Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 410–415

УДК 519.2

О характеризации распределения Коши на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики

С. С. Габриелян

Харьковский государственный политехнический университет, Украина, 31002, г. Харьков, ул. Фрунзе, 21

Статья поступила в редакцию 5 октября 1993 г.

В работе даны необходимые условия для справедливости на локально компактной абелевой группе аналогов классической теоремы о характеризации распределения Коши на числовой прямой равнораспределенностью одночлена и линейной статистики.

В роботі визначені необхідні умови, за яких на локально компактній абелевій групі мають бути справедливими аналогі класичної теореми про характеризацію розподілу Коші на числовій прямій рівнорозподіленності одночлена та лінійної статистики.

Как доказал Ю. В. Линник, на вещественной прямой справедлива следующая характеризация распределения Коши.

Теорема А. [1, с. 619]. *Пусть $\xi_1 \ldots, \xi_s$, $s \geq 2$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением μ. Если линейные формы $a_0 \xi_1$ и $a_1 \xi_1 + \ldots + a_s \xi_s$, где $a_0 = |a_1| + \ldots + |a_s|$ и хотя бы одна пара чисел $-\ln\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \ldots, -\ln\left|\frac{a_s}{a_0}\right|$ несоизмерима, одинаково распределены, то μ — распределение Коши.*

В этой статье мы рассмотрим групповые аналоги этой теоремы. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x,y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Если G — подгруппа в X, то через $A(Y,G)$ обозначим ее аннулятор $A(Y,G) = \{ y \in Y : (x,y) = 1, \forall\, x \in G \}$. Обозначим через $X^{(n)}$ образ группы X при гомоморфизме $f_n : X \to X$, определяемом формулой $f_n(x) = nx$, $x \in X$. Элемент $x \in X$ называется неограниченно делимым, если $\forall\, M \in \mathbf{N}, \exists\, m \in \mathbf{N}, m > M, \exists\, x^* \in X: mx^* = x$. Пусть C_X — компонента нуля группы X, а P — множество простых чисел. Обозначим через $P(x)$ множество таких чисел $p \in P$, что группа C_X не содержит элементов порядка p. Положим: $Q(X) = \left\{ \frac{n}{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}}, n, k_1, \ldots, k_l \in \mathbf{Z}, p_i \in P(X) \right\}$. Пусть $M(x)$ — группа линейно зависимых (над $\mathbf{Z}$) элементов от x, рассматриваемая в дискретной топологии.

Обозначим через $D(X)$ множество вырожденных распределений E_x, $x \in X$, на группе X, через $I(X)$ — множество всех сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$.

Свертка двух распределений μ и ν, характеристическая функция (х.ф.) распределения μ и распределение $\bar{\mu}$ определяются обычным образом:

$$(\mu * \nu)(E) = \int\limits_X \mu(E - x) d\nu(x), \qquad \widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x,y) d\mu(x), \qquad \bar{\mu}(E) = \mu(-E).$$

Пусть $X = T$ — одномерный тор, тогда $Y \approx \mathbf{Z}$. Распределением Коши на торе будем называть образ распределения Коши на $\mathbf{R}$ при естественном гомоморфизме τ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} = T$, т.е. распределение μ с х.ф. $\widehat{\mu}(n) = \exp\{-\alpha \mid n \mid + int\}$, $\alpha \geq 0$, $t \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$. Множество распределений Коши на торе обозначим через $K(T)$.

Определение. [2]. *Распределение μ на группе X называется распределением Коши, если:*

1) *для любого характера $y \in Y$ распределение $y(\mu) \in K(T)$;*
2) *распределение μ — безгранично делимо.*

Множество распределений Коши на группе X обозначим через $K(X)$.

Если $\mu \in K(\mathbf{R}^n)$, то $\widehat{\mu}(y) = \exp\{i < x,y > - \int\limits_S \mid < y,\xi > \mid M(d\xi)\}$, где $M(d\xi)$ — конечная мера на сфере $S = \{\xi: \|\xi\| = 1\}$ (см. [3]). Отсюда и из теоремы "о линеаризации" [2] следует, что $\mu = E_x * \mu_0$, где μ_0 таково, что $\widehat{\mu_0}(y) > 0$, $\forall\, y \in Y$. Если $\mu \in K(X)$ и $\widehat{\mu}(y) > 0$, $\forall\, y \in Y$, то μ назовем симметричным, а их множество обозначим через $K^s(X)$. Тогда $K(X) = D(X) * K^s(X)$.

Множество $A = \{a_i\}_{i=0}^{s}$ целых чисел назовем допустимым для группы X, если $X^{(a_j)} \neq \{0\}$ при всех $j = \overline{0,s}$. Обозначим через $N(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_i\}_{i=0}^{s}$, $s \geq 2$, удовлетворяющих условию: $a_1, \ldots, a_s$ — взаимно просты и $a_0 = a_1 + \ldots + a_s$, где, по крайней мере, одна пара чисел $-\ln\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \ldots, -\ln\left|\frac{a_s}{a_0}\right|$ несоизмерима.

Пусть $A \in N(X)$. Обозначим через $K_A(X)$ класс распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ, то линейные формы $a_0 \xi_1$ и $a_1 \xi_1 + \ldots + a_s \xi_s$ одинаково распределены.

Положим:

$$I_A(X) = I(X) \bigcap K_A(X), \quad D_A(X) = D(X) \bigcap K_A(X),$$

$$K_A^+(X) = \{\mu \in K_A(X): \widehat{\mu}(y) \neq 0, \ \forall\, y \in Y\}.$$

Легко видеть, что $K^s(X) \subset K_A^+(X)$, поэтому верны включения

$$I_A(X) * K^s(X) \subset K_A(X),$$

$$D_A(X)*K^s(X) \subset K_A^+(X).$$

Основной вопрос: когда верны равенства

$$K_A(X) = I_A(X)*K^s(X), \tag{1}$$

$$K_A^+(X) = D_A(X)*K^s(X). \tag{2}$$

Ниже будут даны необходимые условия для выполнения равенств (1) и (2), которые для некоторых $A \in N(X)$ будут являться достаточными.

Пусть $A \in N(X)$. Положим $\overline{a} = \text{НОК}\{\ \{\text{НОД}\{\ |a_i|\ \}_{i=1,i\neq j}^{s}\}_{j=1}^{s}\}$, т.е., если $\overline{a}$ делится на p^k, где p — простое, то на p^k делятся $s-1$ число $a_i \in A$. Отметим, что a_0 и $\overline{a}$ взаимно просты. Обозначим через $Д(\overline{a})$ множество простых делителей числа $\overline{a}$.

Лемма 1. [4]. *Пусть K — компактная подгруппа группы X и $A \in N(X)$, тогда $m_K \in K_A(X)$, если и только если $K^{(a_0)} = K$.*

Лемма 2. *Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{s}$, $s \geq 2$, — множество взаимно простых чисел и $a_i^k a_j x \to 0$ при $k \to \infty$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,s}$. Тогда $X^{(\overline{a})} = \{0\}$.*

Лемма 3. [4]. *Пусть X— дискретная группа без кручения, тогда $K_A(X) \subset D(X)$ для любого $A \in N(X)$.*

Лемма 4. *Пусть $\mu \in K_A(X)$ и группа X удовлетворяют условию* (i): *для любой компактной подгруппы $K \subset X$, для которой $K^{(a_0)} = K$, K^* не содержит элемента порядка $p \in Д(\overline{a})$. Тогда $\exists\, x_\mu \in X$: $\sigma(\mu * E_{x_\mu}) \subset G$, где $G \approx \mathrm{R}^m \oplus K$, группа K компактна и $K^{(a_0)} = K$.*

Лемма 5. *Пусть $X \approx \mathrm{R}^m \oplus K$, где K — компактна, удовлетворяет условию (i) леммы 4 и условию (α) : $K^{(a_0)} = K$, $(K^*)^{(a_0)} = K^*$. Тогда, если $\mu \in K_A(X)$, то $\mu * \overline{\mu}$ — безгранично делимо.*

Лемма 6. *Пусть $A = \left((a_{ij})_{i=1}^{m}\right)_{j=1}^{s}$ — матрица, состоящая из целых чисел. Пусть $\forall\ n \in \mathrm{N}\ \exists\ \mathrm{b}_n = (b_n^1, \ldots, b_n^s) \in (\mathrm{N} \bigcup \{0\})^s$ такие, что $b_n^1 + \ldots + b_n^s \to \infty$, $n \to \infty$, и $A\mathrm{b}_n = \mathrm{c}_n = (c_n^1, \ldots, c_n^m)$, где $c_n^i \geq C$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда*

$$\exists\, \mathrm{b} \in (\mathrm{N} \bigcup \{0\})^s:\ A\mathrm{b} = \mathrm{c} = (c_1, \ldots, c_m),\ c_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы на группе X выполнялось равенство* (1) *для $A \in N(X)$, необходимо, чтобы группа X удовлетворяла условиям:*

(i) если $K \subset X$ компактна, $K^{(a_0)} = K$, то

$$K^{(\overline{a})} = K, \qquad (K^*)^{(\overline{a})} = K^*;$$

(*ii*) *имеет место включение* $\frac{1}{a_0} \in Q(X)$, *т.е.* $\{ x \in C_X : a_0 X = 0 \} = \{ 0 \}$.

Теорема 2. *Для того чтобы на группе X выполнялось равенство* (2) *для* $A \in N(X)$, *необходимо, чтобы группа X удовлетворяла условиям:*

(α_1) *X не содержит элементов порядка* $p \in Д(\overline{a})$;

(α_2) *для любой связной подгруппы* X_1 *группы X группа* X_1^* *содержит элемент* y_1 *такой, что*

$$\exists\, k_1, \ldots, k_s \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad k_1 + \ldots + k_s > 0: \qquad \frac{a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s}}{a_0^{k_1 + \ldots + k_s}} \in Q(M^*(y_1)).$$

Отметим также, что если в группе X нет элементов порядка $p \in Д(\overline{a})$, то

$$\forall \quad \mu \in K_A^+(X) \qquad \exists\, x_\mu \in X: E_{x_\mu} \in K_A^+(X) \quad \text{и} \quad \sigma(\mu * E_{x_\mu}) \subset C_X.$$

Предложение 1. *Пусть группа X и* $A \in N(X)$ *удовлетворяют условиям* (*i*) *и* (*ii*) *теоремы* 1 *и* $\mu \in K_A(X)$, *тогда:*

1) *множество* $E = \{ y \in Y: \widehat{\mu}(y) \neq 0 \}$ — *открытая подгруппа в* Y;

2) $\exists\, x_\mu \in X: m_{A(X,E)} * E_{x_\mu} \in I_A(X), \ \ \mu * E_{-x_\mu} \in K_A(X)$,

при этом $\widehat{\mu}(y) \cdot (-x_\mu, y)\big|_E$ *является х.ф. распределения* $\mu' \in K_A(X/A(X,E))$, *причем* $\sigma(\mu') \subset G$, *где G — связная группа, удовлетворяющая условиям* (α_1) *теоремы* 2 *и* (*ii*) *теоремы* 1.

Замечание 1. Основные нерешенные вопросы заключаются в выяснении того, являются ли необходимые условия в теоремах 1 и 2 достаточными. В частности, как следует из предложения 1, в случае, когда $a_i > 0$, $i = \overline{1,s}$, достаточность условий (*i*) и (*ii*) в теореме 1 равносильно доказательству следующего утверждения.

Пусть X — связная компактная группа, $\dim X = 1$. *Положим,* $\mu \in K_A^+(X)$ — *безгранично делимо и* $\widehat{\mu}(y) > 0, \forall\, y \in Y$. *Пусть* $A \in N(X)$ *таково, что:*

1) *в группе X нет элементов порядка* $p \in Д(\overline{a})$;

2) $\frac{1}{a_0} \in Q(X)$.

Тогда $\mu \in K(X)$.

Опираясь на теорему 1 и замечание 1, нетрудно доказать следующие две теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы на группе X при некотором* $A \in N(X)$ *имело место равенство* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $P(X) \neq \varnothing$.

Теорема 4. *Для того чтобы на группе X имело место равенство* (1) *при любом* $A \in N(X)$, *необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла одному из условий:*

1) $X \approx \mathrm{R}^n \oplus D$, $n \geq 0$, D — *дискретная группа без кручения;*
2) $X^{(p)} = \{ 0 \}$, *где* p — *простое число.*

Отметим, что в случае, когда $\dim C_X \leq 1$, теорема 3 доказана в [4], а теорема 4 в [5].

Положим:

$$K_{A\infty}(X) = \bigcap_{A \in N(X)} K_A(X), \qquad I_{A\infty}(X) = I(X) \cap K_{A\infty}(X).$$

Отметим, что если группа X не конечного порядка, то:
1) $m_K \in I_{A\infty}(X)$, если и только если группа K связна;
2) $E_x \in K_{A\infty}(X) \Leftrightarrow 2x = 0$.

Теорема 5. *Следующие утверждения эквивалентны.*
1) $K_{A\infty}(X) = I_{A\infty}(X) * K^s(X)$.
2) C^*_X *состоит из неограниченно делимых элементов.*

Замечание 2. Рассматривая групповые аналоги характеризации распределения Гаусса на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики [6], можно показать справедливость как аналогов теоремы 1 и 2 для распределения Гаусса, так и замечания 1 (без ограничения $a_i > 0$).

Замечание 3. Аналогично тому, как введено распределение Коши на группе, можно ввести понятие симметричного устойчивого распределения (с.у.р.) с показателем α, $0 < \alpha \leq 2$, а именно: назовем с.у.р. с показателем α на торе T образом с.у.р. с показателем α при естественном гомоморфизме $\tau : \mathrm{R} \to \mathrm{R}/\mathrm{Z} = T$ (т.е. распределение μ с х.ф. $\hat{\mu}(n) = \exp\{ - a \mid n \mid^{\alpha} \}$, $n \in \mathrm{Z}$, $a \geq 0$).

Определение. *Распределение* μ *называется с.у.р. с показателем* α, $0 < \alpha \leq 2$, *если:*
1) $y(\mu)$ — *с.у.р. с показателем* α *на торе* T *для любого* $y \in Y$ *и*
2) μ — *безгранично делимо.*

Обозначим множество с.у.р. с показателем α на группе X через $SS(X,\alpha)$. Тогда для $\mu \in SS(X,\alpha)$ и множества $SS(X,\alpha)$ будут верны свойства, аналогичные свойствам для распределения Коши и Гаусса (см. [2,6,7]), соответствующие аналоги теорем 1 и 2 (для прямой см. [1]). Кроме того:

1. Любой предел ν распределений $\mu_i \in SS(X,\alpha)$ представим в виде свертки распределения Хаара компактной связной подгруппы K группы X и распределения $\gamma \in SS(X,\alpha)$. В частности, класс $SS(X,\alpha)$ замкнут, если и только если $C_X \approx \mathrm{R}^n$;

2. Обозначим через $SS_0(X,\alpha)$ подмножество в подполугруппе $SS(X,\alpha)$, состоящее из распределений μ с х.ф. $\hat{\mu}(y) = \exp\{ - [\varphi(y)]^{\alpha/2} \}$, где $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)] \text{ (см. [6,7])}.$$

Тогда:

а) если $\alpha = 2$ или $\dim C_X \le 1$, то $SS_0(X,\alpha) = SS(X,\alpha)$;

б) если $\alpha \ne 2$ и $\dim C_X > 1$, то существует $\mu \in SS(X,\alpha)$ такое, что μ не представимо в виде конечной или бесконечной свертки распределений $\mu_i \in SS_0(X,\alpha)$. Тем не менее, конечные свертки $\mu_i \in SS_0(X,\alpha)$ всюду плотны в $SS(X,\alpha)$ в топологии слабой сходимости.

Список литературы

1. *А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао*, Характеризационные задачи математической статистики. Наука, Москва (1972), 656 с.
2. *С. С. Габриелян*, О распределении Коши, в смысле Урбаника, на абелевых группах. Харьков (1991), 16 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.12.91, № 4641—В91.
3. *В. М. Золотарев*, Одномерные устойчивые распределения. Наука, Москва (1979), 424 с.
4. *Г. М. Фельдман*, Распределение Коши на абелевых группах и его характеризация. — Докл. АН СССР (1989), т. 309, № 1, с. 46—49.
5. *С. С. Габриелян*, К характеризации распределения Коши на абелевых группах.— Динамические системы и комплексный анализ. Наук. думка, Киев (1992), с. 163—168.
6. *Г. М. Фельдман*, Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах. Наук. думка, Киев (1990), 168 с.
7. *С. С. Габриелян*, О распределении Коши на абелевых группах.— Докл. АН УССР (1990), № 9, с. 12—13.

On a characterization of a Cauchy distribution on groups by identical distribution of a monomial and a linear statistics

S. S. Gabrielyan

The necessary conditions of validity of classical theorem analogies on characterization of Cauchy distribution along number lines by means of monomial uniform distribution and a linear statistics in a local compact Abelian group are determined.