Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 363–379

УДК 517.5

О функциях вполне регулярного роста по выделенной переменной

П. З. Агранович

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 30 сентября 1993 г.

Доказан критерий вполне регулярности роста по выделенной переменной плюрисубгармонической в $G \times \mathbf{C}$ функции $u(z,w)$, где G — открытое множество в $\mathbf{C}^n$.

Доведен критерій цілком регулярності росту по вилученій змінної плюрісубгармонічної у $G \times \mathbf{C}$ функції $u(z,w)$, де G — відкрита множина у $\mathbf{C}^n$.

1. Введение

Теория целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) в $\mathbf{C}$, построенная в работах Левина–Пфлюгера в тридцатых годах двадцатого столетия, в дальнейшем была распространена на другие классы функций — субгармонические [1], голоморфные в полуплоскости [2], целые функции многих переменных [3, 4] и т.д. При этом, в основном, регулярность роста рассматривалась относительно так называемого радиального индикатора. В работе [5] было введено понятие индикатора по выделенной переменной и рассмотрены целые функции многих переменных, являющиеся по одной из переменных для почти всех фиксированных значений остальных переменных функциями в.р.р. Для таких функций как $f(z,w)$, $z \in \mathbf{C}^n$, $w \in \mathbf{C}$, было доказано наличие D'-сходимости * функций $r^{-\rho} \ln |f(z,rw)|$ и, как следствие, существование плотности (в некотором смысле) нулевого множества функции f.

В данной работе показано, что та же D'-сходимость имеет место и при менее ограничительных условиях, получена эквивалентность этих условий указанной D'-сходимости и существованию плотности соответствующего нулевого множества в выделенном направлении. Отметим еще, что рассмотрены произвольные плюрисубгармонические в $G \times \mathbf{C}$ функции, где G — открытое множество в $\mathbf{C}^n$.

Приведем некоторые определения и обозначения, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть G — произвольная область в $\mathbf{C}^n$.

Определение 1. *Функция $u(z,w)$, $z \in G$, $w \in \mathbf{C}$, называется функцией не более чем нормального типа при порядке ρ по переменной w, если*

* Сходимость в пространстве обобщенных функций.

$$u(z,w) \le C_1(z)\,|\,w\,|^{\rho} + C_2(z) \quad \forall z \in G,$$

где $C_i(z)$, $i = 1,2$ *— ограниченные функции в любой подобласти* $G' \Subset G$.

Через PSH обозначим множество плюрисубгармонических на $G\times\mathbb{C}$ функций, а через $PSH[\rho]$ — совокупность функций из PSH не более чем нормального типа при порядке ρ по переменной w.

Определение 2. *Индикатором (в направлении w) функции* $u(z,w) \in PSH[\rho]$ *называется функция*

$$h^*(z,w) = \varlimsup_{(z',w')\to(z,w)} \ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{u(z',tw')}{t^{\rho}}.$$

Далее, через n_z обозначим меру в $\mathbb{C}$, определяемую при фиксированном $z \in G$ равенством

$$n_z = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w\,\partial\overline{w}}.$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Положим,

$$u^{[t]}(z,w) = t^{-\rho}\,u(z,tw).$$

Тогда,

$$h^*(z,w) = \varlimsup_{(z',w')\to(z,w)} \ \varlimsup_{t\to\infty} u^{[t]}(z',w').$$

Через $n_z^{[t]}$ обозначим меру, определяемую равенством

$$n_z^{[t]}(E) = t^{-\rho}\,n_z(tE) \ \ \forall E\subset\mathbb{C}$$

Отметим, что для характеристики массивности, содержащейся в $G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}$, $G'\Subset G$, части нулевого множества целой функции $f(z,w)$, в [5] введена величина $n_f(t,G')$, равная

$$4\int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}} \frac{\partial^2 \ln|\,f(z,w)\,|}{\partial w\,\partial\overline{w}}\,d\lambda_z\,d\lambda_w.$$

(Здесь и в дальнейшем $d\lambda$ — мера Лебега.)

По аналогии с целыми функциями положим

$$n_u(t,G') = 4\int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}} \frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w\,\partial\overline{w}}\,d\lambda_z\,d\lambda_w = \int\limits_{G'} d\lambda_z \int\limits_{\{\,|\,w\,|<t\,\}} dn_z(w),\ \ G'\Subset G.$$

Определение 3. *Множество E называется* $C_{0,1}$*-множеством в* $G\times\mathbb{C}$, *если для любой подобласти* $G'\Subset G$ *существует такая система "цилиндров"* $\Pi_j = \{\,z : |\,z - z_j\,| < r_j\,\}\times\{\,w : |\,w - w_j\,| < R_j\,\}$, $j = \overline{1,n}$, *что:*

i) $E\cap(G'\times\mathbb{C}) \subset \bigcup\limits_j \Pi_j$;

ii) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum\limits_{j:\,|w_j|<R} r_j^{2n} R_j = 0;$

iii) радиусы любого "цилиндра" Π_j, *покрывающего точку* $(z,w) \in E$, $z \in G'$, *удовлетворяют условию*

$$\frac{R_j}{r_j} \le C\,|\,w\,|\,,$$

где постоянная C *зависит от* G' *и не зависит от выбора* Π_j.

Определение 4. *Функция* $u(z,w) \in PSH[\rho]$ *называется функцией в.р.р., если существует такое* $C_{0,1}$*-множество* E, *что*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{z\in G',\ |w|=R \\ (z,w)\overline{\in} E}} \left| \frac{u(z,w)}{|\,w\,|^{\rho}} - h^*\left(z, \frac{w}{|\,w\,|}\right) \right| = 0 \ \ \forall G' \Subset G.$$

2. Формулировки основных результатов

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $u \in PSH[\rho]$ *была функцией в.р.р., необходимо и достаточно, чтобы*

$$D' - \lim_{t\to\infty} u^{[t]}(z,w) = h^*(z,w). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $u \in PSH[\rho]$, $\rho \overline{\in} \mathbf{Z}$. *Тогда, для того чтобы существовал предел*

$$D' - \lim_{t\to\infty} u^{[t]}(z,w), \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi(z,w) \in C_0^{\infty}(G\times\mathbf{C})$ *существовал предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int \varphi(z,\zeta)\, dn_z^{[t]}(\zeta)\, d\lambda_z = \int \varphi(z,\zeta)\, d\hat{n}_z(\zeta)\, d\lambda_z, \tag{3}$$

т.е., чтобы меры $n_z^{[t]}$, *рассматриваемые как элементы из* $D'(G\times\mathbf{C})$, *при* $t\to\infty$ *сходились к некоторой мере* $\hat{n}_z$.

Теорема 3. *Пусть функция* $u \in PSH[p]$, $p \in \mathbf{Z}$. *Тогда, для существования предела (2) необходимо и достаточно, чтобы существовали предел (3) и предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int_{\{|\zeta|<t\}} \frac{\cos p\psi}{|\,\zeta\,|^{p}}\, dn_z(\zeta) \ \ \forall G' \Subset G, \tag{4}$$

где $\alpha \in D(G')$, ψ *— угол между векторами* w *и* ζ.

Доказательства теоремы 1 и теорем 2 и 3 приведены в разделах 4 и 5 соответственно.

3. Вспомогательные предложения

В этом разделе доказываются все леммы, которые будут использованы при доказательстве теорем 1-3.

Лемма 1. *Пусть* $u \in PSH[\rho]$, *тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\, u(z,re^{i\theta})\,|\, d\theta \le C_1(z)r^{\rho} + C_2(z) - u(z,0), \tag{5}$$

где $C_i(z)$, $i = 1,2$ — *ограниченные функции в любой области* $G' \Subset G$.

Доказательство. Из субгармоничности по w функции $u(z,w)$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\, u(z,re^{i\theta})\,|\, d\theta \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u^+(z,re^{i\theta})\, d\theta - u(z,0), \tag{6}$$

откуда, в силу определения 1, получаем (5).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $u \in PSH[\rho]$, *то*

$$n_z\big(\{\,|\,w\,| < t\,\}\big) \le C_1(z)t^{\rho} + C_2(z) - u(z,0), \tag{7}$$

где $C_i(z)$, $i = 1,2$, *ограничены в любой области* $G' \Subset G$.

Утверждение этой леммы, т.е. неравенство (7), стандартным образом следует из формулы Иенсена и определения 1.

Введем теперь обозначения, используемые в лемме 3.

Пусть $u \in PSH[\rho]$. Обозначим через q наименьшее целое число, для которого сходится интеграл

$$\int_{G'} d\lambda_z \int_1^{\infty} \frac{n_z(t)}{t^{q+2}}, \qquad G' \Subset G.$$

Множество $\widetilde{G}' = \left\{z \in G' : \int^{\infty} t^{-q-2}\, n_z(t)dt = \infty\right\}$, очевидно, имеет меру нуль; для $z \in G' \setminus \widetilde{G}'$ функция $u(z,w)$ имеет следующее представление [6]:

$$u(z,w) = \int_{\{|\zeta| \le 1\}} \ln|\, w - \zeta\,|\, dn_z(\zeta) + \int_{\{|\zeta| > 1\}} h_q(w,\zeta)\, dn_z(\zeta) + H_q(z,w), \tag{8}$$

где

$$h_q(w,\zeta) = \ln \left| 1 - \frac{w}{\zeta} \right| + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} \left| \frac{w}{\zeta} \right|^k \cos k\psi, \qquad \psi = \widehat{w,\zeta},$$

а $H_q(z,w)$ является измеримой по (z,w) функцией, а по w — гармоническим многочленом степени не выше q.

Лемма 3. *Если* $u \in PSH[\rho]$, $\rho \overline{\in} \mathbb{Z}$, *то*

$$D' - \lim_{t \to \infty} t^{-\rho} H_q(z,tw) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Многочлен $H_q(z,w)$ имеет вид $H_q(z,w) = \sum_{k=0}^{q} a_k(z) w^k$, где $q<\rho$. Для коэффициентов $a_k(z)$, как известно (см., например [6]), справедлива следующая оценка:

$$| a_k(z) | \leq \mathrm{Const}\, R^{-k} \max_{|w|=R} \left| H_q(z,w) \right|,$$

причем в рассматриваемой ситуации Const не зависит не только от $R>0$, но и от $z \in G' \setminus \widetilde{G}'$. Отсюда, учитывая равенство (8) и проводя стандартные рассуждения, заключаем, что $| a_k(z) | \leq \mathrm{Const}\, R^{-k} \left(C(z)R^{\rho} - u(z,0)\right)$, где $C(z)$ — функция, ограниченная в любой области $G' \Subset G$. Из этого неравенства сразу следует (9).

Лемма доказана.

Следующие три леммы приводим здесь без доказательств, так как они фактически дословно переносятся из [7].

Лемма 4. *Пусть равномерно ограниченное сверху семейство функций* $u_t(z,w) \in PSH\left(G \times \{ |w| < R \}\right)$ *удовлетворяет условию:* $\exists\, D' - \lim_{t \to \infty} u_t = u$. *Тогда* $\forall\, r \in (0,R)$, $\forall\, G' \Subset G$ *и* $\forall\, \alpha \in D(G')$, $\forall\, \gamma \in C(\{ |\zeta| = r \})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t \to \infty} \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int_{\{|\zeta|=r\}} \gamma(\zeta) u_t(z,\zeta)\, d\sigma = \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int_{\{|\zeta|=r\}} \gamma(\zeta) u(z,\zeta)\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ *— элемент длины окружности.*

Лемма 5. *Пусть* $u(z,w) \in PSH$, *пусть числа* r *и* r' *таковы, что* $0 < r' < r$,

$$\int_{G'} d\lambda_z \int_{\{|\zeta|=r\}} dn_z(\zeta) = 0 \text{ и } \int_{G'} d\lambda_z \int_{\{|\zeta|=r'\}} dn_z(\zeta) \quad \forall\, G' \Subset G.$$

Тогда

$$2\pi \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int_{\{r' \leq |\zeta| < r\}} \gamma(\zeta)\, dn_z(\zeta) - \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int_{\{r' \leq |\zeta| < r\}} \Delta\gamma(\zeta)\, u(z,\zeta)\, d\lambda_\zeta =$$

$$= \int\limits_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \left(\int\limits_{\{|\zeta|=r\}} \left(u\frac{\partial\gamma}{\partial n} - \gamma\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma - \int\limits_{\{|\zeta|=r'\}} \left(u\frac{\partial\gamma}{\partial n} - \gamma\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \right),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — *внутренная нормаль к* $\{|\zeta|=r\}$; $G' \Subset G$, $\alpha \in D(G')$, $\gamma \in C^2\left(\{r' \le |\zeta| < r\}\right)$.

Лемма 6. *Пусть* $u_t \in PSH$ — *равномерно ограниченное сверху семейство, удовлетворяющее условию:* $\exists\, D' - \lim\limits_{t\to\infty} u_t = u$. *Тогда, если число* $r > 0$ *таково, что* $\int\limits_{G'} d\lambda_z \int\limits_{\{|\zeta|=r\}} dn_z(\zeta) = 0$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int\limits_{\{|\zeta|=r\}} \gamma(\zeta)\frac{\partial u_t}{\partial n}\, d\sigma = \int\limits_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int\limits_{\{|\zeta|=r\}} \gamma(\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

$$\forall\ G' \Subset G,\ \forall \alpha \in D(G'),\ \forall\ \gamma \in C^2(\{|\zeta| = r\}).$$

Для того чтобы сформулировать последнее вспомогательное предложение, введем следующие обозначения. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда:

$$E_{t,\varepsilon} = \left\{(z,w) : z \in G,\ |w| < 1,\ |u^{[t]}(z,w) - h^*(z,w)| > \varepsilon \right\},$$

$$E'_{t,\varepsilon} = E_{t,\varepsilon} \cap \left\{(z,w) : z \in G',\ w \in \mathbb{C} \right\};$$

$$E_\varepsilon = \left\{(z,w) : z \in G,\ w \in \mathbb{C},\ |u(z,w) - h^*(z,w)| > \varepsilon\, |w|^\rho \right\},$$

$$E'_t = E_\varepsilon \cap \left\{(z,w) : z \in G',\ w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Лемма 7. *Если* $(2n+1)$*-мера Карлесона * множества* $E'_{t,\varepsilon}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой подобласти* $G' \Subset G$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$, *то* E_ε *является* $C_{0,1}$*-множеством.*

Доказательство. Пусть (z^0, w^0) — произвольная точка из E_ε. Для определенности будем в дальнейшем считать, что $2^{m-1} < |w^0| \le 2^m$. Покажем, что точка $\left(z^0, \dfrac{w^0}{2^m}\right) \in E_{2^m, 2^{-\rho}\varepsilon}$. В самом деле, так как $(z^0, w^0) \in E_\varepsilon$, то из определения множества E_ε следует

$$\varepsilon < |w^0|^{-\rho} \left| u(z^0, w^0) - h^*(z^0, w^0) \right| =$$

$$= |w^0|^{-\rho}\, 2^{m\rho} \left| 2^{-m\rho} u\left(z^0, \frac{2^m w^0}{2^m}\right) - h^*\left(z^0, \frac{w^0}{2^m}\right) \right| \le$$

---

* Пусть $\{ |x - x_j| < r_j \}$ — покрытие множества $E \subset \mathbb{R}^m$ шарами. Следуя В. С. Азарину [8], назовем α-мерой Карлесона величину $\operatorname{mes}_c^\alpha(E) = \inf \sum\limits_j r_j$, где inf берется по множеству всевозможных покрытий множества E.

$$\frac{2^{m\rho}}{2^{m\rho-\rho}} \left| 2^{-m\rho} u\left(z^0, \frac{2^m w^0}{2^m}\right) - h^*\left(z^0, \frac{w^0}{2^m}\right) \right| = 2^\rho \left| u^{[2^m]}\left(z^0, \frac{w^0}{2^m}\right) - h^*\left(z^0, \frac{w^0}{2^m}\right) \right|.$$

Таким образом, если $2^{k-1} < R \le 2^k$, то справедливо включение

$$E'_\varepsilon \cap \{(z,w) : z \in G, \ | w | < R\} \subset \left(\{(z,w) : z \in G', \ | w | \le 1\}\right) \cup$$
$$\cup \left(\bigcup_{m=1}^{k} \left\{(z,w) : \left(z, \frac{w}{2^m}\right) \in E_{2^m, 2^{-\rho}\varepsilon}, \ z \in G', \ 2^{m-1} < | w | \le 2^m \right\} \right).$$

Очевидно, что

$$\{(z,w) : (z,w) \in E_\varepsilon, \ z \in G', \ | w | > 1\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{(z,w) : \left(z, \frac{w}{2^m}\right) \in E_{2^m, 2^{-\rho}\varepsilon}, \ z \in G', \ 2^{m-1} < | w | \le 2^m \right\}.$$

Согласно определению mes_c^α, существуют шары $B(j,t)$, $j = 1,2,\ldots$, образующие покрытие множества $E'_{t,2^{-\rho}\varepsilon}$ и такие, что их радиусы $r_{j,t}$ удовлетворяют условию

$$\sum_j r_{j,t}^\alpha < 2\mathrm{mes}_c^\alpha \left(E'_{t,2^{-\rho}\varepsilon}\right). \qquad (10)$$

Рассмотрим семейство эллипсоидов

$$D_{j,m} = \left\{(z,w) : \left(z, \frac{w}{2^m}\right) \in B(j, 2^m)\right\}, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

и выберем те из них, у которых центры лежат в слое

$$\{(z,w) : z \in G, \ 2^{m-2} \le | w | \le 2^{m+1}\}.$$

Эти эллипсоиды $\widetilde{D}_{j,m}$ образуют покрытие множества

$$\left\{(z,w) : \left(z, \frac{w}{2^m}\right) \in E'_{2^m, 2^{-\rho}\varepsilon}, \ 2^{m-1} < | w | \le 2^m \right\}.$$

Следовательно $E'_\varepsilon \setminus \{ (z,w) : | w | < 1 \} \subset \bigcup_m \bigcup_j \widetilde{D}_{j,m}$, а при $2^{k-1} < R \le 2^k$ имеет место включение

$$E'_\varepsilon \cap \{(z,w) : | w | < R\} \subset \{(z,w) : z \in G', \ | w | < 1\} \cup \left(\bigcup_{m=1}^{k} \bigcup_j \widetilde{D}_{j,m} \right).$$

Нетрудно видеть, что если $\widetilde{r}_{j,2^m}$, $\widetilde{R}_{j,2^m}$ — радиусы эллипсоида $\widetilde{D}_{j,2^m}$, то согласно (10),

$$\frac{1}{R} \sum_{m=1}^{k} \sum_j \widetilde{r}_{j,2^m}^{\,2n} \widetilde{R}_{j,2^m} \le \frac{1}{2^{k-1}} \sum_j \widetilde{r}_{j,2^m}^{\,2n} \left(\frac{\widetilde{R}_{j,2^m}}{2^m} \right) \le$$
$$\le \frac{\mathrm{Const}}{2^{k-1}} \sum_{m=1}^{k} 2^m \, \mathrm{mes}_c^{2n+1} \, E'_{t,2^{-\rho}\varepsilon}.$$

Отсюда, в силу условия леммы, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{m=1}^{k} \sum_j \tilde{r}_{j,2^m}^{2n} \tilde{R}_{j,2^m} = 0.$$

Таким образом, установлено выполнение условия *ii)* определения 3. Справедливость условий *i)* и *iii)* этого определения очевидна, следовательно, множество E_ε является $C_{0,1}$-множеством, что и требовалось доказать.

4. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем достаточность условия (1). Так как $u(z,w) \in PSH[\rho]$, то семейство $\{u^{[t]}(z,w)\}$ ограничено сверху. Значит, как показано в [7], из условия (1) следует сходимость семейства $\{u^{[t]}(z,w)\}$ при $t \to \infty$ к функции $h^*(z,w)$ по α-мере Карлесона, $\alpha \in (2n, 2n+2]$ в каждой области $G' \times \{|w| < 1\}$, $G' \subset G$. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (2n, 2n+2]$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{mes}_c^\alpha \left(E'_{t,\varepsilon}\right) = 0.$$

В частности, для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{mes}_c^{2n+1} \left(E'_{t,\varepsilon}\right) = 0,$$

а следовательно, в силу леммы 7 функция $u(z,w)$ является функцией в.р.р. Таким образом, достаточность условия (1) доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению необходимости этого условия. Пусть E — $C_{0,1}$-множество, входящее в определение в.р.р. для функции $u(z,w)$ и области $G' \times \mathbb{C}$, $G' \subset G$. Обозначим через U покрытие E цилиндрами $\left(\{|z - z_j| < r_j\} \times \{|w - w_j| < R_j\}\right)_{j=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют условиям *i)–iii)* определения 3. Очевидно, что условие *ii)* этого определения влечет за собой выполнение равенства

$$ii')\ \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \sum_{j:\,|w_j|<R} r_j^{2n} R_j^2 = 0.$$

Покажем, что указанное покрытие можно заменить другим, для которого выполнены условия *i)*, *ii')*, *iii)*, и замыкание каждого из его цилиндров содержит хотя бы одну точку из CE. Пусть $(z,w) \in E \cap \left\{(z,w) : z \in G',\ 2^m < |w| \le 2^{m+1}\right\}$, а $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in CE$ — та точка, на которой достигается минимум функции

$$d^2(\zeta, \eta) = |z - \zeta|^2 + \left(\frac{|w - \eta|}{2^m}\right)^2, \qquad (\zeta, \eta) \in CE.$$

Обозначим этот минимум $d^2 = d^2(\tilde{z}, \tilde{w})$. Разобьем E на два подмножества:

$$E_1 = \{(z,w) : (z,w) \in E,\ d = 0\}, \qquad E_2 = E \backslash E_1.$$

Цилиндры из U, покрывающие множество E, очевидно, содержат точки из CE, поэтому построим требуемое покрытие для E_2. Согласно определению множества

E_2, для любой точки $(z,w) \in E_2 \bigcap \{(z,w) : z \in G',\, 2^m < |\, w \,| \le 2^{m+1}\}$ соответствующая точка $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \in CE$ лежит на границе эллипсоида $Э_{(z,w)}$ с центром в точке (z,w) и полуосями $(d,\ldots d;\, 2^m d, 2^m d)$. Из определения d следует, что $\operatorname{int}Э_{(z,w)} \subset E_2$. Легко видеть, что система $\Omega = \{Э_{(z,w)}\}_{(z,w) \in E_2}$ покрывает E_2 и удовлетворяет условию *iii*).

Более того, $\overline{Э}_{(z,w)}$ содержит точку из CE, если $(z,w) \in E_2$. Для обеспечения выполнения условия *ii*′) поступим следующим образом. В силу теоремы Безиковича о покрытиях из Ω и U, можно выделить конечно-кратные подпокрытия $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{U}$ соответственно, так что их кратности не превышают некоторой константы, зависящей лишь от размерности пространства. Обозначим через $\left(r_j^{(1)}, R_j^{(1)}\right)$ и $\left(r_j^{(2)}, R_j^{(2)}\right)$ соответствующие радиусы элементов покрытий $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{U}$. Тогда

$$\sum_j \left(r_j^{(1)}\right)^{2n} \left(R_j^{(1)}\right)^2 \le C_1(n) \sum_j \operatorname{Vol}\left(Э_{(z,w)}\right) \le$$

$$\le C_2(n) \operatorname{Vol}(E_2) \le C_3(n) \sum_j \left(r_j^{(2)}\right)^{2n} \left(R_j^{(2)}\right)^2,$$

где $C_i(n)$, $i = 1,2,3$ — константы, зависящие только от размерности пространства.

Так как для U условие *ii*′) выполнено, то и $\widetilde{\Omega}$ удовлетворяет условию *ii*′). Объединяя $\widetilde{\Omega}$ с выбранным ранее покрытием множества E_1, получаем искомое покрытие $\widehat{\Omega}$ множества E. Заменим теперь покрытие $\widehat{\Omega}$ покрытием В, которое построено следующим образом: каждый элемент из $\widehat{\Omega}$ покроем наименьшим цилиндром с центром в точке из CE и таким, чтобы его радиусы удовлетворяли условию *iii*). Очевидно, что радиусы покрытия В изменятся по сравнению с радиусами $\widehat{\Omega}$ не более чем в $C(n)$ раз, где $C(n)$ — константа, зависящая лишь от размерности пространства. Значит, для В выполнено условие *ii*′).

Из леммы 1 следует, что существует локально суммируемая функция $\tau(z)$ такая, что для любой непрерывной в G функции $\varphi(w)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\{|w|<1\}} |\,\varphi(w)\,|\,|\,u^{[t]}(z,w)\,|\, d\lambda_w \le \tau(z) \max_{|w| \le 1} |\,\varphi(w)\,| \,.$$

Пусть $\chi(z,w)$ непрерывная в $\overline{G' \times \{\,|\,w\,| \le 1\,\}}$, $G' \Subset G$, функция. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{G' \times \{|w| \le 1\}} |\,\chi(z,w)\,|\,|\,u^{[t]}(z,w)\,|\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Имеем

$$I = \int\limits_{\left(G' \times \{|w| \le 1\}\right) \setminus \{(z,w) : (z,tw) \in E\}} \chi(z,w)\, u^{[t]}(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w + \int\limits_{\{(z,w) : (z,tw) \in E\} \bigcap \left(G' \times \{|w| \le 1\}\right)} \chi(z,w)\, u^{[t]}(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w = I_1 + I_2 .$$

Сначала оценим I_2:

$$| I_2 | \le \int\limits_{\left(G'\times\{ | w | < 1 \}\right)\bigcap\{ (z,w) : (z,tw) \in E \}} | \chi(z,w) | \, | u^{[t]} (z,w) | \, d\lambda_z \, d\lambda_w \le \int\limits_{\left(G'\times\{ | w | < 1 \}\right)\bigcap\{ (z,w) : (z,tw) \in \mathrm{B} \}} | \chi(z,w) | \, | u^{[t]} (z,w) | \, d\lambda_z \, d\lambda_w .$$

Обозначим через $\left(\gamma_j, \Gamma_j\right)_{j=1}^{\infty}$ радиусы элементов покрытия В. Тогда, учитывая непрерывность $\chi(z,w)$ и оценку (6), получим

$$| I_2 | \le \mathrm{Const} \sum_{j:\, | w_j | - \Gamma_j \le t} \int\limits_{\{ | z - z_j | < \gamma_j \}} d\lambda_z \int\limits_{\{ | w - w_j | < \Gamma_j \}} | u^{[t]} (z,w) | \, d\lambda_w \le$$

$$\le \mathrm{Const}\cdot t^{-(\rho + 2)} \sum_{j:\, | w_j | - \Gamma_j \le t} \left[2 \int\limits_{\{ | z - z_j | < \gamma_j \}} d\lambda_z \int\limits_{\{ | w - w_j | < \Gamma_j \}} u^{+} (z,w) \, d\lambda_w - \int\limits_{\{ | z - z_j | < \gamma_j \}} u(z,w_j) \, d\lambda_z \right] =$$

$$= I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Отсюда, ввиду нормальности типа функции $u(z,w)$ и условия ii'), следует, что

$$\lim_{t \to} I_{2,1} (t) = 0. \tag{11}$$

Далее, в силу плюрисубгармоничности $u(z,w)$ имеем

$$I_{2,2} (t) \le - \frac{\mathrm{Const}}{t^{\rho+2}} \sum_{j:\, | w_j | - \Gamma_j \le t} u(z_j, w_j) \, \gamma_j^{2n} \, \Gamma_j^2, \qquad | w_j | < t.$$

Так как центры (z_j, w_j) элементов покрытия принадлежат множеству CE, то учитывая в.р.р. функции $u(z,w)$, заключаем, что

$$I_{2,2} (t) \le - \frac{\mathrm{Const}}{t^{\rho+2}} \sum_{j:\, | w_j | - \Gamma_j \le t} \left(\sup_{z \in G'} \left| h^* \left(z_j, \frac{w_j}{| w_j |}\right) \right| + \varepsilon \right) | w_j |^{\rho} \gamma_j^{2n} \, \Gamma_j^2 .$$

Отметим, что модуль индикатора целой функции на окружности $\{ | w | = 1 \}$ не превосходит ее типа, поэтому $\sup\limits_{z \in G'} \left| h^* \left(z_j, \frac{w_j}{| w_j |}\right) \right|$ конечен, а отсюда, в силу условия ii'), следует, что $\lim\limits_{t \to \infty} I_{2,2} (t) = 0$. Из этого выражения и из (11) получаем

$$\lim_{t \to \infty} I_2 (t) = 0 . \tag{12}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_1. Согласно определению 4, на множестве $Э_t = \left\{(z,w) : z \in G', \ | w | < t \right\} \setminus E$ справедливо равенство

$$u(z,w) = h^* (z,w) + o_z (| w |^{\rho}),$$

где, вообще говоря, $o_z (.)$ зависит от z, но $\max\limits_{z \in G'} \frac{o_z (| w |^{\rho})}{| w |^{\rho}} \to 0$ при $(z,w) \to \infty$ по указанному множеству $Э_t$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\left(G'\times\{\,|\,w\,|\,\le 1\,\}\right)\setminus\{(z,w):(z,tw)\in E\}} \chi(z,w)\, u^{[t]}(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w =$$

$$= \frac{1}{t^{\rho+2}} \int\limits_{Э_t} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right)\left(h^*\left(z,\frac{w}{|\,w\,|}\right) + o_z(1)\right)|\,w\,|^\rho\, d\lambda_z\, d\lambda_w =$$

$$= \frac{1}{t^{\rho+2}}\left(\int\limits_{Э_t} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right)\left(h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w + \int\limits_{Э_t} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right) o_z(1)\,|\,w\,|^\rho\, d\lambda_z\, d\lambda_w\right).$$

Очевидно, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\rho+2}} \int\limits_{Э_t} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right) o_z(1)\,|\,w\,|^\rho\, d\lambda_{(z,w)} = 0. \tag{13}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{t^{\rho+2}} \int\limits_{Э_t} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right) h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w =$$

$$= \frac{1}{t^{\rho+2}} \int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right) h^*(z,w)\, d\lambda_{(z,w)} - \int\limits_{E\cap\{\,|\,w\,|<t\,\}} \chi\left(z,\frac{w}{t}\right) h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Для оценки второго интеграла правой части этого равенства снова воспользуемся ограниченностью на единичной окружности индикатора $h^*(z,w)$. Получим тогда, что этот интеграл стремится к нулю при $t\to\infty$, а значит, в силу (13),

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t) = \int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|\,\le t\,\}} \chi(z,w) h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Отсюда и из (12) заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} = \int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}} \chi(z,w)\, u^{[t]}(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w = \int\limits_{G'\times\{\,|\,w\,|<t\,\}} \chi(z,w) h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w$$

для любой непрерывной в $\overline{G'\times\{\,|\,w\,|\,\le 1\,\}}$, $G' \Subset G$ функции $\chi(z,w)$, а следовательно, и для любой основной в $G\times\mathbb{C}$ функции.

Теорема 1 доказана.

5. Доказательства теорем 2 и 3

Прежде всего заметим, что поскольку свойство вполне регулярности роста сохраняется при сдвиге координат, то, не нарушая общности, можно считать, что $u(z,0) \not\equiv -\infty$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость сразу следует из непрерывности операции дифференцирования в пространстве обобщенных функций.

Доказательство достаточности проведем в два этапа. Сначала получим требуемый результат для основных функций $\varphi(z,w)$, носитель которых лежит в области $G\times\{\gamma<|w|<1\}$, $\gamma>0$. Тогда

$$\int\limits_{G\times\{\gamma<|w|<1\}} u^{[t]}(z,w)\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w=\int\limits_{\widetilde{G}\times\{\gamma<|w|<1\}}+\int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}},$$

где $\widetilde{G}=\left\{z\in G:\int\limits_1^\infty\frac{n_t(t)}{t^{q+2}}\,dt=\infty\right\}$. Отметим, что мера Лебега множества $\widetilde{G}$ равна нулю. Следовательно, в силу (8),

$$\int\limits_{G\times\{\gamma<|w|<1\}} u^{[t]}(z,w)\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w=\int\limits_{G\setminus\widetilde{G}\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t^\rho}\Big(\int\limits_{\{|\zeta|>1\}}h_q(tw,\zeta)\,dn_z(\zeta)+\int\limits_{\{|\zeta|\le 1\}}\ln|tw-\zeta|\,dn_z(\zeta)+H_q(z,tw)\Big)\right]=\sum_{i=1}^3 I_i.$$

Из леммы 3 следует

$$\lim_{t\to} I_3(t)=0. \tag{14}$$

Интеграл I_1 разложим в сумму 3-х интегралов:

$$I_1=\frac{1}{t^\rho}\int\limits_{G\setminus\widetilde{G}\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\left\{\int\limits_{\{1<|\zeta|<\varepsilon t\}}h_q(tw,\zeta)\,dn_z(\zeta)+\int\limits_{\{\varepsilon t\le|\zeta|\le Rt\}}+\int\limits_{\{|\zeta|>Rt\}}\right\}=$$

$$=I_{1,1}+I_{1,2}+I_{1,3}.$$

Оценим сначала $I_{1,1}$. Несложные вычисления показывают, что для любого ε, $0<\varepsilon<\gamma$,

$$|h_q(tw,\zeta)|\le C(q)\left|\frac{tw}{\zeta}\right|^{q+1}\left(1+\left|\frac{tw}{\zeta}\right|\right)^{-1}$$

и, следовательно,

$$|I_{1,1}|\le\frac{C(q,\varphi)}{t^{\rho-q-1}}\int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}d\lambda_z\,d\lambda_w\int\limits_{\{1<|w|<\varepsilon t\}}\frac{dn_z(\zeta)}{|\zeta|^q(|\zeta|+|w|)}. \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем через $C(.)$ обозначаются величины, зависящие от указанных в скобках параметров и не зависящие от t. Интегрируя по частям (15) и используя лемму 2, заключаем, что

$$|I_{1,1}|\le C(q,\varphi,\gamma)\varepsilon^{\rho-q}. \tag{16}$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла $I_{1,3}$, а именно,

$$|I_{1,3}|\le C'(q,\varphi)R^{\rho-q-1}, \tag{17}$$

Рассмотрим теперь $I_{1,2}$. Очевидно, что

$$I_{1,2} = \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{\varepsilon\le|\xi|\le R\}} h_q(w,\xi)\, dn_z^{[t]}(\xi) =$$

$$= \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\varepsilon\le|\xi|\le R\}} dn_z^{[t]}(\xi)\, d\lambda_z \int\limits_{\{\gamma<|w|<1\}} h_q(w,\xi)\, \varphi(z,w)\, d\lambda_w.$$

Поскольку функция $\Phi(z,\xi) = \int\limits_{\{\gamma<|w|<1\}} h_q(w,\xi)\, \varphi(z,w)\, d\lambda_w$, как нетрудно видеть, является непрерывной в $G\times\{\varepsilon\le|\zeta|\le R\}$, то, используя стандартные рассуждения, заключаем, что справедлива следующая импликация: существование предела (3) $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\varepsilon\le|\xi|\le R\}} \Phi(z,\xi)\, dn_z^{[t]}(\xi)\, d\lambda_z = \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\varepsilon\le|\xi|\le R\}} \Phi(z,\xi)\, d\widehat{n}_z(\xi)\, d\lambda_z .$$

Отсюда, ввиду (16) и (17), следует, что для любого $\kappa > 0$ существуют такие $\varepsilon(\kappa)$ и $R(\kappa)$, что для $t > t_0(\kappa)$

$$\left| \frac{1}{t^\rho} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{|\zeta|>1\}} h_q(tw,\zeta)\, dn_z(\zeta) - \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{|\zeta|>1\}} h_q(w,\zeta)\, d\widehat{n}_z(\zeta) \right| < \kappa ,$$

т.е. существует $\lim\limits_{t\to\infty} I_1(t)$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{t\to\infty} I_2(t) = 0$. Подытоживая сказанное о I_1, I_2, I_3, заключаем, что при том предположении, которое было сделано относительно функции $\varphi(z,w)$, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{G\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, u^{[t]}(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

В общем случае, т.е. при отсутствии предположения $G\times\{0\} \overline{\in} \operatorname{supp}\varphi$, возьмем разбиение единицы $\{h_1, h_2\}$ соответствующее покрытию С множествами $\{|w|<2\gamma\}$ и $\{|w|<3\gamma\}$, $\gamma>0$, такое, что $h_1(w)=1$, а $h_2(w)=0$ при $|w|<\gamma$. Тогда

$$\int u^{[t]}(z,w)\, \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w = \int u^{[t]}(z,w)\, \varphi(z,w)\, h_1(w)\, d\lambda_{(z,w)} +$$

$$+ \int u^{[t]}(z,w)\, \varphi(z,w)\, h_2(w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w = I_1'(t) + I_2'(t).$$

Из доказанного в предыдущей части следует, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} I_2^\gamma(t) = \int\limits_{G\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, h_2(w)\, h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Оценим теперь интеграл $I_1^\gamma(t)$:

$$\left| I_1^\gamma(t) \right| \le C(\varphi, h_1) \int\limits_{G'\times\{|w|<3\gamma\}} |u^{[t]}(z,w)|\, d\lambda_z\, d\lambda_w, \qquad G' \subset G.$$

Применяя лемму 1, заключаем, что

$$\left| I_1^\gamma(t) \right| \le C(\varphi, h_1) \frac{1}{t^\rho} \int\limits_G d\lambda_z \int\limits_0^{3\gamma} s\left[C_1(z)(ts)^\rho + C_2(z) - u(z,0)\right] ds \le$$

$$\le \widetilde{C}(\varphi, h_1)[\gamma^2 t^{-\rho} + \gamma^{\rho+1}].$$

Следовательно, для любого $\kappa > 0$ существует γ такое, что для $t > t_0(\kappa)$

$$\left| \int u^{[t]}(z,w)\, \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w - \int \varphi(z,w)\, h^*(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \right| < \kappa .$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Существование предела (3) обусловлено теми же соображениями, что и в теореме 2. Покажем, что имеет место (4). Пусть

$$E = \left\{ t : t > 0, \int_{G'} d\lambda_z \int\limits_{\{|\zeta|=t\}} dn_z(\zeta) > 0 \right\}.$$

Тогда для λ, $t \,\overline{\in}\, E$, воспользовавшись леммой 5, получим

$$2\pi \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int\limits_{\{\lambda\le|\zeta|\le t\}} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p}\, dn_z(\zeta) = \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \left(\int\limits_{\{|\zeta|=t\}} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p}\, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\{|\zeta|=t\}} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \int\limits_{\{|\zeta|=\lambda\}} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p}\, d\sigma + \int\limits_{\{|\zeta|=\lambda\}} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma \right) =$$

$$= \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \left(-\frac{1}{p} \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} \frac{\partial u^{[t]}}{\partial n} \cos p\psi\, d\sigma - \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} \cos p\psi\, u^{[t]}\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^{-p}}{p} \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} \frac{\partial u^{[t]}}{\partial n} \cos p\psi\, d\sigma + \lambda^{-p-1} \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} \cos p\psi\, u^{[t]}\, d\sigma \right).$$

Отсюда, в силу лемм 4 и 6, следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty,\, t\,\overline{\in}\, E} \int_{G'} \alpha(z)\, d\lambda_z \int\limits_{\{\lambda\le|\zeta|\le t\}} \frac{\cos p\psi}{p\,|\zeta|^p}\, dn_z(\zeta).$$

Для того чтобы снять ограничение $t \overline{\in} E$, достаточно отметить, что множество E не более чем счетно, и что

$$\lim_{t\to\infty}\int_{G'}\alpha(z)\,d\lambda_z\int_{\{|\zeta|=t\}}\frac{\cos p\psi}{p\,|\,\zeta\,|^{\,p}}\,dn_z(\zeta)=\lim_{t\to\infty}\left\{\lim_{\substack{s\to t+0\\ s\overline{\in}E}}\int_{G'}\alpha(z)\,d\lambda_z\int_{\{|\zeta|<s\}}\frac{\cos p\psi}{p\,|\,\zeta\,|^{\,p}}\,dn_z(\zeta)-\right.$$

$$\left.-\lim_{\substack{s\to t-0\\ s\overline{\in}E}}\int_{G'}\alpha(z)\,d\lambda_z\int_{\{|\zeta|<s\}}\frac{\cos p\psi}{p\,|\,\zeta\,|^{\,p}}\,dn_z(\zeta)\right\}=0.$$

Необходимость доказана. Для доказательства достаточности так же, как и в теореме 2, сначала рассмотрим для основных функций $\varphi(z,w)$, носитель которых лежит в области $G\times\{\gamma<|\,w\,|<1\}$, $\gamma>0$. Тогда

$$I=\int_{G\times\{\gamma<|w|<1\}}u^{[t]}(z,w)\,\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w=\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}u^{[t]}(z,w)\,\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\,,$$

где $\widetilde{G}=\left\{z\in G:\int_1^{\infty}\frac{n_z(t)}{t^{q+2}}\right\}=\infty$. Воспользовавшись представлением (8), разобьем интеграл I на 5 слагаемых:

$$I_1=\frac{1}{t^p}\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}H_q(z,tw)\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w,$$

$$I_2=\frac{1}{t^p}\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\int_{\{|\zeta|\le 1\}}\ln|\,tw-\zeta\,|\,dn_z(\zeta),$$

$$I_3=\frac{1}{t^p}\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\int_{\{1<|\zeta|<\varepsilon t\}}h_q(tw,\zeta)\,dn_z(\zeta),$$

$$I_4=\frac{1}{t^p}\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\int_{\{\varepsilon t\le|\zeta|\le Rt\}}h_q(tw,\zeta)\,dn_z(\zeta),$$

$$I_5=\frac{1}{t^p}\int_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}}\varphi(z,w)\,d\lambda_z\,d\lambda_w\int_{\{|\zeta|>Rt\}}h_q(tw,\zeta)\,dn_z(\zeta).$$

Существование пределов $\lim\limits_{t\to\infty}I_i(t)$, $i=1,2,4$ доказывается так же как и в теореме 2.

Для дальнейших рассуждений отметим, что при рассмотрении функции целого порядка возможны два варианта: $p=q$ и $p=q+1$

Пусть сначала $p=q$, тогда

$$I_3 = \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{1<|\zeta|<\varepsilon t\}} h_q(tw,\zeta)\, dn_z(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{1<|\zeta|<\varepsilon t\}} h_{p-1}(tw,\zeta)\, dn_z(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{1<|\zeta|<\varepsilon t\}} \frac{t^p\,|w|^p}{p\,|\zeta|^p} \cos p\psi\, dn_z(\zeta) = I_3^1 + I_3^2.$$

В силу условия (4), $\lim\limits_{t\to\infty} I_3^2(t)$ существует.

Повторяя те же оценки, которые проводились в теореме 2, получим

$$|I_3^1| \le \text{Const}\,(\varepsilon^p + \varepsilon)$$

и

$$|I_3^1| \le \text{Const}\,\frac{1}{R}.$$

Таким образом, при $p = q$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{G\times\{\gamma<|w|<1\}} u^{[t]}(z,w)\,\varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Если же $p = q + 1$, то отличие от доказательства теоремы 2 заключено в оценке интеграла I_5. Итак,

$$I_5 = \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{|\zeta|>Rt\}} h_{p-1}(tw,\zeta)\, dn_z(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{|\zeta|>Rt\}} h_p(tw,\zeta)\, dn_z(\zeta) -$$

$$- \frac{1}{t^p} \int\limits_{(G\setminus\widetilde{G})\times\{\gamma<|w|<1\}} \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w \int\limits_{\{|\zeta|>Rt\}} \frac{t^p\,|w|^p}{p\,|\zeta|^p} \cos p\psi\, dn_z(\zeta) = I_5^1 + I_5^2.$$

В силу условия (4), предел $\lim\limits_{t\to\infty} I_5^2$ существует. Для I_5^1 и I_3, повторяя рассуждения, подобные проведенным при доказательстве теоремы 2, получим следующие оценки:

$$|I_5^1| \le \text{Const}\,\frac{1}{R}, \qquad |I_3| \le \text{Const}\,\varepsilon.$$

Это означает, что и при $p = q + 1$ существует

$$\lim_{t \to \infty} \int\limits_{G \times \{\gamma < |w| < 1\}} u^{[t]}(z,w)\, \varphi(z,w)\, d\lambda_z\, d\lambda_w.$$

Снятие ограничения на функцию $\varphi(z,w)$ проводится так же, как и в теореме 2. Теорема 3 доказана.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить проф. Л. И. Ронкина за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы

1. *В. С. Азарин*, О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста.— Записки мех.-мат. ф-та ХГУ. Сер. 4 (1961), т. XXYIII, с. 128—148.
2. *Н. В. Говоров*, Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Наука, Москва (1986), 238 с.
3. *L. Gruman*, Entire functions of several variables and their asymptotic growth.— Ark. Math. (1971), v. 9, p. 141—163.
4. *П. З. Агранович, Л. И. Ронкин*, О функциях вполне регулярного роста многих переменных. — Ann. Pol. Math. (1981), v. 39, p. 239—254.
5. *П. З. Агранович. Л. И. Ронкин*, Об условиях плюригармоничности индикаторов голоморфных функций многих переменных.— Мат. сб. (1975), т. 98, с. 319—332.
6. *Л. И. Ронкин*, Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, Москва (1971), 430 с.
7. *L. I. Ronkin*, Functions of completely regular growth. Klüwer Acad. Publ. (1992), 392 p.
8. *В. С. Азарин*, Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб. (1979), т. 108, с. 147—167.

On the functions of completely regular growth on distinguished variable

P. Z. Agranovich

A criretion of completely regular growth of a plurisubharmonic function $u(z,w)$ in $G \times \mathbb{C}$ in the direction of w when G is an open subset of $\mathbb{C}^n$ is obtained.