Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 380–391

УДК 514

О погружениях евклидовой плоскости в E^4 с нулевым гауссовым кручением

Ю. А. Аминов

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

Рассматриваются два подхода к погружению метрики плоскости с использованием геодезической системы координат и координат кривизны. При первом подходе доказывается теорема существования поверхности, проходящей через заданную кривую γ и касательную полосу, на которой кривая γ является геодезической линией. Второй подход приводит к краевой задаче построения поверхности в E^4 по заданному грассманову образу, который для поверхностей рассматриваемого класса является поверхностью переноса.

Розглянуто два підходи до занурення метрики площини з використанням геодезичної системи координат та координат кривини. При першому підході доводиться теорема існування поверхні, що проходить через задану криву і дотичну смугу, на якій ця крива є геодезичною. Другий підхід приводить до крайової задачі побудови поверхні в E^4 з заданим грасмановим образом, який для поверхонь розглянутого класу є поверхнею перенесення.

Существуют двумерные метрики, которые не погружаются в трехмерное евклидово пространство, даже если они не полные. Первый пример такой метрики, заданной в круге, был построен Э. Г. Позняком [1]. Пример метрик класса $C^{2,1}$, не допускающих даже локального погружения в виде поверхности $Z = Z(x,y)$ класса C^2, приводится в работе А. В. Погорелова [2]. Естественно рассмотреть вопрос о регулярных погружениях метрик в E^4. Общая теорема о погружении метрик, заданных в компактной области, установлена Э. Г. Позняком [3]. В работе [4] были рассмотрены погружения метрик в E^4 с заданным гауссовым кручением. В данной работе мы рассмотрим погружения плоских метрик в виде поверхностей F^2 с нулевым гауссовым кручением. При этом мы используем два подхода — с использованием геодезической системы координат на F^2 и с использованием координат кривизны. Эти два подхода приводят к постановке двух различных по своей природе геометрических задач.

При первом подходе доказывается теорема существованния решения краевой задачи, состоящей в том, что через заданную кривую γ в E^4 требуется провести поверхность F^2 с гауссовой кривизной $K = 0$ и гауссовым кручением $\varkappa = 0$ так, чтобы кривая γ была геодезической линий на F^2. Пусть s — длина дуги γ, $\xi_1,\ldots,\xi_4$ — ее натуральный репер. Касательная полоса, заданная вдоль γ, называется геодезической, если в точках этой кривой она ортогональна вектору ξ_2. Пусть $\alpha = \alpha(s)$ — угол, который составляет вектор ξ_3 с касательной полосой. Имеет место

Теорема 1. *Пусть в E^4 задана аналитическая кривая γ и вдоль нее геодезическая касательная полоса, не касающаяся вектора натурального репера ξ_4, и такая, что $\alpha(s)$ — аналитическая функция. Тогда через эту кривую можно провести аналитическую поверхность F^2, касающуюся полосы, на которой гауссова кривизна и гауссово кручение $K = \kappa = 0$, а кривая γ является геодезической линией.*

Близкой по постановке к рассмотренной задаче, хотя и отличающейся от нее, является задача проведения поверхности F^2 с $K = \kappa = 0$ через кривую γ так, чтобы F^2 была геодезической, а поверхность F^2 была образована прямолинейными образующими. В работе устанавливается

Теорема 2. *Для каждой заданной регулярной кривой γ в E^4 и заданной в некоторой точке $P_0 \in \gamma$ прямой a, ортогональной ξ_2, найдется единственная поверхность F^2 с $K = \kappa = 0$ и с прямолинейными образующими, проходящая через прямую a и кривую γ, которая на F^2 является геодезической. Ширина l регулярно реализованной полосы вдоль γ оценивается снизу*

$$l > \frac{1}{|K_2 K_3 / K_1| + |(K_2/K_1)'|},$$

где K_i — кривизны кривой γ, штрих обозначает дифференцирование по длине дуги.

При втором подходе геометрическая постановка задачи возникает с привлечением грассманова образа поверхности. Заметим, что у рассматриваемой поверхности грассманов образ является поверхностью переноса. Эта поверхность переноса строится некоторым стандартным способом. Грассманово многообразие $G_{2,4}$ можно разложить в произведение двух двумерных сфер $S_1^2 \times S_2^2$. Каждая поверхность, в том числе и Γ^2, в грассмановом многообразии может быть спроектирована на каждую из сфер S_i^2. Возникает отображение ψ_i поверхности F^2 на S_i^2. Пусть D — некоторая область на F^2, и $\Delta\omega_i$ — элемент площади образа D на сфере S_i^2 при отображении ψ_i. Имеет место аналог теоремы Гаусса (см. [4]).

Предел отношения площади образа отображения ψ_i к площади прообраза при стягивании области D к точке равен

$$\lim \frac{\Delta\omega_i}{\Delta S} = |K \pm \kappa|,$$

причем знак "+" соответствует одной из сфер S_i^2, а знак "−" — другой.

Для поверхности F^2 с $K = \kappa = 0$ оба отношения равны нулю. Поэтому образами $\psi_i(F^2)$ на сферах S_i^2 будут линии γ_i, может быть вырожденные в точки.

По двум заданным кривым γ_i поверхность Γ^2 в грассмановом многообразии восстанавливается, причем Γ^2 является поверхностью переноса некоторых кривых. Сеть линий переноса составлена из геодезических линий, и линейный элемент Γ^2 в координатах, построенных с помощью линий переноса, имеет вид $d\sigma^2 = 4(d\xi^2 + d\eta^2)$. Рассмотрим задачу восстановления поверхности $F^2 \subset E^4$ с

$K = \varkappa = 0$ по заданному грассманову образу Γ^2, обладающему указанными выше свойствами.

Теорема 3. *Пусть в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ задана регулярная поверхность переноса Γ^2 и на ней кривая C — одна из линий переноса. Пусть вдоль C заданы две функции $\varphi_1(\sigma)$, $\varphi_2(\sigma)$ от длины дуги этой кривой. Тогда в E^4 существует поверхность F^2 с $K = \varkappa = 0$, имеющая грассманов образ — поверхность Γ^2 и такая, что в точках кривой на F^2, являющейся прообразом кривой C, угол в нормальной плоскости между отрезком нормальной кривизны F^2 и параллельно переносимым нормальным векторным полем в нормальном расслоении к F^2 равен функции $\varphi_1(\sigma)$ и его производная по нормали к C в метрике Γ^2 равна $\varphi_2(\sigma)$.*

З а м е ч а н и е. Задача восстановления двумерной поверхности с $K = \varkappa = 0$ в E^4 по грассманову образу рассматривалась нами еще в начале 80-х годов, но без геометрической постановки краевой задачи. Полученные результаты были доложены на семинаре А. В. Погорелова, но не опубликованы. В дальнейшем по этим же вопросам появились работы [8-10]. Хотя мы можем дать полностью автономное изложение, но учитывая замечание рецензента, для сокращения трудных выкладок в соответствующих местах отошлем читателя к работам [8-9]. Краевая задача, рассматриваемая в теореме 3, была сформулирована нами в 1992 г.

Автор благодарен А. А. Борисенко за указание на работы [8-10].

1. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

Рассмотрим систему уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи, предполагая, что метрика поверхности записана в виде $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Так как гауссово кручение $\varkappa \equiv 0$, то на всей поверхности можно выбрать базис нормалей n_1 и n_2 с коэффициентами кручения равными нулю. Пусть L^σ_{ij} — коэффициенты вторых квадратичных форм для нормалей n_σ, $\sigma = 1,2$. Уравнения Кодацци запишем в виде:

$$\frac{\partial L^\sigma_{11}}{\partial y} - \frac{\partial L^\sigma_{12}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L^\sigma_{22}}{\partial x} - \frac{\partial L^\sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad \sigma = 1,2.$$

Найдутся такие функции φ^σ и ψ^σ от x, y, что

$$L^\sigma_{11} = \varphi^\sigma_x,\ L^\sigma_{12} = \varphi^\sigma_y,\ L^\sigma_{22} = \psi^\sigma_y,\ L^\sigma_{12} = \psi^\sigma_x.$$

Так как коэффициенты L^σ_{12} имеют два выражения, то должно выполняться уравнение $\varphi^\sigma_y = \psi^\sigma_x$. Следовательно, найдутся функции θ^σ такие, что $\varphi^\sigma = \theta^\sigma_x$, $\psi^\sigma = \theta^\sigma_y$. С помощью этих функций запишем коэффициенты вторых квадратичных форм:

$$L^\sigma_{11} = \theta^\sigma_{xx},\ L^\sigma_{12} = \theta^\sigma_{xy},\ L^\sigma_{22} = \theta^\sigma_{yy},\ \sigma = 1,2\ .$$

Функции θ^σ должны удовлетворять двум дифференциальным уравнениям. Одно из них — уравнение Гаусса

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\left(L^{\sigma}_{11}L^{\sigma}_{22}-(L^{\sigma}_{12})^2\right)=0. \tag{1}$$

Второе уравнение — уравнение Риччи, которое в силу тождественного равенства нулю коэффициентов кручения имеет вид:

$$L^1_{11}L^2_{12}-L^1_{12}L^2_{11}+L^1_{12}L^2_{22}-L^1_{22}L^2_{12}=0. \tag{2}$$

Заменив L^{σ}_{ij} на производные функции θ^{σ}, получим систему

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\theta^i_{xx}\theta^i_{yy}-(\theta^i_{xy})^2\right)=0, \tag{3}$$

$$\left(\theta^1_{xx}-\theta^1_{yy}\right)\theta^2_{xy}+\left(\theta^2_{yy}-\theta^2_{xx}\right)\theta^1_{xy}=0. \tag{4}$$

Из последней системы найдем выражение для θ^{σ}_{yy}, $\sigma=1,2$. Введем обозначение $\Delta=\theta^1_{xx}\theta^1_{xy}+\theta^2_{xy}\theta^2_{xx}$, после чего можно записать:

$$\theta^1_{yy}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}(\theta^1_{xy})^2+(\theta^2_{xy})^2, & \theta^2_{xx}\\ \theta^2_{xx}\theta^1_{xy}-\theta^1_{xx}\theta^2_{xy}, & \theta^1_{xy}\end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$\theta^2_{yy}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\theta^1_{xx}, & (\theta^1_{xy})^2+(\theta^2_{xy})^2,\\ -\theta^2_{xy}, & \theta^2_{xx}\theta^1_{xy}-\theta^1_{xx}\theta^2_{xy}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Начальные условия задаем на линии $y=0$, а ее образ в пространстве будет являться кривой γ. Эти начальные условия состоят из четырех аналитических функций:

$$\theta^1(x,0),\ \theta^1_y(x,0),\ \theta^2(x,0),\ \theta^2_y(x,0), \tag{7}$$

которые зададим так, чтобы $\Delta(x,0)\neq 0$.

По теореме Коши–Ковалевской в некоторой окрестности линии $y=0$ существует аналитическое решение (5)-(6). Так как уравнения погружения выполнены, то этому решению будет соответствовать по теореме Бонне некоторая поверхность F^2 в E^4 с $K=\kappa=0$. Установим, при каких начальных условиях (7) эта поверхность пройдет через кривую γ, которая по условию теоремы считается заданной. Кривая в E^4 характеризуется тремя кривизнами: K_1, K_2, K_3. Найдем выражения кривизн K_i через функции (7). Пусть $r=r(x,y)$ — радиус-вектор поверхности, n_1 и n_2 — базис нормалей. Запишем разложения Гаусса—Вейнгартена:

$$\begin{gathered}r_{xx}=\theta^1_{xx}n_1+\theta^2_{xx}n_2,\ r_{xy}=\theta^1_{xy}n_1+\theta^2_{xy}n_2,\ r_{yy}=\theta^1_{yy}n_1+\theta^2_{yy}n_2,\\ n_{1x}=-\theta^1_{xx}r_x-\theta^1_{xy}r_y,\ n_{2x}=-\theta^2_{xx}r_x-\theta^2_{xy}r_y.\end{gathered} \tag{8}$$

Так как кривая $y=0$ геодезическая, то длина вектора r_{xx} равна

$$K_1=\sqrt{(\theta^1_{xx})^2+(\theta^2_{xx})^2}. \tag{9}$$

Обозначим $\cos\varphi=\theta^1_{xx}/K_1$, $\sin\varphi=\theta^2_{xx}/K_1$.

Из первого уравнения системы (8) следует, что второй вектор натурального репера ξ_2 имеет вид $\xi_2 = \cos\varphi\, n_1 + \sin\varphi\, n_2$. Используя разложения Вейнгартена, получим

$$\xi_{2x} = \left(-\sin\varphi\, n_1 + \cos\varphi\, n_2\right)\varphi_x +$$
$$+ \cos\varphi\left(-\theta^1_{xx} r_x - \theta^1_{xy} r_y\right) + \sin\varphi\left(-\theta^2_{xx} r_x - \theta^2_{xy} r_y\right).$$

Введем обозначения:

$$\eta = -\sin\varphi\, n_1 + \cos\varphi\, n_2, \qquad B = \cos\varphi\,\theta^1_{xy} + \sin\varphi\,\theta^2_{xy}.$$

Тогда

$$\xi_{2x} = -K_1\xi_1 + (\eta\varphi_x - Br_y). \tag{10}$$

Вектор, стоящий в скобках, ортогонален ξ_1, следовательно, направлен по ξ_3, а его модуль равен

$$K_2 = \sqrt{\varphi_x^2 + B^2}\,. \tag{11}$$

Нам понадобится выражение $\xi_3 = (\eta\varphi_x - Br_y)/K_2$. Пусть $K_2 \neq 0$. Четвертый вектор из натурального репера ξ_4 имеет вид:

$$\xi_4 = (B\eta + r_y\varphi_x)/K_2.$$

Действительно, этот вектор ортогонален векторам ξ_2 и ξ_3, так как $(\xi_2\,\eta) = 0$ и ортогонален, очевидно, ξ_1. Имеем

$$\xi_{4x} = \left(\frac{1}{K_2}\right)_x (B\eta + r_y\varphi_x) + \frac{1}{K_2}(B_x\eta + B\eta_x + r_{yx}\varphi_x + r_y\varphi_{xx}).$$

Следовательно,

$$K_3 = -(\xi_{4x}\xi_3) = -\frac{1}{K_2}\left(B_x\varphi_x + (r_{xy}\eta)\varphi_x^2 - B(\eta_x r_y) - \varphi_{xx}\right).$$

Используем соотношение

$$(\eta_x r_y) = -(\eta\, r_{xy}) = \sin\varphi\,\theta^1_{xy} - \cos\varphi\,\theta^2_{xy}.$$

Обозначим $C = \sin\varphi\,\theta^1_{xy} - \cos\varphi\,\theta^2_{xy}$. Можем записать

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\left(\frac{B}{\varphi_x}\right) + C. \tag{12}$$

Если заданы функции (7), то функции B, φ и C определены вдоль кривой $y = 0$. Поэтому по заданным четырем функциям (7) определяются три кривизны K_1, K_2, K_3.

Рассмотрим касательную полосу вдоль кривой γ. Она определяется заданием вдоль кривой векторного поля r_y. Этот вектор ортогонален ξ_1 и ξ_2. Поэтому он является линейной комбинацией ξ_3 и ξ_4: $r_y = \cos\alpha\,\xi_3 + \sin\alpha\,\xi_4$. Используя выражение $\xi_3 = (\eta\,\varphi_x - Br_y)/K_2$, получим

$$\cos\alpha = (r_y \xi_3) = -\frac{B}{K_2}. \tag{13}$$

Таким образом, по заданным функциям (7) определяется угол α, а вместе с ним положение касательной полосы относительно натурального репера γ. Заметим, что $B = \Delta / K_1$. По предположению $\Delta \neq 0$. Поэтому $\cos\alpha \neq 0$, т.е. касательная полоса не касается ξ_4.

Итак, если заданы четыре функции $\theta^1(x,0)$, $\theta^1_y(x,0)$, $\theta^2(x,0)$, $\theta^2_y(x,0)$, то по ним в E^4 с точностью до движения в пространстве определяется кривая γ и касательная полоса вдоль γ.

Обратно, по заданной кривой γ и касательной полосе, т.е. по функции $\alpha(s)$, вдоль кривой γ можно найти начальные функции (7). Покажем это. Так как $K_1(x)$ — известная функция длины дуги γ, $\left(\theta^1_{xx}\right)^2 + \left(\theta^2_{xx}\right)^2$ — тоже известная функция. Из формулы (13) следует, что и функция $B = -\cos\alpha\, K_2$ также известная. Далее, используем выражение (11) для K_2, которое можем преобразовать и получить в виде $\varphi^2_x = K^2_2 \sin^2\alpha$. Поэтому $\varphi(x)$, а следовательно, θ^1_{xx}, θ^2_{xx} определяются вдоль кривой γ с точностью до знака. Используя соотношения $B = -K_2 \cos\alpha$ и $\varphi_x = \pm K_2 \sin\alpha$, уравнение (12) можно записать в виде:

$$K_3 = \pm\frac{\partial\alpha}{\partial x} + C. \tag{14}$$

Поэтому C является известной функцией длины дуги γ. Используя выражения для B и C, запишем систему уравнений:

$$\cos\varphi\,\theta^1_{xy} + \sin\varphi\,\theta^2_{xy} = -K_2\cos\alpha,$$

$$-\sin\varphi\,\theta^1_{xy} + \cos\varphi\,\theta^2_{xy} = K_3 \pm \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Отсюда находим θ^1_{xy} и θ^2_{xy} вдоль кривой γ. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Если $\rho = \rho(s)$ — радиус-вектор γ и s — длина дуги, то радиус-вектор искомой поверхности можно записать так:

$$r(s,t) = \rho(s) + t\left(\alpha^1\xi_1 + \alpha^3\xi_3 + \alpha^4\xi_4\right), \tag{15}$$

причем $(\alpha^1)^2 + (\alpha^3)^2 + (\alpha^4)^2 = 1$. Находим касательные векторы

$$r_s = (1 + t\alpha^{1'})\xi_1 + t\xi_2(\alpha^1 K_1 - \alpha^3 K_2) + t\xi_3(\alpha^{3'} - \alpha^4 K_3) + t\xi_4(\alpha^{4'} + \alpha^3 K_3),$$

$$r_t = \alpha^1\xi_1 + \alpha^3\xi_3 + \alpha^4\xi_4.$$

Здесь штрихом обозначена производная по s. Коэффициенты метрики имеют вид:

$$E = (1 + t\alpha^{1'})^2 + t^2\left[(\alpha^1 K_1 - \alpha^3 K_2)^2 + (\alpha^{3'} - \alpha^4 K_3)^2 + (\alpha^{4'} + \alpha^3 K_3)^2\right],$$

$$F = \alpha^1, \qquad G = 1.$$

Заметим, что $F_t = G_s = G_t = 0$. По известной формуле находим гауссову кривизну

$$K = -\frac{1}{4(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & E_s & E_t \\ F & F_s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{E_t - F_s}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_t =$$

$$= \frac{E_t^2 - 2E_{tt}(E-F^2)}{4(E-F^2)^2}.$$

Запишем E в виде квадратного трехчлена по степеням t:

$$E = 1 + bt + Bt^2, \text{ где } b = 2\alpha^{1\prime}.$$

Имеем $E_t = b + 2Bt$, $E_{tt} = 2B$, $E - F^2 = 1 + bt + Bt^2 - (\alpha^1)^2$. Из условия $K = 0$ следует уравнение

$$b^2 + 4B\left((\alpha^1)^2 - 1\right) = 0.$$

Заменив выражения b и B их значениями, получим

$$(\alpha^{1\prime})^2 + [(\alpha^1)^2 - 1][(\alpha^{1\prime})^2 + (\alpha^1 K_1 - \alpha^3 K_2)^2 +$$

$$+ (\alpha^{3\prime} - \alpha^4 K_3)^2 + (\alpha^{4\prime} + \alpha^3 K_3)^2] = 0. \qquad (16)$$

Запишем $\alpha^1 = \cos\theta$, $\alpha^3 = \sin\theta\cos\sigma$, $\alpha^4 = \sin\theta\sin\sigma$. Уравнение (16) переписывается в таком виде:

$$\left(\cos\theta K_1 - \sin\theta\cos\sigma K_2\right)^2 + \sin^2\theta\,(\sigma' + K_3)^2 = 0.$$

Следовательно, поверхность (15) с прямолинейными образующими будет иметь нулевую кривизну в том и только в том случае, когда выполняется система уравнений:

$$\sigma' + K_3 = 0, \qquad \operatorname{ctg}\theta = \cos\sigma\frac{K_2}{K_1}. \qquad (17)$$

Из первого уравнения (17) находим функцию σ, из второго — функцию θ. Функция σ определяется с точностью до постоянной. Поэтому поверхность будет определена однозначно кривой и начальным положением при некотором s_0 прямолинейной образующей.

Если система (17) выполнена, то соответствующая поверхность имеет нулевое гауссово кручение. Действительно, из второго уравнения (17) следует, что в выражении r_s коэффициент при ξ_2 равен нулю и, кроме того, можно записать

$$r_s = \left(1 + t\alpha^{1\prime}\right)\xi_1 + t\cos\theta\,\theta'(\cos\sigma\,\xi_3 + \sin\sigma\,\xi_4).$$

Следовательно, нормалями к поверхности являются

$$n_1 = \xi_2, \ n_2 = -\sin\sigma\,\xi_3 + \cos\sigma\,\xi_4.$$

Имеем

$$r_{st} = \alpha^{1\prime}\xi_1 + \cos\theta\,\theta'(\cos\sigma\,\xi_3 + \sin\sigma\,\xi_4), \qquad r_{tt} = 0.$$

Поэтому $L^{\alpha}_{12} = (r_{st}\, n_{\alpha}) = 0$, $L^{\alpha}_{22} = 0$. По формуле для гауссова кручения находим

$$\kappa = g^{ij}\left(L^1_{1i} L^2_{2j} - L^1_{2i} L^2_{1j}\right) = 0.$$

Найдем ширину области, в которой поверхность регулярна. Для этого найдем те значения t, для которых $EG - F^2 = 0$. Имеем

$$EG - F^2 = E - F^2 = 1 + bt + Bt^2 - (\alpha^1)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\,\theta'\, t +$$
$$+ t^2\left(\sin^2\theta\,\theta'^2 + \cos^2\theta\,\theta'^2 + \sin^2\theta\,(\sigma' + K_3)^2\right) = (\sin\theta - \theta'\, t)^2.$$

Следовательно, $t = \sin\theta/\theta'$. Прямолинейная образующая поверхности направлена под углом θ к ξ_1. Поэтому ширина погруженной регулярно полосы евклидовой плоскости равна $l = \sin\theta t = \dfrac{\sin^2\theta}{\theta'}$. С помощью системы (17) находим

$$l = \left(\sin\theta\,\frac{K_2 K_3}{K_1} + \cos\sigma\left(\frac{K_2}{K_1}\right)\right)^{-1}.$$

Отсюда следует доказываемая оценка. Теорема 2 установлена.

3. Так как $\kappa = 0$, то на поверхности существует ортогональная сеть линий кривизны. Пусть в координатах кривизны линейный элемент поверхности записывается в виде $ds^2 = g_{11}\, du_1^2 + g_{22}\, du_2^2$. Единичную нормаль n_1 направим параллельно отрезку нормальной кривизны — вырожденный в данном случае эллипс нормальной кривизны. Нормаль n_2 направим ортогонально n_1. Пусть в нормальной плоскости N_x начало координат выбрано в точке x и координатными ортами являются n_1 и n_2. Пусть α и β — координаты середины отрезка нормальной кривизны, $2a$ — его длина. Коэффициенты вторых квадратичных форм для нормалей n_1 и n_2 следующие:

$$L^1_{11} = g_{11}(\alpha + a), \qquad L^2_{11} = \beta g_{11},$$
$$L^1_{12} = 0, \qquad L^2_{12} = 0,$$
$$L^1_{22} = g_{22}(\alpha - a), \qquad L^2_{22} = \beta g_{22}.$$

В работе ([5], стр. 4) для поверхности $F^2 \subset E$ с нулевым гауссовым кручением были установлены формулы

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\left[(L^1_{11})^2 + (L^2_{11})^2\right]/g_{11}\right\} = K\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\left[(L^1_{22})^2 + (L^2_{22})^2\right]/g_{22}\right\} = K\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}.$$

Так как $K \equiv 0$, то с помощью этих уравнений и за счет выбора масштаба на координатных линиях можно получить

$$g_{11} = \frac{2}{(\alpha + a)^2 + \beta^2}, \qquad g_{22} = \frac{2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2}. \tag{18}$$

Так как $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0$, то полагая $\alpha = a\cos\omega$, $\beta = a\sin\omega$, линейный элемент приведем к виду:

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{2a^2\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{du_2^2}{2a^2\sin^2\frac{\omega}{2}}. \tag{19}$$

Вторые квадратичные формы записываются в виде:

$$\mathrm{II}^1 = \frac{\left(du_1^2 - du_2^2\right)}{a}, \quad \mathrm{II}^2 = \beta ds^2.$$

Для коэффициентов кручения $\nu_i = (n_{2u_i} n_1)$ с помощью уравнений Кодацци можем получить выражения

$$\nu_1 = \frac{\beta_{u_1}}{\alpha - a} = -\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_1} + \left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1},$$

$$\nu_2 = \frac{\beta_{u_2}}{\alpha + a} = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_2} + \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2}.$$

Так как гауссово кручение равно нулю, то уравнение Риччи приводит к соотношению $\nu_{1u_2} - \nu_{2u_1} = 0$, которое запишем в виде:

$$\left[\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_1} + \operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1}\right]_{u_2} + \left[\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_2} - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2}\right]_{u_1} = 0. \tag{20}$$

Условие равенства нулю гауссовой кривизны приводит еще к одному уравнению:

$$\left[\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_1} + \operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1}\right]_{u_1} + \left[\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_2} - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2}\right]_{u_2} = 0. \tag{21}$$

Таким образом, уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи сводятся к системе уравнений (20-21). Из уравнения (20) вытекает, что найдется функция $\Lambda(u_1, u_2)$ такая, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_1} + \operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\omega_{u_1}}{2} = \Lambda_{u_1},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_2} - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\omega_{u_2}}{2} = -\Lambda_{u_2}. \qquad (22)$$

Подставив эти выражения в (21), получим $\Lambda_{u_1 u_1} - \Lambda_{u_2 u_2} = 0$. Следовательно, функция Λ представляется в виде:

$$\Lambda = \Lambda_1(u_1 + u_2) + \Lambda_2(u_1 - u_2). \qquad (23)$$

Обозначим $\varphi = \ln \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$. Используя систему (22) и записывая условие равенства смешанных производных от $\ln a$, получим одно уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\left(e^{\varphi}\Lambda_{u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(e^{-\varphi}\Lambda_{u_2}\right). \qquad (24)$$

В этом уравнении функция Λ может считаться заданной в виде (23). Таким образом, система уравнений Гаусса—Кодацци—Риччи свелась к одному гиперболическому уравнению на функцию φ. Укажем частное решение уравнения (24): $\varphi = \ln \operatorname{tg}\Lambda$, т.е. $\Lambda = \frac{\omega}{2}$. Тогда система (22) приобретает вид:

$$\frac{\partial \ln a}{\partial u_i} = -\operatorname{ctg}\omega\, \omega_{u_i}, \quad i = 1,2.$$

Следовательно, $a \sin\omega = \mathrm{const}$, т.е. $\beta = \mathrm{const}$. Поверхность в E^4 с нулевым гауссовым кручением и постоянным расстоянием β от точки поверхности до отрезка нормальной кривизны в этой точке лежит в трехмерной сфере S^3 радиуса $1/\beta$. Такие поверхности были исследованы Бианки [6]. Другой частный случай $\Lambda = \mathrm{const}$ приводит к тору Клиффорда.

Рассмотрим общий случай. Уравнение (24) имеет вид уравнений $\varphi_{u_1 u_2} = f\left(u_1, u_2, \varphi, \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\right)$, которые рассмотрены в [7]. Пусть на плоскости u_1, u_2 задана гладкая начальная кривая C, обладающая тем свойством, что никакая прямая, параллельная одной из осей координат, не пересекает кривую C более чем в одной точке. В работе [7] доказывается, что если на C заданы две начальные функции φ_{u_1} и φ_{u_2}, то в достаточно малой окрестности линии C существует решение уравнения (24) с заданными начальными условиями. Можно считать, что на C заданы значения функции φ и ее производной по нормали. Введем новые координаты на поверхности, положив

$$\xi = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \qquad \eta = \frac{1}{2}(u_1 - u_2).$$

В качестве линии C в дальнейшем будем брать линии $\xi = \mathrm{const}$ или $\eta = \mathrm{const}$. В координатах ξ, η метрика записывается в конформно-чебышевском виде:

$$ds^2 = \frac{2(d\xi^2 - 2\cos\omega\, d\xi\, d\eta + d\eta^2)}{a^2 \sin^2\omega}.$$

В то же время

$$\mathrm{II}^1 = \frac{4}{a}\, d\xi\, d\eta, \qquad \mathrm{II}^2 = a \sin\omega\, ds^2.$$

Поэтому координатные линии $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ являются асимптотическими для формы II^1 и угол между ними равен ω. Эти линии естественно называть полуасимптотическими на поверхности. Выше мы уже установили, что функция Λ имеет вид $\Lambda = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)$.

Найдем геометрический смысл параметров ξ, η. Положим для удобства $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$. Коэффициенты метрики грассманова образа $d\sigma^2 = G_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j$ вычисляются по формуле

$$G_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2} L^\alpha_{ik} L^\alpha_{jl} g^{kl}.$$

Имеем

$$G_{11} = \left(L^1_{12}\right)^2 g^{22} + a^2 \sin^2\omega\, g_{1k} g_{1l} g^{kl} = 4,$$

$$G_{12} = \left(L^1_{12}\right)^2 g^{12} + L^1_{12} L^1_{22} g^{22} + a^2 \sin^2\omega\, g_{1k} g_{2l} g^{kl} = 0,$$

$$G_{22} = 4.$$

Поэтому, метрика грассманова образа в координатах ξ, η имеет вид $d\sigma^2 = 4(d\xi^2 + d\eta^2)$. Параметры ξ и η пропорциональны длинам дуг координатных линий на грассмановом образе. Координатные линии являются геодезическими. В работах [8-9] установлено, что грассманов образ поверхности является поверхностью переноса. Мы уже упоминали во введении, что проекция Γ^2 на сферы S^2_i ($i = 1,2$ — сомножители разложения $G_{2,4}$) представляет собой кривые γ_i, $i = 1,2$. Геодезические кривизны этих линий γ_i совпадают с Λ_ξ и Λ_η [8-9]. Поэтому, задание кривых γ_1 и γ_2 влечет за собой задание $\Lambda_{1\xi}$ и $\Lambda_{2\eta}$ и наоборот, задание последних функций определяет кривые γ_1 и γ_2 с точностью до их движения по сферам S^2_i.

Рассмотрим геометрический смысл задания функций $\omega(\xi, 0)$ и $\frac{\partial\omega(\xi, 0)}{\partial\eta}$. Пусть $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ — базис нормалей, состоящий из параллельно переносимых в нормальном расслоении векторов. Пусть он связан с прежним базисом соотношениями

$$n_1 = \cos\gamma\, \overline{n}_1 + \sin\gamma\, \overline{n}_2,$$

$$n_2 = -\sin\gamma\, \overline{n}_1 + \cos\gamma\, \overline{n}_2,$$

где γ — угол между параллельно переносимым нормальным векторным полем и отрезком нормальной кривизны. Имеем $n_{1u_i} = n_2 \gamma_{u_i} + \overline{n}_{1u_i} \cos\gamma + \overline{n}_{2u_i} \sin\gamma$. Следовательно, $(n_{1u_i} n_2) = \gamma_{u_i}$. С другой стороны, имеем выражения для $(n_{2u_i} n_1)$ через ω и a. Поэтому,

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial u_1} = -\mathrm{ctg}\,\frac{\omega}{2}\,\frac{\partial \ln a}{\partial u_1} - \mathrm{ctg}^2\,\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1} + \left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1} = \left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_1} - \Lambda_{u_1},$$

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial u_2} = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial u_2} - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2} + \left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2} = \left(\frac{\omega}{2}\right)_{u_2} - \Lambda_{u_2}.$$

Следовательно, $\gamma = \Lambda - \frac{\omega}{2} + C$, где $C = \text{const}$. Итак, функция $\Lambda - \frac{\omega}{2}$ с точностью до постоянной совпадает с углом между отрезком нормальной кривизны и параллельно переносимым нормальным вектором в нормальном расслоении. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. *Э. Г. Позняк*, Примеры регулярных метрик на сфере и в круге, нереализуемых в классе дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей.— Вестн. Моск. ун-та, серия мат. (1960), т. 2, с. 3—5.
2. *А. В. Погорелов*, Пример двумерной римановой метрики, не допускающей локальной реализации в E^3.— Докл. АН СССР (1971), т. 198:1, с. 42—43.
3. *Э. Г. Позняк*, Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства.— Успехи мат. наук (1973), т. 28, с. 47—76.
4. *Ю. А. Аминов*, О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением.— Укр. геометр. сб. (1988), вып. 31, с. 3—14.
5. *Ю. А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб. (1980), вып. 23, с. 3—16.
6. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differen, v. II, part. II. Nicola Zanichelli (1924).
7. *Р. Курант и Д. Гильберт*, Методы математической физики, т. II. Гостехтеоретиздат, М.–Л. (1951), 544 с.
8. *K. Enomoto*, The Gauss image of flat surfaces in R^4.— Kodai Math. J. (1986), v. 9, p. 19—32.
9. *K. Enomoto*, Global properties of the Gauss image of flat surfaces in R^4.— Kolai Math. J. (1987), v. 10, p. 272—284.
10. *J. Weiner*, Flat tori in S^3 and their Gauss maps.— Proc. London Math. Soc. (1991), v. 62 (3), № 1, p. 54—76.

On the embeddings of a Euclidean plane into E^4 with vanishing Gaussian torsion

Yu. A. Aminov

Two approaches to the problem of a plane metric embedding are considered with using a geodesic and a curvature coordinate systems. The existence theorem for the surface passing through a given curve and a tangent strip for which this curve is a geodesic one is obtained using the first method. The second one leads to the boundary-value problem of reconstruction of the surface by its Gauss image, which is a translation surface.