулю.

Таким образом, имеет место тождество

$$\frac{P(z)h(z)}{\varphi(z)} \equiv \sum_k \frac{P(z)h(z)}{(z-\lambda_k)\varphi'(\lambda_k)}. \tag{4}$$

Пусть P_n^* — последовательность полиномов, удовлетворящая условиям:

1) $P_n^*(0) = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(\lambda_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}^+$;

3) $|P_n^*(\lambda_k)| \le \lambda_k^m |\varphi'(\lambda_k)|, \quad \forall k,n \in \mathbf{N}^+$,

где m — некоторое натуральное число.

Функция h не является ненулевой постоянной, в силу ограниченности ее роста минимальным типом при порядке 1 она имеет бесконечно много корней, поэтому для некоторого полинома P_m степени m функция

$$h_m(z) = (P_m(z))^{-1}h(z)$$

также является целой функцией не выше минимального типа при порядке 1 и удовлетворяет всем условиям теоремы, а кроме того,

$$|h_m(\lambda_k)| \le C_0\lambda_k^{-m}, \; C_0 > 0. \tag{5}$$

Запишем тождество (4) для пары P_n^* и h_m

$$\frac{P_n^*(z)\,h_m(z)}{\varphi(z)} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n^*(\lambda_k)\,h_m(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)\,\varphi'(\lambda_k)}. \tag{6}$$

При $z \ne \lambda_k$, $k \in \mathbf{N}^+$, имеем

$$\left|\frac{P_n^*(\lambda_k)\,h_m(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)\,\varphi'(\lambda_k)}\right| \le C(z)\lambda_k^{-1},$$

следовательно ряд справа имеет суммируемую мажоранту, не зависящую от n. Предельный переход в условиях теоремы Лебега в тождестве (5) при $n \to \infty$ дает

$$h_m(z)\lim_{n\to\infty} P_n^*(z) \equiv 0,$$

но так как $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(z) \not\equiv 0$ в силу условия 1), то

$$h_m(z) \equiv 0.$$

Нам осталось доказать, что последовательность полиномов P_n^* со свойствами 1) – 3) при некотором $m \in \mathbf{N}^+$ существует. Действительно, по условию теоремы выполнено $u_m(0) = +\infty$. Это означает, что есть последовательность полиномов P_n таких, что $P_n(0) \ge n$ и

$$\left| P_n(z) \right| \le \lambda_k^m \left| \varphi'(\lambda_k) \right| .$$

Таким образом, последовательность полиномов

$$P_n^*(z) = \frac{P_n(z)}{P_n(0)}$$

удовлетворяет требуемым условиям:

1) $P_n^*(0) = 1$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} P_n^*(\lambda_k) = 0, \ \ \forall k \in \mathrm{N}^+$;

3) $\left| P_n^*(\lambda_k) \right| \le \lambda_k^m \left| \varphi'(\lambda_k) \right|, \ \ \forall k,n \in \mathrm{N}^+$.

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема показывает содержательность теоремы 1. А именно, в ней будет показано, что существуют последовательности с неограниченными полиномиальными мажорантами. Но сначала мы напомним некоторые определения.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного уточненного порядка $\rho(r)$ в смысле Валирона (см., например, [2], с. 32) и пусть $n(r)$ — считающая функция множества корней функции $f(z)$. Будем говорить, что корни функции $f(z)$ образуют R-множество относительно уточненного порядка $\rho(r)$, если выполнены следующие условия:

a) существует $\lim n(r)/r^{\rho(r)} \ne 0, +\infty$;

b) все корни γ_k функции $f(z)$ простые и для некоторого $d > 0$ круги $| z - \gamma_k | < d\gamma_k^{1-\rho(\gamma_k)}$ не пересекаются при различных значениях k.

Согласно теореме Б. Я. Левина [2, с. 96] для функции $f(z)$ существует предел

$$\lim \ln \left| f(re^{i\theta}) \right| / r^{\rho(r)} = h(\theta),$$

когда $z = re^{i\theta} \to \infty$ вне исключительного множества

$$R_{\widetilde{\alpha}} = \bigcup_k \{ \ | z - \gamma_k | < \widetilde{\alpha}\gamma_k^{1-\rho(\gamma_k)} \ \}$$

для любого $\widetilde{\alpha} > 0$, где $h(\theta)$ — индикатор Фрагмена–Линделефа функции $f(z)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть положительная последовательность λ_k образует R-множество при некотором уточненном порядке $\rho(r) \to \rho < 1/2$, тогда полиномиальная мажоранта $u_m(z)$ этой последовательности удовлетворяет при некотором m условию*

$$u_m(0) = +\infty .$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть λ_j и μ_j — две положительные монотонные последовательности и при некотором $k \in \mathrm{N}^+$ выполнено:*

a) $\lambda_j \ge \mu_j$ *при* $j > k$;

b) $\lambda_j \le \mu_j$ *при* $j < k$;

c) $\lambda_j = \mu_j$ *при* $j = k$.

Тогда

$$\prod_{j, j \neq k} \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right| \geq \prod_{j, j \neq k} \left| 1 - \frac{\mu_k}{\mu_j} \right|.$$

Эта лемма доказывается просто. Достаточно заметить, что для каждого сомножителя

$$\left| 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right| \geq \left| 1 - \frac{\mu_k}{\mu_j} \right|$$

при всех значениях $j \neq k$.

Лемма 2. *Пусть* γ_k *— строго возрастающая последовательность положительных чисел, образующая* R*-множество при уточненном порядке* $\rho(r) \to \rho < 1/2$, *и пусть* μ_k *— ее подпоследовательность вида* $\mu_k = \gamma_{mk+r_k}$, *где* $m - 1 \in \mathrm{N}^+$, $0 < r_k < m$. *Тогда для функции*

$$\varphi_m(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right)$$

при $z = \mu_k$ *справедлива такая оценка*

$$\frac{1}{|\varphi_m'(z)|} \leq A_0 \, |\mu_k|^N,$$

где постоянные $A_0 > 0$ *и* $N \in \mathrm{N}^+$ *зависят только от последовательности* γ_k *и не зависят от выбора* m *и последовательности* r_k.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_{m,r}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_{mk+r}}\right)$$

при $m - 1 \in \mathrm{N}^+$, $0 \leq r < m$. Пусть $\varphi(z) = \varphi_{1,0}(z)$. При $l \neq r$ корни функций $\varphi_{m,r}$ и $\varphi_{m,l}$ перемежаются и, следовательно, функция

$$\mathrm{Im}\, \left(\varphi_{m,r}(z)/\varphi_{m,l}(z)\right) \mathrm{Im}\, z$$

имеет постоянный знак при $\mathrm{Im}\, z \neq 0$. Согласно неравенству Каратеодори для полуплоскости [2, с. 18] при $|z| \geq 1$ для функции $f(z) = \varphi_{m,r}(z)/\varphi_{m,l}(z)$ выполнено

$$\frac{1}{5} \, |f(i)| \, \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{|z|^2} \leq |f(z)| \leq 5 \, |f(i)| \, \frac{|z|^2}{|\mathrm{Im}\, z|}.$$

Но так как

$$|\varphi(i)| \geq |f(i)| \geq 1/|\varphi(i)|,$$

то вне круга $|z|<1$ имеет место такое неравенство

$$|\operatorname{Im} z|/\left|C_0z^2\right| \le \left|\varphi_{m,r}(z)/\varphi_{m,l}(z)\right| \le \left|C_0z^2\right|/|\operatorname{Im} z|, \tag{7}$$

где постоянная C_0 зависит только от функции φ.

Учитывая тот факт, что $\varphi_{m,0}, \varphi_{m,1}, \dots, \varphi_{m,m-1} = \varphi$ из неравенств (7) при фиксированном значении r и $l = 0,1,\dots,m-1$, при $|z| \ge 1$ получаем

$$\frac{|\operatorname{Im} z|}{\left|C_0z^2\right|} \le \frac{\left|\varphi_{m,r}(z)\right|}{|\varphi(z)|^{1/m}} \le \frac{\left|C_0z^2\right|}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Так как корни функций $\varphi_m(z)$ и $\varphi_{m,0}(z)$ перемежаются, то для отношения $\varphi_m/\varphi_{m,1}$ также справедливо неравенство типа (7) и, следовательно, вне круга $|z| \le 1$ выполнено

$$\frac{|\operatorname{Im} z|^2}{\left|C_0z^2\right|^2} \le \frac{\left|\varphi_m(z)\right|}{|\varphi(z)|^{1/m}} \le \frac{\left|C_0z^2\right|^2}{|\operatorname{Im} z|^2}. \tag{8}$$

Так как последовательность γ_k образует R-множество, то при некотором $d>0$ круги вида $|z-\gamma_k| \le d$ не пересекаются и не содержат других корней функции $\varphi(z)$. Пусть $P(z,\xi)$ — ядро Пуассона кольца $\Pi = \{z\colon |z| \in (d/4,d)\}$, $z\in\Pi$, $\xi\in\partial\Pi$. Найдется такая постоянная $K>0$, что для всех z, $|z| = d/2$, выполнено

$$P(z,\xi) \le K$$

и так как $P(z,\xi)>0$, то для любой гармонической функции $u(z)$ в этом кольце справедливо неравенство

$$-K\int u^-(\xi)\,d|\xi| \le u(z) \le K\int u^+(\xi)\,d|\xi|. \tag{9}$$

Применяя к функции $u(z) = \ln\left|\varphi_m(z+\gamma_k)/\varphi^{1/m}(z+\gamma_k)\right|$ неравенство (9) и учитывая (8) мы получаем, что на окружности $|z-\gamma_k| \le d/2$ выполнено такое неравенство (A, $\delta>0$ — некоторые постоянные, зависящие только от функции $\varphi(z)$)

$$\left|\varphi_m(z)\right| \ge \frac{\left|\varphi^{1/m}(z)\right|}{A\left|C_0(\gamma_k+d)^2\right|^{2K}} \ge \frac{\delta}{\left|C_1\gamma_k\right|^{2K+2}}.$$

(Последняя часть неравенства следует из теоремы Б. Я. Левина [2, с. 96], согласно которой модуль функции $\varphi(z)$ на окружностях вида $|z-\gamma_k| = d$ ограничен снизу некоторой положительной постоянной, ввиду строгой положительности индикатора функции $\varphi(z)$.)

Для завершения доказательства леммы нам достаточно воспользоваться неравенством

$$\left|1/\varphi_m'(\mu_k)\right| \le d\max\{\,|1/\varphi_m(z)| : |z-\mu_k| = d\,\}.$$

Лемма доказана.

Пусть λ_k — последовательность положительных чисел, которая образует R-множество при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho < 1/2$. Выберем N_m — последовательность положительных чисел, для которой $N_{m+1}/N_m \geq 2$, и построим последовательность γ_k как объединение множеств $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и точек вида $\lambda_k + \frac{j}{m} d\lambda_k^{1-\rho(\lambda_k)}$, где $1 \leq j \leq m-1$, $\lambda_k \in [N_m, N_{m+1})$, а $d > 0$ — число, фигурирующее в пункте b) определения R-множества (d таково, что круги $|z - \lambda_k| \leq d\lambda_k^{1-\rho(\lambda_k)}$ не пересекаются). Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 3. *Построенная выше последовательность γ_k является R-множеством относительно некоторого уточненного порядка $\rho_1(r) \to \rho$, где $\rho < 1/2$ — то же, что и для порядка $\rho(r)$ последовательности λ_k.*

Доказательство. Для доказательства этой леммы нам достаточно построить уточненный порядок $\rho_1(r)$ и показать, что для последовательности γ_k выполнены условия a) и b).

Пусть $\varphi(r) = r^{\rho(r)}$. Положим

$$\rho_1(r) = \frac{\ln \int\limits_0^r L(t)d\varphi(t)}{\ln r},$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок для последовательности λ_k, $\rho = \lim \rho(r)$, а $L(t)$ — положительная функция на интервале $(0,\infty)$, график которой есть ломаная с вершинами

$$(0,0),\ (N_1,1),\ \ldots,\ (N_m,m),\ \ldots$$

Так как $N_{m+1}/N_m \geq 2$, то функция $L(t)$ вогнута на интервале $(0,\infty)$ и, кроме того, выполнено

$$L(t)/L(\alpha t) \to 1, \qquad t \to +\infty, \qquad \alpha \in (0,1). \tag{10}$$

Прямое вычисление с использованием свойства (10) показывает, что

$$\rho_1(r) \to \rho,\ r\rho'(r)\ln r \to 0 \ \text{ при } \ r \to +\infty,$$

т.е. функция $\rho_1(r)$ является некоторым уточненным порядком.

Пусть $n(r)$ и $n_1(r)$ — считающие функции последовательностей λ_k и γ_k соответственно. Используя тот факт, что $n(r)/\varphi(r) \to c > 0$, $c \neq +\infty$, можно показать, что $n_1(r)/\varphi_1(r) \to c_1 > 0$, $c_1 \neq +\infty$, где $\varphi_1(r) = \exp\{\rho_1(r)\ln r\}$. Для этого достаточно воспользоваться определением $\rho_1(r)$ и соотношением (10).

Наконец покажем, что последовательность γ_k является R-множеством относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$. Действительно, так как λ_k — R-множество относительно порядка $\rho(r)$, то при некотором $d > 0$ круги

$$| z - \lambda_k | \le d\lambda_k^{1-\rho(\lambda_k)}$$

не пересекаются, а значит, как следует из построения последовательности γ_k и функции $L(t)$, не пересекаются при некотором $d > 0$ и круги

$$| z - \gamma_k | \le \frac{d}{L(\gamma_k)} \gamma_k^{1-\rho(\gamma_k)}.$$

Соотношение

$$\frac{\ln L(r)}{\ln r} \sim \rho_1(r) - \rho(r)$$

при $r \to \infty$ показывает, что при некотором $d > 0$ не будут также пересекаться круги

$$| z - \gamma_k | \le d\gamma_k^{1-\rho_1(\gamma_k)},$$

т.е. последовательность γ_k будет R-множеством относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть N_m — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $N_{m+1}/N_m \ge 2$, выбор которой мы уточним в дальнейшем, и пусть γ_k — последовательность, построенная по N_m и λ_k указанным выше способом. Согласно лемме 3 последовательность γ_k является R-множеством относительно некоторого уточненного порядка $\rho_1(r) \to \rho < 1/2$. Последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем обозначать через Λ и Γ соответственно. Для любого натурального числа m мы построим последовательность $M_m = \{\mu_k(m) = m\gamma_k + r_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$, где $0 < r_k(m) < m$ выбраны так, чтобы выполнялись условия:

1) $M_m \bigcap (0,N_m) \subseteq \Lambda \bigcap (0,N_m)$;

2) $M_m \bigcap [N_m,N_{m+1}) = \Lambda \bigcap [N_m,N_{m+1})$;

3) $M_m \bigcap [N_{m+1},\infty) \supseteq \Lambda \bigcap [N_{m+1},\infty)$.

Из построения последовательности γ_k легко следует, что такой выбор возможен. Пусть $P_m(z)$ — полином вида

$$P_m(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus M_m} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

и пусть

$$B_m = \sup \{ c\colon c \mid P_m(\lambda) \mid \le \lambda^{N+2} \mid \varphi'(\lambda) \mid, \lambda \in \Lambda \} =$$

$$= \sup \{ c\colon c \mid P_m(\lambda) \mid \le \lambda^{N+2} \mid \varphi'(\lambda) \mid, \lambda \in \Lambda \setminus (\Lambda \setminus M_m \},$$

где N — число, фигурирующее в неравенстве леммы 2, $\varphi(z)$ — каноническое произведение, построенное по последовательности Λ. Если мы покажем, что $B_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то тем самым мы покажем, что

$$u_{N+2}(0) = +\infty$$

и, следовательно, теорема будет доказана.

Обозначим

$$\psi_m(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Непосредственное вычисление дает

$$\psi_m{}'(\lambda_k) = \lambda_k^{-1} \prod_{\lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m),\, \lambda \neq \lambda_k} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

для любого $\lambda_k \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_k)$. Поэтому

$$B_m = \inf\{\lambda^{N+2} \mid \psi_m{}'(\lambda) \mid : \lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)\} \geq$$

$$\geq \inf\{M_m\} \inf\{\lambda^{N+1} \mid \psi_m{}'(\lambda) \mid : \lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)\}.$$

Так как $\inf\{M_m\} \to \infty$, то нам остается показать, что второй множитель правой части последнего неравенства ограничен снизу некоторым положительным числом, не зависящим от m. Перейдем к оценке этого множителя. Рассмотрим два случая в зависимости от значения $\lambda_k \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)$.

Случай 1 $(\lambda_k < N_{m+1})$. Заметим, что согласно выбору последовательности M_m выполнено

$$M_m \cap (0, N_{m+1}) = \{\Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)\} \cap (0, N_{m+1}),$$

$$M_m \cap [N_{m+1}, +\infty) \supseteq \{\Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)\} \cap [N_{m+1}, +\infty),$$

поэтому, если $\varphi_m(z)$ — каноническое произведение, построенное по множеству M_m, то из лемм 1 и 2 мы получаем такую оценку

$$\mid \lambda_k^N \psi_m{}'(\lambda_k) \mid = \lambda_k^{N-1} \prod_{\lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right| \geq \lambda_k^{N-1} \prod_{\mu \in M_m} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right| =$$

$$= \mid \lambda_k^N \varphi_m{}'(\lambda_k) \mid \geq 1/A_0 \text{ при } \lambda_k < N_{m+1}, \tag{11}$$

где A_0 — положительная постоянная, фигурирующая в лемме 2 и не зависящая от m и k.

Случай 2 $(\lambda_k \geq N_{m+1})$. Имеем

$$\mid \lambda_k^N \psi_m{}'(\lambda_k) \mid = \lambda_k^{N-1} \prod_{\lambda \in \Lambda\setminus(\Lambda\setminus M_m)} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right| = \Pi_1 \Pi_2 \cdot \lambda_k^{N-1},$$

где Π_1 — произведение по $\lambda < N_m$, а Π_2 — произведение по $\lambda \geq N_m$. Так как $N_{m+1}/N_m \geq 2$, то каждый множитель произведения Π_1 по модулю не меньше единицы и, следовательно,

$$\left| \lambda_k^N \psi_m'(\lambda_k) \right| \ge \lambda_k^{N-1} \Pi_2 . \tag{12}$$

Оценим теперь Π_2, распорядившись выбором последовательности N_m. Согласно свойствам 2) и 3) последовательности M_m выполнено

$$\Pi_2 = \prod_{\lambda \in \Lambda, \lambda \ge N_m} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right| = \frac{|\lambda_k \varphi'(\lambda_k)|}{|Q_m(\lambda_k)|}, \tag{13}$$

где

$$Q_m(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda, \lambda < N_m} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right).$$

Так как правая часть (13) при каждом фиксированном m стремится к бесконечности, то найдется такое $N_{m+1} \ge 2N_m$, что при всех $\lambda_k \ge N_{m+1}$ будет выполнено $\Pi_2 \ge 1$, а следовательно,

$$\left| \lambda_k^N \psi_m'(\lambda_k) \right| \ge \lambda_1^{N-1} > 0 \text{ при } \lambda_k \ge N_{m+1}. \tag{14}$$

Из оценок (14) и (11), как было отмечено выше, следует справедливость теоремы 2.

Автор выражает благодарность профессору И. В. Островскому, привлекшему внимание автора к этой задаче, а также М. Л. Содину, принявшему активное участие в обсуждении работы на стадии подготовки к печати. В частности, М. Л. Содину принадлежит предложение использовать для доказательства теоремы 2 неравенство Каратеодори, которое в значительной степени позволило упростить изложение. Небольшой исторический экскурс в начале статьи также появился благодаря стараниям М. Л. Содина.

Список литературы

1. *B.Ya. Levin*, Distribution of Zeros of Entire Functions. AMS, Providence, Rhode Island (1964), p. 493.
2. *P. Koosis*, Measures orthogonales extremales pour l'aproximation ponderee par des polynomes. C. R. Acad. Sci. Paris (1990), v. 311, ser. I, p. 503–506.

A uniqueness theorem connected with weight polynomial approximation on a sequence

A. E. Fryntov

One says that $q(z)$ is a function of Humburger class if it is a real entire function with simple real zeros $\{\lambda_k\}$ and satisfying the conditions: the expansion

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{q'(\lambda)(z-\lambda)}$$

with the convergence series

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda^m}{q'(\lambda)}, \qquad (m = 0,1,2,\ldots),$$

is valid.

P. Koosis noted that not any function $q(z)$ of this class possesses the property that polynomials are complete in the space $L_2(\Lambda, 1/(q'(\lambda))^2)$ and gave a criteria of this completeness.

However, the question whether some functions important in applications do satisfy this criteria remained open. It is proven in the paper that if the zeros λ_k of the function $q(z)$ are separated in the following sense: for some $d>0$ the disks $|z-\lambda_k| \le d\lambda_k^{1-\rho}$, $\lambda_k \in \Lambda$, do not intersect ($\rho < 1/2$ is the order of convergence of the sequence (λ_k), then polynomials are complete in the corresponding space.