Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 424–449

УДК 517.98

Экспоненциальная локализация для конечно-разностного оператора бесконечного порядка со случайным потенциалом

В. З. Гриншпун

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 12 октября 1993 г.

Рассмотрен конечно-разностный оператор бесконечного порядка со случайным потенциалом (независимые, одинаково распределенные случайные величины). Доказано, что спектр этого оператора либо весь является чисто точечным при достаточно большом беспорядке, либо является чисто точечным на краях спектра при любом беспорядке. Соответствующие собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности.

Розглядається скінченно-різницевий оператор нескінченного порядку з випадковим потенціалом (незалежні, однаково розподілені випадкові величини). Доведено, що спектр цього оператора або увесь є чисто точковим для великого безпорядку, або є чисто точковим біля границі спектру для довільного безпорядку. Відповідні власні функції експоненціально спадають у нескінченності.

Рассмотрим матричный случайный оператор, действующий в $l^2(Z^d)$, который можно представить в виде

$$A = A_0 + V, \tag{1}$$

где A_0 — неслучайный трансляционно инвариантный (теплицев) оператор

$$(A_0 \psi)(z) = \sum_{|x-y| \geq 1} a_0(x-y)\psi(y) \qquad x \in Z^d, \qquad \psi \in l^2(Z^d), \tag{2}$$

функция $a_0(x)$ — вещественная, четная и удовлетворяет условию

$$|a_0(x)| \leq C \exp(-\rho |x|), \tag{3}$$

где $|x| = \max_j \{ |x_j| \}$, $C, \rho > 0$,

а V (потенциал) — случайный диагональный оператор, задаваемый формулой

$$(V\psi)(x) = V(x)\psi(x), \tag{4}$$

где $\{ V(x) \}_{x \in Z^d}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с ограниченной плотностью распределения

$$P\{ V(x) \in dV \} = g(V)dV, \ \sup g(V) = \delta^{-1} < \infty\ , \tag{5}$$

где δ — характеризует беспорядок (спетень "размазанности") меры P. В качестве вероятностного пространства будем рассматривать пространство реализаций потенциала $\Omega = \prod_{x \in Z^d} \left(R_x, dP(V(x))\right)$.

Мы будем говорить, что для оператора A имеет место экспоненциальная локализация на интервале $I \subset R$, если спектр оператора A на I чисто точечный и соответствующие собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности.

В настоящей работе указаны достаточные условия, гарантирующие экспоненциальную локализацию для оператора A. В частности, эти условия выполняются на краях спектра при любом δ и на всем спектре при достаточном большом δ. Этот результат обобщает на случай оператора бесконечного порядка известные результаты последних лет о точечном спектре оператора (1)-(5) в случае, когда $a_0(x) = 0$ при $|x| > 1$, т.е. когда (1)-(5) есть оператор II порядка (модель Андерсона). Дадим краткий обзор этих результатов.

В 1983 году Й. Фрёлих и Т. Спенсер в работе [1] доказали (при "высоких энергиях" либо "большом беспорядке") экспоненциальное убывание функций Грина, из которого, как заметили Ф. Мартинелли и Э. Скоппола [2], непосредственно следует лишь отсутствие абсолютно непрерывного спектра. В 1985 году три независимые группы авторов Й. Фрёлих, Ф. Мартинелли, Э. Скоппола и Т. Спенсер [3]; Ф. Делион, Т. Леви и Б. Суйяр [4]; Б. Саймон и Т. Вольф [5]) доказали экспоненциальную локализацию для модели Андерсона, опираясь на указанную работу Й. Фрёлиха и Т. Спенсера. В 1987 году Э. Дрейфус [6] и Т. Спенсер [7] представили новое, значительно упрощенное доказательство экспоненциального убывания функции Грина для модели Андерсона, основная новая идея которого появилась благодаря теории перколяции [8].

Что касается оператора бесконечного порядка (1)-(5), то до недавнего времени было известно несколько работ, посвященных этой теме, но в них рассматривается лишь одномерный случай (см. [9], [10].

В данной работе идеи, изложенные в работах [6], [7] и [5], используются для доказательства экспоненциальной локализации оператора бесконечного порядка (1)-(5) в случае произвольной размерности. Основные результаты этой работы были анонсированы в заметке [11].

После опубликования этой заметки автору стало известно, что М. Айзенман и С. Молчанов предложили новое доказательство локализации, которое применимо также и в более общем случае степенного убывания матричных элементов оператора A_0 или их случайного характера. Однако, поскольку доказательство этих авторов основано на иных идеях и технике, то излагаемое нами доказательство, дающее развернутую картину формирования функции Грина и спектра оператора (1)-(5), заданного во всем пространстве Z^d из таковых для операторов, заданных в конечных объемах, представляется интересным и полезным, так как оно раскрывает содержательную и важную со многих точек зрения сторону такого сложного явления, каким является точечный спектр случайных операторов.

В первой части работы приведены формулировки результатов. Теоремой 1 представлен наш основной результат по локализации, теорема 2 утверждает экспоненциальное убывание функций Грина оператора (1)-(5), теоремы 3 и 4 формулируют основные технические результаты, доказательство которых содержится во второй части работы. В третьей части приведено доказательство теоремы 2.

1. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in Z^d$, убывает экспоненциально на бесконечности с декрементом $m > 0$, если $\limsup\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{\ln |f(x)|}{|x|} \le -m$.

Теорема 1. *Для заданного m $(0 < m < \rho$, где ρ определено в (3)) существуют δ_0 и $E_0 = E_0(\delta)$ такие, что часть спектра оператора A, лежащая в области $|E| > E_0(\delta)$, при $\delta \le \delta_0$ является чисто точечной, и соответствующие собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности с декрементом m. Если же $\delta > \delta_0$, то весь спектр A обладает этим свойством.*

Мы начнем с формулировки необходимых сведений и результатов теории случайных операторов.

Предложение 1. *Оператор A, заданный на множестве финитных функций из $l^2(Z^d)$, существенно самосопряжен с вероятностью 1. Спектр оператора A, а также его чисто точечная и непрерывная компоненты являются неслучайными множествами.*

Первая часть утверждения тривиальна, доказательство второй см. в работах [12, 13].

Через $G(z; x, y)$, $z \notin \operatorname{spec}(A)$, $x, y \in Z^d$ обозначим функцию Грина (ядро резольвенты) оператора A.

Предложение 2. (Критерий точечности спектра Б. Саймона и Т. Вольфа [5].) *Предположим, что функция Грина оператора A удовлетворяет соотношению*

$$\sup_{\varepsilon \ne 0} |G(E + i\varepsilon; 0,x)| \le C_E \exp(-m|x|) \tag{6}$$

для почти всех пар $(E, \omega) \in I \times \Omega$, $I \subset R$ (относительно меры $L \times P$, где L — мера Лебега на R). Тогда с вероятностью 1 оператор A имеет чисто точечный спектр на I и соответствующие собственные функции с вероятностью 1 убывают экспоненциально на бесконечности с декрементом m.

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. (Экспоненциальное убывание функций Грина.) *Для заданных m $(0 < m < \rho)$ и $p > p_0$ $\left(p_0 = \max(2d, \sqrt{2}(d+1))\right)$ существуют δ_0 и $E_0(\delta)$ такие, что для всех $|E| > E_0(\delta)$ при $\delta \le \delta_0$ и для всех $E \in R$ при $\delta > \delta_0$ неравенство*

$$\operatorname{Prob}\{\sup_{\varepsilon \ne 0} |G(E + i\varepsilon; 0,x)| \le C_E \exp(m(K - |x|)) \quad \forall\, x \in Z^d\} \ge$$

$$\ge 1 - DK^{-(P/\sqrt{2} - d)} \tag{7}$$

выполняется для всех $K > K_0$, где константы K_0 и D зависят только от m, p, d, C и распределения g.

Теорема 1 следует непосредственно из теоремы 2 и предложения 2. В самом деле, если при фиксированном E обозначим через F_k событие, вероятность которого оценивается неравенством (7), $\overline{F}_k$ — дополнение к этому событию. Из (7) следует, что $\sum_{k \geq k_0} P(\overline{F}_k) < \infty$ (поскольку $p > \sqrt{2}(d+1)$), так что по лемме Бореля–Кантелли вероятность одновременного выполнения бесконечного числа событий $\overline{F}_k$ равна нулю. Теперь по теореме Фубини получим, что неравенство (6) выполняется для почти всех пар $(E, \omega) \in I \times \Omega$, где $I \subset R$ — произвольный интервал, для почти всех (по Лебегу) спектральных параметров которого справедлива теорема 2.

Введем основные обозначения и определения. Пусть $\Lambda \subset Z^d$ — конечный объем. Обозначим через A_Λ сужение оператора A на $l^2(\Lambda)$ (нулевые граничные условия).

Через $G_\Lambda(z)$, $z \notin \operatorname{spec}(A_\Lambda)$, будем обозначать резольвенту оператора A_Λ, продолженную на $l^2(Z^d)$ нулем:

$$G_\Lambda(z;x,y) = \begin{cases} (A_\Lambda - z)^{-1}(x,y) & x, y \in \Lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Мы опускаем в обозначениях зависимость от потенциала V_ω.) Для $x \in Z^d$ нам будет удобно пользоваться нормой $\|x\| = |x| = \max_j |x_j|$. Обозначим через $\Lambda_l(x)$ куб с центром в $x \in Z^d$ и с ребром длиной l

$$\Lambda_l(x) = \{ y \in Z^d, \ | y - x | \leq l/2 \}.$$

Граничными точками куба назовем множество

$$\partial\Lambda_l(x) = \{ y \in \Lambda_l(x), \ | y - x | = [l/2], \ [.]\text{—целая часть} \}.$$

Пусть $\Lambda_1 \subset \Lambda$. Полной границей Λ_1 в Λ назовем множество пар

$$\partial^*\left(\Lambda_1 \subset \Lambda\right) = \{ < t_1, t >, \ t_1 \in \Lambda_1, \ t \in \Lambda \}.$$

(Обычно будем писать просто $\partial^*\Lambda_1$.) Для $\Lambda \subset Z^d$ обозначим через $|\Lambda|$ число точек в Λ. Заметим, что

$$|\Lambda_l| \leq (l+1)^d, \quad |\partial\Lambda_l| \leq s(d) l^{d-1}, \quad |\partial^*(\Lambda_l \subset \Lambda)| \leq |\Lambda_l|\,|\Lambda|,$$

где константа s зависит только от размерности d.

При доказательстве теоремы 2 мы опираемся на утверждение о резольвентном тождестве и на результат о плотности состояний, впервые полученный Ф. Вегнером [14] для модели Андерсона.

Предложение 3. *Для $\Lambda_1 \subset \Lambda$ имеет место следующее резольвентное тождество:*

$$G_\Lambda = G_{\Lambda_\oplus} + G_{\Lambda_\oplus} \Gamma G_\Lambda = G_{\Lambda_\oplus} + G_\Lambda \Gamma G_{\Lambda_\oplus}, \tag{8a}$$

где $G_{\Lambda_\oplus} = G_{\Lambda_1} \oplus G_{\Lambda \setminus \Lambda_1}$ *($\oplus$ — ортогональная сумма), а оператор Γ определяется следующим образом:*

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} -a_0(x-y), & \text{если } < x,y > \in \partial^* \Lambda_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство.
Так как

$$A_\Lambda = A_{\Lambda_1} + A_{\Lambda \setminus \Lambda_1} - \Gamma = A_\oplus - \Gamma,$$

то

$$(A_\oplus - E) = (A_\Lambda - E) + \Gamma,$$

откуда

$$(A_\Lambda - E)^{-1} = (A_\oplus - E)^{-1} + (A_\oplus - E)^{-1}\Gamma(A_\Lambda - E)^{-1} =$$
$$= (A_\oplus - E)^{-1} + (A_\Lambda - E)^{-1}\Gamma(A_\oplus - E)^{-1}.$$

Если $x \in \Lambda_1$, $y \in \Lambda$, то соотношение (8.а) влечет за собой

$$G_\Lambda(x,y) = G_{\Lambda_1}(x,y) + \sum_{< t_1, t > \in \partial^* \Lambda_1} G_{\Lambda_1}(x,t_1) a(t - t_1) G_\Lambda(t,y), \tag{8b}$$

где, как мы определили $a(t) = -a_0(t)$. Заметим, что если $y \notin \Lambda_1$ (т.е. куб Λ_1 разделяет точки x и y), то $G_{\Lambda_1}(x,y) = 0$.

Предложение 4 (Ф. Вегнер). *Пусть $\Lambda \subset Z^d$ — конечный объем, $g_0 = 2\sup g(V) < \infty$, тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{Prob}\,\{\, \| G_\Lambda(E) \| \le W \} \le 1 - g_0 \,|\Lambda|\, W^{-1}.$$

(Доказательство см., например, в работе [15].)

Заметим, что ограниченность плотности распределения g (условие (5)) требуется для доказательства теоремы Вегнера, а также критерия точечности спектра Саймона и Вольфа (см. [5]).

Куб $\Lambda_l(x)$ назовем (h,m,E)-регулярным (для фиксированного потенциала), если неравенство

$$\sup_{\varepsilon \ne 0} \left| G_{\Lambda_l(x)}(E + i\varepsilon; 0, x, y) \right| \le \exp(-m(y-x))$$

выполняется для всех y, $h/2 \le |y - x| \le l/2$ и соответственно (h,m,E)-сингулярным в противном случае. (В случае $h = 0$ будем говорить о (m,E)-регулярности.)

Введенное нами определение регулярности является обобщением понятия, которое используется Т. Спенсером [7] и Э. Дрейфусом и А. Клейном [16] в том случае, когда A есть дискретный оператор Лапласа, и когда соблюдается условие $h = l - 1$.

Предложение 5. *Для заданных* $m > 0$, $p > 0$, $L > L > 0$ *существуют* $E_0 = E_0(\delta)$ *и* δ_0 *такие, что если* $|E| > E_0$, *либо* $\delta > \delta_0$, *то имеет место соотношение*

$$\operatorname{Prob}\{\Lambda_{L_i}(m_0,E)\text{-регулярен}\} \geq 1 - L_i^{-p}, \quad i = 0,1. \tag{9}$$

Доказательство.

1. Предположим, что для всех $x \in \Lambda_L$ выполняется неравенство $|V(x)| \leq E - \|A_0\| - \exp(m_0 L/2)$. Тогда

$$\operatorname{dist}\{E, \operatorname{spec}(A_{\Lambda_L})\} \geq \exp(m_0 L/2), \text{ т. е.}$$

$$\left\|G_{\Lambda_L}(E)\right\| \leq \exp(-m_0 L/2).$$

Так как

$$\operatorname{Prob}\{|V(x)| \leq E - \|A_0\| - \exp(m_0 L/2) \quad \forall\ x \in \Lambda_L\} =$$

$$= \left(P\{[-E + \|A_0\| + \exp(m_0 L/2),\ E - \|A_0\| - \exp(m_0 L/2)]\}\right)^{|\Lambda_L|} \underset{E \to \infty}{\longrightarrow} 1,$$

то неравенство (9) выполняется одновременно для всех $|E| > E_0$, если $E_0 = E_0(\delta, L_0, L_1, C, m_0, p, d)$ достаточно велико.

2. Для произвольного E предположим, что для всех $x \in \Lambda_L$ выполняется неравенство $|V(x) - E| \geq -\|A_0\| + \exp(m_0 L/2)$. Тогда

$$\|G_{\Lambda_L}(E)\| \leq \exp(-m_0 L/2).$$

Поскольку

$$\operatorname{Prob}\left\{|V(x) - E| \geq \|A_0\| + \exp(m_0 L/2) \quad \forall\ x \in \Lambda_L\right\} =$$

$$= \left(1 - P\left\{[E - \|A_0\| - \exp(m_0 L/2),\ E + \|A_0\| + \exp(m_0 L/2)]\right\}\right)^{|\Lambda_L|} \underset{\delta \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

то неравенство (9) выполняется одновременно для всех $E \in R$, если $\delta > \delta_0(L_0, L_1, C, m_0, p, d)$ достаточно велико.

Неравенства (9) мы будем рассматривать как "затравочные" оценки функций Грина для конечных объемов, исходя из которых можно получить требуемое соотношение (7). Теорема 2 будет доказана с помощью следующей теоремы для конечных объемов.

Теорема 3. *Предположим, что для некоторых* $L_1 > L_0 > 0$, m_0 $(0 < m_0 \leq \rho)$ *и* $p > 2d$ *выполняется соотношение* (9). *Тогда для заданного* m $(0 < m < m_0)$ *существуют* $\alpha = \alpha(p,d)$ $(1 < \alpha < \sqrt{2})$ *и* $B = B(p,d,m,m_0,\delta,C) < \infty$ *такие, что если* $L_0 > B$ *и* $L_1 = L_0^{\alpha}$, *то для произвольного конечного объема* $\Lambda \subset Z^d$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Prob}\Big\{\sup_{\varepsilon \neq 0} \left| G_\Lambda(E + i\varepsilon; 0,x,y) \right| \leq \exp(-m|y-x|)$$

$$\forall\ x, y \in \Lambda,\ l \leq |x-y| \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Lambda)\Big\} \geq 1 - \widetilde{C}\,|\Lambda|\, l^{-p/\alpha},$$

где константа $\tilde{C} = \tilde{C}(p,m,m_0,g) > 0$.

Теорема 3 является простым следствием следующего утверждения.

Теорема 4. *Предположим, что для некоторых* $L_1 > L_0 > 0$, m_0 $(0 < m_0 \le \rho)$ *и* $p > 2d$ *выполняется соотношение* (9). *Тогда для заданного* m $(0 < m < m_0)$ *существуют* $\alpha = \alpha(p,d)$ $(1 < \alpha < \sqrt{2})$ *и* $B = B(p,d,m,m_0,\delta,C) < \infty$ *такие, что если* $L_0 > B$ *и* $L_1 = L_0^\alpha$, *то для всех* $n \in N$, $L_n = L_0^{(\alpha)^n}$ *имеет место неравенство*

$$\text{Prob}\ \{\ \Lambda_{L_n}(x)\ (L_n^\beta, m, E)\text{-регулярен}\ \} \ge l - L_n^{-p},$$

где $\beta = \dfrac{2}{1+\alpha^3}$.

Теорема 4 является нашим основным техническим результатом. Отметим, что в случае оператора бесконечного порядка необходим контроль функций Грина не только граничного, но и внутренних слоев конечных объемов.

2. Доказательство теоремы 4 проводится индукцией по n. Шаг индукции заключается в доказательстве следующего утверждения:
если

$$\text{Prob}\ \{\ \Lambda_{L_{n-1}}(x)\ (L_{n-1}^\beta, m_{n-1}, E)\text{-регулярен}\ \} \ge l - L_{n-1}^{-p}$$

и

$$\text{Prob}\ \{\ \Lambda_{L_n}(x)\ (L_n^\beta, m, E)\text{-регулярен}\ \} \ge l - L_n^{-p},$$

то

$$\text{Prob}\ \{\ \Lambda_{L_{n+1}}(x)\ (L_{n+1}^\beta, m_{n+1}, E)\text{-регулярен}\ \} \ge l - L_{n+1}^{-p}.$$

где $m < m_i \le m_0$.

Обоснование шага индукции состоит из детерминистической и вероятностной частей и содержится в леммах 1-7. Выбор B и α определяется леммами 1, 5, 6 и 7. Леммы 2 и 3 необходимы для доказательства леммы 1, которая составляет основу детерминистической части доказательства.

Лемма 1. *Пусть* m, m_0 $(0 < m < m_0 \le \rho)$ *и* $\alpha = (1 < \alpha < \sqrt{2})$ *заданы. Предположим, что для некоторых* $h > 0$, *и* $l = h^\alpha$, $L = l^\alpha$, m_l *и* $m_h (m < m_l < m_h \le m_0)$ *выполнены условия:*

а) $\| G_{\Lambda_{4L}(0)} \| \le W_L$,

$\| G_{\Lambda_l(r)} \| \le \omega_l = \exp\{ m_l l^\theta \}$ *для всех* $r \in \Lambda_{4L}(0)$,

$\| G_{\Lambda_h(r)} \| \le \omega_h = \exp\{ m_h h^\theta \}$ *для всех* $r \in \Lambda_{4L}(0)$;

b) существуют $u,v \in \Lambda_{4L}(0)$ *такие, что для всех* $r \in \Lambda_{4L} \setminus \Lambda_{2l}(u)$ *кубики* $\Lambda_l(r)$ (l^β, m_l, E)*-регулярны, и для всех* $r \in \Lambda_{4L} \setminus \Lambda_{2h}(u)$ *кубики* $\Lambda_h(r)$ (h^β, m_h, E)*-регулярны.*

Тогда существует $B_1 = B_1(C,d,m,\alpha) < \infty$ *такое, что если* $h > B_1$, $\theta = \beta = \dfrac{2}{1+\alpha^3}$, $\gamma = \beta\alpha^2$ *(т.е.,* $\beta < 1 < \gamma < \alpha < \sqrt{2}$ *и* $\theta = \beta = 2 - \alpha\gamma$*), то имеют место неравенства:*

$$\left| G_{\Lambda_{4L}}(0,y) \right| \le W_L \exp\{ -m_l(|y| - Ml) \}, \tag{10a}$$

если $\frac{1}{2} l^\gamma \le |y| \le L$, *и*

$$\left| G_{\Lambda_{4L}}(0,y) \right| \le W_L \exp\{ -m_h(|y| - Mh) \}, \tag{10b}$$

если $\frac{1}{2} L^\beta \le |y| < \frac{1}{2} l^\gamma$ $(M = 8)$.

Идея доказательства состоит в применении резольвентного тождества (8) к выражению $\left| G_{\Lambda_{4L}}(0,y) \right|$ с использованием либо кубиков Λ_l в случае $\frac{1}{2} l^\gamma \le |y|$, либо кубиков Λ_h в случае $\frac{1}{2} L^\beta \le |y| < \frac{1}{2} l^\gamma$. Техническую часть леммы 1 составляет следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* m, m_0 $(0 < m < m_0 \le \rho)$, γ *и* ν $(1 < \gamma < \nu < 2)$ *заданы. Предположим, что для некоторых* $H \gg h$ *и* m_h $(m < m_h \le m_0)$ *выполнены условия:*

a) $\| G_{\Lambda_H(0)} \| \le W_H$,

$\| G_{\Lambda_h(r)} \| \le \omega_h = \exp\{ m_h h^\theta \}$ *для всех* $r \in \Lambda_H(0)$;

b) существует точка $u \in \Lambda_H(0)$ *такая, что для всех* $r \in \Lambda_H \setminus \Lambda_{2h}(u)$ *кубики* $\Lambda_h(r)$ (h^β, m_h, E)*-регулярны.*

Тогда существует $B_3 = B_3(C,d,m,\nu) < \infty$ *такое, что если* $h > B_3$, $\theta = \beta = 2 - \nu$ *и* $h^\nu \le H/4$, *то для всех* y: $\frac{1}{2} h^\gamma \le |y| \le h$ *выполняется неравенство:*

$$\left| G_{\Lambda_H}(0,y) \right| \le W_H \exp\{ -m_h(|y| - Mh) \}. \tag{11}$$

(Константа M *не зависит от* h, H, m_h *и пр.)*

Отметим, что результат, сформулированный леммой 2, не зависит от отношения H/h, которое может быть сколь угодно большим. Этот факт по существу будет вытекать из следующего рассуждения.

Лемма 3. *Пусть* $2h < |y| < h^\nu$, *где* $\nu < 2$. *Тогда*

$$\left| \sum_{\substack{|t-t'| \ge |y| - h \\ \langle t',t \rangle \in \partial^\bullet \Lambda_h}} a(t-t') \right| \le C_1 \exp\{ -\rho(|y| - 2h) \}.$$

где константа C_1 зависит только от ρ и d.

Доказательство.

$$\Big|\sum_{|t-t'|\ge|y|-h} a(t-t')\Big| \le \sum_{n\ge|y|-h}\ \sum_{|t-t'|=n} |a(t-t')| \le \sum_{n\ge|y|-h} |\Lambda_h| \times$$

$$\times |\partial\Lambda_n|\, C\exp\{-\rho n\} \le \sum_{n\ge|y|-h} s(d)Ch^d n^{d-1}\exp\{-\rho n\}. \tag{12}$$

Так как $h < |y| - h \le n$, то

$$s(d)Ch^d n^{d-1} < s(d)Cn^{2d-1} \le \tilde{C}_1(\rho,d)\exp\{\rho\sqrt{n}\}, \tag{13}$$

где константа $\tilde{C}_1$ зависит только от ρ и d. Таким образом, (12) оценивается величиной $\tilde{C}_1 \sum\limits_{n\ge|y|-h} \exp\{-\rho(n-\sqrt{n})\}$. Поскольку

$$\sum_{n\ge n_0}\exp\{-\rho(n-\sqrt{n})\} \le \exp\{-\rho(n_0-\sqrt{n_0})\} +$$

$$+\int_{n_0}^{\infty}\exp\{-\rho(x-\sqrt{x})\}dx \le \Big(1+\frac{3}{2\rho}\Big)\exp\{-\rho(n_0-\sqrt{n_0})\},$$

то

$$\Big|\sum_{|t-t'|\ge|y|-h} a(t-t')\Big| \le C_1\exp\{-\rho(|y|-h-\sqrt{|y|-h})\},$$

так как $\sqrt{|y|} \le h^\nu/2 < h$, где $C_1 = \tilde{C}_1(\rho,d)\Big(1+\frac{3}{2\rho}\Big)$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 2.

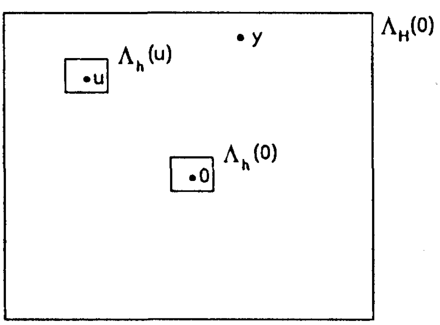

Рис. 1.

Пусть точка y такова, что $\frac{1}{2}h^\nu \le |y| \le h^\nu \le H/4$. Идея доказательства состоит в том, чтобы накопить экспоненциально малую оценку для $|G_{\Lambda_H(0)}(0,y)|$, итерируя резольвентное тождество для регулярных кубиков Λ_h, начиная с точки 0. Натолкнувшись на сингулярный кубик $\Lambda_h(u)$ (это может произойти уже после первого шага), продолжаем из точки y. Необходимо доказать, что если на некотором шаге какое-либо слагаемое "подошло" к сингулярной точке u с двух сторон, то для этого слагаемого нужная оценка уже получена.

Применим резольвентное тождество (8) к выражению $G_{\Lambda_H(0)}(0,y)$ для кубика $\Lambda_h(0)$:

$$
\begin{aligned}
G_{\Lambda_H(0)}(0,y) &\in \sum_{<t_1',t_1>\in\partial^*\Lambda_1} G_{\Lambda_h(0)}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y) = \\
&= \sum_{|t_1-t_1'|\geq|y|-h} G_{\Lambda_h(0)}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y) + \\
&+ \sum_{|t_1-t_1'|<|y|-h} G_{\Lambda_h(0)}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из леммы 2 и условий a) для первой суммы в (14) получим оценку

$$W_H\omega_h C_1 \exp\{-m_h(|y|-2h)\} \leq W_H \exp\{-m_h(|y|-3h)\}, \tag{15}$$

если h достаточно велико, чтобы выполнялось неравенство

$$C_1 \exp\{m_h h^\theta\} \leq \exp\{m_h h\}, \tag{16}$$

где константа $C_1 = C_1(\rho,d)$ определяется леммой 2 (см. (13)). Для оценки второй суммы в (14) воспользуемся следующими соотношениями:

$$|a(t_1-t_1')| \leq C\exp\left\{-\rho|t_1-t_1'|\right\} \leq C\exp\left\{-m_h|t_1-t_1'|\right\}, \tag{17}$$

$$\left|G_{\Lambda_h(0)}(0,t_1')\right| \leq \exp\left\{-m_h|t_1'|\right\} \text{ для } |t_1'| \geq \frac{1}{2}h^\beta \tag{18}$$

(условие (b)) и

$$\left|G_{\Lambda_h(0)}(0,t_1')\right| \leq w_h = \exp\left\{m_h h^\theta\right\} \text{ для } |t_1'| < \frac{1}{2}h^\beta \tag{19}$$

(условие a)). Вторую сумму в (14) оценим следующим образом:

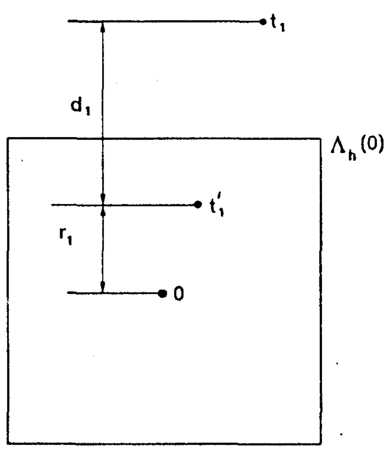

Рис. 2.

$$\sum_{d_1<|y|-h}\ \sum_{r_1\le h/2}\ \sum_{\substack{|t_1-t_1'|=d_1\\ |t_1'|=r_1}} \left|G_{\Lambda_h}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y)\right| \le$$

$$\le \sum_{h^\beta/2\le r_1\le h/2} \left\{ \sum_{d_1<|y|-h}\ \sum_{\substack{|t_1-t_1'|=d_1\\ |t_1'|=r_1}} \left|G_{\Lambda_h}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y)\right| \right\} +$$

$$+\sum_{r_1<h^\beta/2} \left\{ \sum_{d_1<|y|-h}\ \sum_{\substack{|t_1-t_1'|=d_1\\ |t_1'|=r_1}} \left|G_{\Lambda_h}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y)\right| \right\} \tag{20}$$

Используя соотношения (17), (18) для оценки левой части (20) и соотношение (19) для оценки правой части (20) получим

$$\sum_{|t_1-t_1'|=d_1} \left|G_{\Lambda_h}(0,t_1')a(t_1-t_1')G_{\Lambda_H}(t_1',y)\right| \le$$

$$\le \sum_{r_1<h^\beta/2}\ \sum_{d_1<|y|-h}\ \sum_{\substack{|t_1-t_1'|=d_1\\ |t_1'|=r_1}} C\exp\left\{m_h\xi_{r_1}h^\theta\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-m_h(d_1+\xi_{r_1}r_1)\right\}\left|G_{\Lambda_H}(t_1,y)\right|, \tag{21}$$

где для произвольного $i\ge 1$ мы определили

$$\xi_{r_i}=\begin{cases}1, & \text{если } r_i\ge h^\beta/2,\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$\bar\xi_{r_i}=1-\xi_{r_i}. \tag{22}$$

Для каждой фиксированной пары (r_1, d_1) $(r_1\le h/2,\ d_1<|y|-h)$ выберем

$$t_{r_1d_1}\in\Lambda_H(0),\ \left|t_{r_1d_1}\right|\le r_1+d_1<|y|-h/2,$$

так, чтобы

$$\left|G_{\Lambda_H}(t_{r_1d_1},y)\right| = \max_{\substack{|t_1-t_1'|=d_1\\ |t_1'|=r_1}} \left|G_{\Lambda_H}(t_1,y)\right|$$

(максимум достигается в силу условия a)).

Для (21) получим оценку:

$$\sum_{r_1 < h^\beta/2} \sum_{d_1 < |y| - h} Cs^2(d)(r_1 d_1)^{d-1} \exp\left\{m_h \xi_{r_1} h^\theta\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-m_h(d_1 + \xi_{r_1} r_1)\right\} \left| G_{\Lambda_H}(t_{r_1 d_1}, y)\right| \tag{23}$$

Заметим, что $(r_1 d_1)^{d-1} \leq (h\,|\,y\,|/2)^{d-1} \leq (h^{\nu+1}/2)^{d-1}$.

Предположим, что h достаточно велико, чтобы выполнялось неравенство

$$Cs^2(d)(h^3/2)^{d-1} \leq \exp\{mh^\theta\} \tag{24}$$

Из (14), (15), (16), (23) и (24) получим

$$\left| G_{\Lambda_H}(0,y)\right| \leq W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 3h)\} +$$
$$+\sum_{r_1 < h^\beta/2} \sum_{d_1 < |y| - h} \exp\left\{-m_h(d_1 + \xi_{r_1} r_1)\right\} \exp\left\{m_h(\xi_{r_1} + 1)h^\theta\right\} \times \left| G_{\Lambda_H}(t_{r_1 d_1}, y)\right|, \tag{25}$$

Все слагаемые суммы (25) разбиваем на три группы.

К первой группе отнесем слагаемое, для которого необходимая оценка вида (11) уже получена.

Ко второй группе слагаемых (25) отнесем те, которым соответствует $t_{r_1 d_1} \notin \Lambda_{2h}(u)$ (т.е., кубик $\Lambda_h(t_{r_1 d_1})$ (h^β, m_h, E)-регулярен). Для каждого такого слагаемого применяем резольвентное тождество к $G_{\Lambda_h}(t_{r_1 d_1}, y)$, используя кубик $\Lambda_h(t_{r_1 d_1})$. Полностью повторяя рассуждения (14)-(15), получим оценку:

$$\left| G_{\Lambda_R}(t_{r_1 d_1}, y)\right| \leq W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 3h)\} +$$
$$+\sum_{r_2 < h^\beta/2} \sum_{d_2 < |y| - h} \exp\left\{-m_h(d_2 + \xi_{r_2} r_2)\right\} \exp\left\{m_h(\xi_{r_2} + 1)h^\theta\right\} \times \left| G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)\right|,$$

где точка

$$t_{r_2 d_2} \in \Lambda_H(0), \quad \left| t_{r_2 d_2} - t_{r_1 d_1}\right| \leq r_1 + d_1,$$

выбрана так, что

$$\left| G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)\right| = \max_{\substack{|t_2 - t_2'| = d_2 \\ |t_2'| = r_2}} \left| G_{\Lambda_H}(t_2, y)\right|$$

То есть: каждое слагаемое второй группы из (25) оценивается суммой величин вида

$$W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 3h)\} + \exp\left\{-m_h(d_1 + \xi_{r_1} r_1 + d_2 + \xi_{r_2} r_2)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{m_h((\xi_{r_1} + 1) + (\xi_{r_2} + 1))\,h^\theta\right\} \left| G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)\right| =$$
$$= W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 3h)\} + E_{1,2} \left| G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)\right|. \tag{26}$$

В третью группу слагаемых (25) входят те, для которых $t_{r_1 d_1} \in \Lambda_{2h}(u)$. Для каждого такого слагаемого применяем резольвентное тождество к $G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)$, используя кубик $\Lambda_h(y)$ (т.е. идем с другого конца), и получая оценку суммой величин вида (26).

Таким образом, из (25) и (26) будем иметь

$$| G_{\Lambda_H}(0,y) | \le W_H \exp\{ -m_h(|y| - 3h)\} \left(\sum_{r_1,d_1} 1 + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{r_1,d_1 \\ t_{r_1 d_1} \notin \Lambda_{2h}(u)}} \sum_{r_2,d_2} E_{1,2} | G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y) | + \sum_{\substack{r_1,d_1 \\ t_{r_1 d_1} \in \Lambda_{2h}(u)}} \sum_{r_2,d_2} E_{1,2} | G_{\Lambda_H}(t_{r_1 d_1}, t_{r_2 d_2}) | \qquad (27)$$

Для каждого слагаемого суммы (27) реализуется, очевидно, одна из следующих возможностей.

1) Необходимая оценка вида (11) уже достигнута;

2) $t_{r_1 d_1}, t_{r_2 d_2} \notin \Lambda_{2h}(u)$;

3) $t_{r_1 d_1} \in \Lambda_{2h}(u), t_{r_2 d_2} \notin \Lambda_{2h}(u)$,

либо $t_{r_1 d_1} \notin \Lambda_{2h}(u), t_{r_2 d_2} \in \Lambda_{2h}(u)$;

4) $t_{r_1 d_1}, t_{r_2 d_2} \in \Lambda_{2h}(u)$.

Слагаемые 1) можно не трогать.

Для слагаемых 2) применяем резольвентное тождество к $G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)$ для кубика $\Lambda_H(t_{r_2 d_2})$ (продолжаем улучшать оценку).

Для слагаемых 3) применяем резольвентное тождество к $G_{\Lambda_H}(t_{r_1 d_1}, t_{r_2 d_2})$ для кубика $\Lambda_H(t_{r_2 d_2})$ (либо к $G_{\Lambda_H}(t_{r_2 d_2}, y)$ для кубика $\Lambda_h(y)$, т.е. идем с другого конца).

Слагаемые 4) можно отнести к группе 1). В самом деле, условие 4) означает, что $(r_1 + d_1) + (r_2 + d_2) \ge |y| - 2h$.

С другой стороны, из определения ξ_{r_i} (см. (22)) следует, что $d_i + \xi_{r_i} r_i \ge d_i + r_i - h^\beta/2$, так что слагаемые 4) оценивается величиной

$$W_H \exp\{ -m_h(|y| - 7h)\}$$

Описанный алгоритм применяем $n = \dfrac{|y|}{h/2}$ раз, оценивая на последнем шаге $| G_{\Lambda_H}(.,.) | \le W_H$. В результате получим (мы обозначили

$$E_{1,\dots,k} = \exp\Big\{ -m_h \sum_{i \le k} (d_i + \xi_{r_i} r_i) \Big\} \exp\Big\{ m_h h^\theta \sum_{i \le k} (\xi_{r_i} r_i + 1) \Big\}):$$

$$| G_{\Lambda_H}(0,y) | \le \sum_{m \le n} \sum_{i \le m} \sum_{r_i, d_i} W_H \exp\{ -m_h(|y| - 3h)\} +$$

$$+\sum_{k<m\le n}\ \sum_{i\le m}\ \sum_{\substack{r_i,d_i\\ t_{r_k d_k}\in\Lambda_{2h}(u)\\ t_{r_m d_m}\in\Lambda_{2h}(u)}} E_{1,\dots,k}\,\big|\,G_{\Lambda_H}(t_{r_k d_k}, t_{r_m d_m})\,\big| + \sum_{i\le n}\ \sum_{\substack{r_i,d_i\\ t_{r_n d_n}\notin\Lambda_{2h}(u)}} E_{1,\dots,n}\,W_H. \tag{28}$$

К первой группе слагаемых суммы (28) отнесены те, которые на m-ом шаге ($m \le n$) попали в "дальнюю" часть полной границы кубика $\Lambda_h(.)$ и оценка которым дана в соответствии с леммами 1 и 2.

Во вторую группу суммы (28) вошли слагаемые, которые на m-ом шаге ($m \le n$) с двух сторон подошли к сингулярному кубику $\Lambda_h(u)$, запрещая следующее применение резольвентного тождества. Покажем, что эти слагаемые уже получили необходимую оценку . В самом деле, поскольку

$$(d_i + \xi_{r_i} r_i) \ge (d_i + r_i) - h^\beta/2$$

и

$$(d_i + r_i) \ge \big|\, t_{r_i d_i} - t_{r_{i-1} d_{i-1}} \big|,$$

то

$$\sum_{i\le m}(d_i + \xi_{r_i} r_i) \ge \sum_{i\le m}(d_i + r_i) - nh^\beta/2 \le |\,y\,| - 2h - h^{\beta-1}\,|\,y\,|.$$

Так как $|\,y\,| \le h^\nu$ и $\beta = 2-\nu$, то $h^{\beta-1}\,|\,y\,| \le h^{\beta+\nu-1} = h$ и

$$\sum_{i\le m}(d_i + \xi_{r_i} r_i) \ge |\,y\,| - 3h. \tag{29}$$

Так как $\theta = 2 - \nu$, из тех же соображений получим

$$h^\theta \sum_{i\le m}(\xi_{r_i} + 1) \le 4h^{\theta-1}|\,y\,| \le 4h. \tag{30}$$

Из неравенств (29) и (30) видно, что каждое слагаемое второй группы из (28) оценивается величиной

$$W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 7h)\}. \tag{31}$$

В третью группу суммы (28) вошли слагаемые, к которым резольвентное тождество применялось на каждом из $n = \dfrac{|\,y\,|}{h/2}$ шагов.

Поскольку $(d_i + \xi_{r_i} r_i) \ge (h - h^\beta)/2$, $\quad \beta = \theta = 2 - \nu$, то

$$\sum_{i\le n}(d_i + \xi_{r_i} r_i) \ge (h - h^\beta)|\,y\,|/h \ge |\,y\,| - h$$

и

$$h^\theta \sum_{i\le n}(\xi_{r_i} + 1) \le 4h.$$

Поэтому каждое слагаемое третьей группы из (28) оценивается величиной

$$W_H \exp\{-m_h(|\,y\,| - 5h)\}. \tag{32}$$

Количество слагаемых в (28) не превышает величины

$$(h^{\nu+1})^n \le h^{6(h)^{\nu-1}} < \exp(h), \tag{33}$$

если h достаточно велико, чтобы выполнялось неравенство

$$6\ln(h) \le h^{2-\nu}. \tag{34}$$

Соотношения (28), (31), (32) и (33) приводят к оценке

$$\left| G_{\Lambda_H(0)}(0,y) \right| \le W_H \exp\{-m_h(|y|-8h)\},$$

если $h > B_3$, а B_3 достаточно велико, чтобы неравенства (16), (24) и (34) выполнялись одновременно. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1.

В случае $\frac{1}{2} l^\gamma \le |y| \le l^\alpha$ применяем лемму 2 для $\nu = \alpha$ и $H = 4l^\alpha$, $h = l$ и $m_h = m_l$.
В случае $\frac{1}{2} l^\gamma \le |y| \le l^{\alpha\gamma}$ применяем лемму 2 для $\nu = \alpha\gamma$, $H = 4h^{(\alpha)^2}$.

Таким образом, соотношения (10a) и (10b) выполняются, если $h > B_1$, а $B_1 = B_1(C,d,m,\alpha)$ достаточно велико, чтобы выполнялись неравенства

$$\left.\begin{array}{l} \exp(m\sqrt{B_1}) \ge Cs(d)B_1^{2d-1} \\ \exp(mB_1^\theta) \ge Cs^2(d)(B_1/2)^{3(d-1)} \\ (B_1)^{(2-\alpha\gamma)} > 6\ln(B_1). \end{array}\right\}. \tag{35}$$

Основу вероятностной части доказательства теоремы 4 составляет лемма 4.

Лемма 4. *Пусть в условиях леммы* 1

$$\operatorname{Prob}\left\{\Lambda_l(r)\ (l^\beta, m_l, E)\text{-регулярен}\right\} \ge 1 - p_l \tag{36a}$$

и

$$\operatorname{Prob}\left\{\Lambda_h(r)\ (h^\beta, m_h, E)\text{-регулярен}\right\} \ge 1 - p_h. \tag{36b}$$

Тогда предположения а) и b) леммы 1 *выполняются с вероятностью, не меньшей чем* $1 - q_L$, *где*

$$q_l = g_0 |\Lambda_{4L}| / W_L + g_0 |\Lambda_l|\, |\Lambda_{4L}| / w_l + g_0 |\Lambda_h|\, |\Lambda_{4L}| / w_h + {}$$
$$+ |\Lambda_{4L}|^2 p_l^2 + |\Lambda_{4L}|^2 p_h^2. \tag{37}$$

Доказательство.

По теореме Вегнера получим, что

$$\operatorname{Prob}\left\{ \left\| G_{\Lambda_{4L}(0)} \right\| \le W_L \right\} \ge 1 - g_0 |\Lambda_{4L}| / W_L,$$

$$\operatorname{Prob}\left\{ \left\| G_{\Lambda_l(r)} \right\| \le w_l \text{ для всех } r \in \Lambda_{4L}(0) \right\} \ge g_0 |\Lambda_l|\, |\Lambda_{4L}| / w_l,$$

$$\mathrm{Prob}\left\{\left\|G_{\Lambda_h(r)}\right\| \le w_h \text{ для всех } r \in \Lambda_{4L}(0)\right\} \ge g_0 \mid \Lambda_h \mid \ \mid \Lambda_{4L} \mid / w_h.$$

Таким образом, предположение *a*) леммы 1 выполняется с вероятностью, которая не меньше чем

$$1 - g_0 \mid \Lambda_{4L} \mid \left\{1/W_L + \mid \Lambda_l \mid / w_l + \mid \Lambda_h \mid / w_h\right\}. \tag{38}$$

Предположим, что условие *b*) леммы 1 не выполняется. Тогда в кубе $\Lambda_{4L}(0)$ есть, по крайней мере, два непересекающихся (l^β, m_l, E)-сингулярных кубика, вероятность чего в силу (26a) не превышает $\mid \Lambda_{4L} \mid^2 p_l^2$. Аналогично, вероятность того, что условие *b*) леммы 2 не выполняется (т.е., не выполняется условие, по которому $\Lambda_{4L}(0)$ содержит два непересекающихся (h^β, m_h, E)-сингулярных кубика), не превышает $\mid \Lambda_{4L} \mid^2 p_h^2$. Таким образом, условие *b*) леммы 2 выполняется с вероятностью не меньшей чем

$$1 - \mid \Lambda_{4L} \mid^2 \left\{p_l^2 + p_h^2\right\}. \tag{39}$$

Теперь (38) и (39) влекут за собой требуемое соотношение (37).

Лемма 5. *Пусть предположения a) и b) леммы* 1 *выполняются с вероятностью не меньшей чем* $1 - q_L$ *и* $h > B_5 = B_5(C,d,m,\alpha)$ *достаточно велико. Тогда для заданного* $m_h \le m_0$ *существуют* m_l *и* m_h *такие, что*

$$\mathrm{Prob}\left\{\Lambda_L(r)\ (L^\beta, m_L, E)\text{-регулярен}\right\} \ge 1 - p_L,$$

где

$$m_L = m_l - \frac{2}{l^\gamma}\left\{M m_l l + \ln\left(W_L + 2W_L^2 C \mid \Lambda_l \mid \ \mid \Lambda_{4L} \mid\right)\right\}. \tag{40a}$$

$$m_l = m_h - \frac{2}{l^\gamma}\left\{M m_h h + \ln\left(W_L + 2W_L^2 C \mid \Lambda_l \mid \ \mid \Lambda_{4L} \mid\right)\right\}, \tag{40b}$$

$$p_L = q_L + g_0 \mid \Lambda_L \mid / W_L.$$

Доказательство.

Пусть $\mid y \mid \le L/2$. Применим резольвентное тождество к $G_{\Lambda_{4L}}(0,y)$ для $\Lambda_L(0)$

$$G_{\Lambda_{4L}}(0,y) = G_{\Lambda_L}(0,y) + \sum_{<t_1,t> \in \partial^*\Lambda_L} G_{\Lambda_{4L}}(0,t)a(t-t_1)G_{\Lambda_L}(t_1,y).$$

Предположим, что $\mid G_{\Lambda_L}(t_1, y) \mid \le W_L$ для всех $t_1 \in \Lambda_L(0)$.

По теореме Вегнера это неравенство выполняется с вероятностью не меньшей чем $1 - g_0 \mid \Lambda_L \mid / W_L$. Далее получим

$$\mid G_{\Lambda_L}(0,y) \mid \le G_{\Lambda_{4L}}(0,y) + W_L \sum_{\substack{<t_1;t> \in \partial^*\Lambda_L \\ |t|<L}} \mid G_{\Lambda_{4L}}(0,t)a(t-t_1) \mid +$$

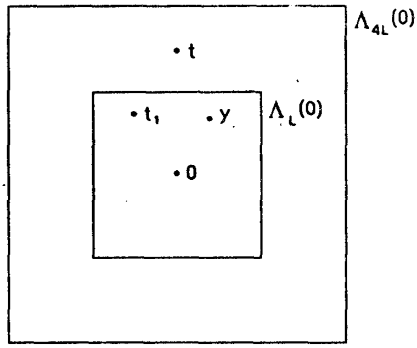

Рис. 3.

$$+ W_L \sum_{\substack{<t_1,t> \in \partial^* \Lambda_L \\ |t|>L}} \left| G_{\Lambda_{4L}}(0,t) a(t-t_1) \right|.$$

По условию, с вероятностью не меньшей чем $1 - q_L$, выполняются предположения леммы 1, т.е. справедливы соотношения (10a) и (10b). Таким образом, имеют место следующие оценки, вероятность которых не меньше $1 - \{ q_L + g_0 \mid \Lambda_L \mid / W_L \}$.

В случае $\frac{1}{2} l^\gamma \le |y| \le \frac{1}{2} L$:

$$\left| G_{\Lambda_L}(0,y) \right| \le W_L \exp\{ -m_l(|y| - Ml) \} + W_L^2 C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right| \times$$
$$\times \exp\{ -m_l(L/2 - Ml) \} + W_L^2 C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right| \exp\{ -m_l(L/2) \le$$
$$\le \exp\{ -m_L |y| \} W_L \left(1 + 2W_L C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right|\right) \times$$
$$\times \exp\{ -(m_l - m_L) l^\gamma/2 + Mm_l l \}; \tag{41}$$

и в случае $\frac{1}{2} h^\gamma \le |y| \le \frac{1}{2} h^{\alpha\gamma}$:

$$\left| G_{\Lambda_L}(0,y) \right| \le W_L \exp\{ -m_h(|y| - Mh) \} + W_L^2 C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right| \times$$
$$\times \exp\{ -m_l(L/2 - Ml) \} + W_L^2 C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right| \exp\{ -m_h(L/2) \} \le$$
$$\le \exp\{ -m_L |y| \} W_L \left(1 + 2W_L C \left| \Lambda_L \right| \left| \Lambda_{4L} \right|\right) \times$$
$$\times \exp\{ -(m_h - m_L) h^\gamma/2 + Mm_h h \}, \tag{42}$$

если $h > B_5$, где

$$B_5 = \max\{ B_1, (2M)^{1/(\alpha(\gamma-1))} \}. \tag{43}$$

(В этом случае заведомо выполняется неравенство

$$\exp\{-m_l(L/2 - Ml)\} \le \exp\{-m_h(|y| - Mh)\}, \text{ если } |y| \le \frac{1}{2}h^{(\alpha\gamma}).$$

При заданном m_h определив m_l и m_L с помощью выражений (40a) и (40b) (так, чтобы коэффициенты при $\exp\{-m_L|y|\}$ в (41) и (42) были равны 1), получим утверждение леммы 5.

Введем следующие обозначения:

$$L_n = L_0^{(\alpha)^n}; \quad W_n = 2^{2d+3} g_0 L_n^{\alpha(p+d)}$$

(при этом $4g_0 \left|\Lambda_{4L_{n+1}}\right| / W_n = \frac{1}{2} L_{n+1}^{-p}$);

$$p_{n+1} = 4g_0 \left|\Lambda_{4L_{n+1}}\right| / W_n + \left|\Lambda_{4L_{n+1}}\right|^2 \left(p_n^2 + p_{n-1}^2\right);$$

$$m_{n+1} = m_n - \frac{2}{L_n^\gamma}\left\{Mm_n L_n + \ln\left(W_{n+1}\left[1 + 2C\left|\Lambda_{L_{n+2}}\right| \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left|\Lambda_{4L_{n+2}}\right| W_{n+1}\right]\right)\right\}.$$

В терминах данных обозначений справедливы следующие леммы.

Лемма 6. *Для заданного $p > 2d$ существуют $\alpha = \alpha(p,d)$ $(1 < \alpha < \sqrt{2})$ и $B_6 = B_6(p,d,\alpha)$ такие, что если для $L_0 > B_6$ и $L_1 = L_0^\alpha$ справедливы неравенства $p_0 \le L_0^{-p}$ и $p_1 \le L_1^{-p}$, то неравенство $p_n \le L_n^{-p}$ имеет место для всех $n \ge 2$.*

Доказательство.

Пусть $p_n \le L_n^{-p}$ и $p_{n-1} \le L_{n-1}^{-p}$. По определению p_n получим

$$p_{n+1} \le \frac{1}{2} L_{n+1}^{-p} + 2L_{n-1}^{-2p} \left|\Lambda_{4L_{n+1}}\right|^2.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$2L_{n-1}^{-2p} \left|\Lambda_{4L_{n+1}}\right|^2 \le \frac{1}{2} L_{n+1}^{-p},$$

которое равносильно неравенству

$$L_{n-1}^{2p-\alpha^2(p+2d)} \ge 2^{4d+2}. \tag{44}$$

Выбрав $\alpha^2 < \dfrac{2p}{p+2d}$ (тогда $1 < \alpha < \sqrt{2}$ при $p > 2d$), получим, что (44), а вместе с ним и требуемое неравенство выполняются для всех n, если $L_0 > B_6$, где

$$B_6 = 2^{(4d+2)/(2p-\alpha^2(p+2d))}. \tag{45}$$

Лемма 7. *Для заданных $p > 2d$, m, m_0 $(0 < m <_0 \le \rho)$ и α $(1 < \alpha < \sqrt{2})$ существует $B_7 = B_7(p,d,m,m_0,\alpha,g_0)$ такое, что если $L_0 > B_7$, то $\lim\limits_{n\to\infty} m_n \ge m$.*

Доказательство.

Так как m_n — убывающая последовательность, то получим

$$m_{n+1} \geq m_n - \frac{2m_0}{L_n^{\gamma-1}}\left\{M + \frac{1}{L_n}\ln\left(W_{n+1}\left[1+2C\mid\Lambda_{L_{n+2}}\mid\mid\Lambda_{4L_{n+2}}\mid W_{n+1}\right]\right)\right\} \geq$$

$$\geq m_n - \frac{2m_0}{L_n^{\gamma-1}}\left\{M + \frac{1}{L_n}\ln\left(C_1 L_n^{2\alpha^2(2d+p)}\right)\right\},$$

где $C_1 = 2^{6d+8}C\max(g_0, g_0^2)$, т.е.

$$m_{n+1} \geq m_n - \frac{2m_0}{L_n^{\gamma-1}}\left\{M + C_1 + 2\alpha^2(p+2d)\frac{\ln(L_n)}{L_n}\right\} \geq m_n - C_2\frac{m_0}{L_n^{\gamma-1}},$$

где $C_2 = 2(M + C_1 + 2\alpha^2(p+2d))$. Далее получим

$$\lim_{n\to\infty} m_n = m_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(m_{n+1} - m_n) \geq m_0\left(1 - C_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L_n^{\gamma-1}}\right). \tag{46}$$

Обозначим $L = L_n^{\gamma-1}$. Будем иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L^{(\alpha)^n}} = \frac{1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L^{(\alpha)^n}} \leq \frac{1}{L} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{L^{(\alpha)^x}} \leq \frac{1}{L} + \frac{1}{\ln(\alpha)\ln(L)L} \leq \frac{2}{L}, \tag{47}$$

если $\ln(L) > 1/\ln(\alpha)$. Выберем L_0 достаточно большим, чтобы $L_0 > B_7$, где

$$B_7 = \max\left(\exp\left\{\frac{1}{(\gamma-1)\ln(\alpha)}\right\}, \left(\frac{2m_0C_2}{m_0 - m}\right)^{1/(\gamma-1)}\right). \tag{48}$$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L_n^{\gamma-1}} \leq \frac{m_0 - m}{m_0C_2}$, а из (46) получим $\lim_{n\to\infty} m_n \geq m$. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 4.

По α, определяемому леммой 6 (см. (44)), выберем

$$B = \max(B_1, B_5, B_6, B_7). \tag{49}$$

(См. (35), (43), (45) и (48)). Тогда, если соотношение (9) выполняется для $L_0 > B$ и $L_1 = L_0^{\alpha}$, из лемм 1, 4 и 5 следует, что для всех n выполняется неравенство

$$\text{Prob}\left\{\Lambda_{L_n}(L_n^{\beta}, m_n, E)\text{-регулярен}\right\} \geq 1 - p_n.$$

Лемма 6 влечет за собой неравенство $p_n \leq L_n^{-p}$, а лемма 7 — неравенство $m_n \geq m$.

Доказательство теоремы 3.

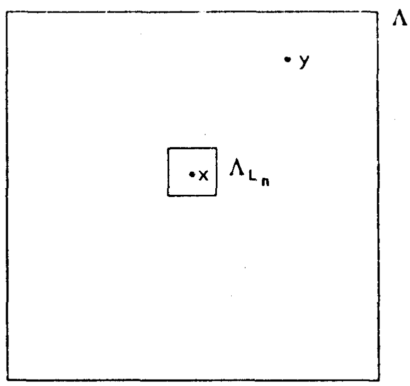

Рис. 4.

Пусть $L_n = L_0^{(\alpha)^n}$, α и β определены так же, как в теореме 4. Выберем $n_l \in N$ так, чтобы $kL_{n_l} \le l < kL_{n_l+1}$ (k зададим позднее). Предположим, что для каждой точки $u \in \Lambda$ кубики $\Lambda_{l_n}(u)$ (L_n^β, m_n, E)-регулярны для всех $n \ge n_l$. По теореме 3 это предположение выполняется с вероятностью не меньшей чем

$$1 - |\Lambda| \sum_{n \ge n_l} L_n^{-p} \ge 1 - 2|\Lambda| L_{n_l}^{-p},$$

если L_0 достаточно велико (см. (47), (49)).

Предположим также, что $\|G_\Lambda\| \le W_\Lambda$. По теореме Вегнера это неравенство выполняется с вероятностью не меньшей чем

$$1 - |\Lambda| g_0 / W_\Lambda .$$

Для x, y таких, что $kL_n \le |x - y| < kL_{n+1}$, $n \ge n_l$, применим лемму 2 (т.е. применяем резольвентное тождество к $G_\Lambda(x,y)$ для кубиков Λ_{L_n}, начиная в x и повторяя рассуждения леммы 2). Получим оценку

$$\left| G_\Lambda(x,y) \right| \le W_\Lambda \exp\Big(-m_0(|x-y| - ML)\Big) \le \exp(-m|x-y|)\times$$
$$\times \exp\Big(-(m_0 - m)|x-y| + m_0 ML_n\Big) W_\Lambda. \tag{50}$$

Положим $W_\Lambda = \exp\big(m_0 L_{n_l}\big)$, $k = (M+1)\dfrac{m_0}{m_0 - m}$. Из (50) получим, что неравенство

$$\left| G_\Lambda(x,y) \right| \le \exp(-m|x-y|)$$

выполняется для всех $x, y \in \Lambda$ таких, что $l \le |x - y| < \operatorname{dist}(x, \partial\Lambda)$, с вероятностью не меньшей чем

$$1 - |\Lambda| \left(2L_{n_l}^{-p} + g_0 \exp(m_0 L_{n_l})\right) \ge 1 - \widetilde{C} |\Lambda| l^{-p/\alpha},$$

где константа $\widetilde{C} = \widetilde{C}(p, m, n_0, g_0) > 0$.

3. Доказательство теоремы 2.

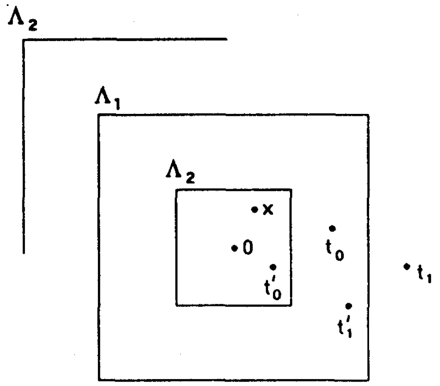

Рис. 5.

Пусть Λ_{B_i}, $i \ge 0$, — последовательность кубов с центром в 0, с ребрами $B_0 = K + 8$, $B_n = 4B_{n-1}$, $n \ge 1$. Предположим, что для всех $i \ge 0$ и всех $\varepsilon \ne 0$

$$\left\| G_{\Lambda_{B_i}}(E + i\varepsilon) \right\| \le \exp\{ mB_i/(2^6) \}, \tag{51}$$

и для всех u, v таких, что $\operatorname{dist}\left(u, \partial\Lambda_{B_i}\right) \ge |u - v| \ge B_i/(2^6)$ выполняется неравенство

$$\sup_{\varepsilon \ne 0} \left| G_{\Lambda_{B_i}}(E + i\varepsilon; u, v) \right| \le \exp(-m(u - v)). \tag{52}$$

Пусть $\varepsilon \ne 0$, $x \in Z^d$. Если $(B_{i-1} - k)/8 < |x| \le (B_i - k)/8$ для некоторого $i \ge 1$, то обозначим $L_0 = B_i$, и далее $L_n = B_{i+n}$, т.е.

$$L_0/32 - k/8 < |x| \le L_0/8 - k/8. \tag{53}$$

Обозначим через Λ_i куб с ребром L_i. Применим резольвентное тождество к $G(E + i\varepsilon; 0, y)$ используя куб Λ_0:

$$G(0,x) = G_{\Lambda_0}(0,x) + \sum_{\langle t_1', t_0 \rangle \in \partial^* \Lambda_0} G_{\Lambda_0}(x, t_0') a(t_0 - t_1') G_{\Lambda_1}(0, t_0) =$$

$$= G_{\Lambda_0}(0,x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{<t_1',t_0> \in \partial^* \Lambda_0 \\ t_0 \in \Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i}} G_{\Lambda_0}(x,t_0')a(t_0 - t_1')G_{\Lambda_1}(0,t_0). \tag{54}$$

Для каждой точки $t_0 \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_0$ применим резольвентное тождество к $G(0,t_0)$, используя куб Λ_1. Из (54) получим:

$$G(0,x) = G_{\Lambda_0}(0,x) + \sum_{\substack{<t_1',t_0> \in \partial^* \Lambda_0 \\ t_0 \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_0}} G_{\Lambda_0}(x,t_0')a(t_0 - t_1')G_{\Lambda_1}(0,t_0) +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{<t_0',t_0>,\, t_0 \in \Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i} G_{\Lambda_0}(x,t_0')a(t_0 - t_0')G(0,t_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{<t_0',t_0>,\, t_0 \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_0 \\ <t_1',t_i>,\, t_1 \in \Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i}} G_{\Lambda_0}(x,t_0')a(t_0 - t_1')G_{\Lambda_1}(t_0 - t_1')a(t_1 - t_1')G(0,t_1) \right\}. \tag{55}$$

Для $t_0 \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_0$ и $t_1 \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ применим резольвентное тождество к $G(0,t_0)$ и $G(0,t_1)$ для кубика Λ_2. Продолжая последовательно применять резольвентное тождество к $G(0,t_k)$ для $t_k \in \Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i$, используя куб Λ_{i+1}, получим

$$|G(0,x)| \leq \left| G_{\Lambda_0}(0,x) \right| + \left| \left[G_{\Lambda_0} \Gamma_0 G_{\Lambda_1} \right](0,x) \right| +$$

$$+ 2 \left| \left[G_{\Lambda_0} \Gamma_0 G_{\Lambda_1} \Gamma_1 G_{\Lambda_2} \right](0,x) \right| + 2^k \left| \left[G_{\Lambda_0} \Gamma_0 G_{\Lambda_1} \ldots G_{\Lambda_k} \Gamma_k G_{\Lambda_{k+1}} \right](0,x) \right| + \ldots, \tag{56}$$

где оператор Γ_i определен следующим образом:

$$\Gamma_i(x,y) = \begin{cases} a(x-y) & \text{если } x \in \Lambda_i,\ y \in \Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. (8), (8a)). Оценим $\left| G_{\Lambda_0}(0,x) \right|$. Предположим, $K \geq L_0/8$, тогда из (53) $x \leq 7K/8$. Из (51) получим

$$\left| G_{\Lambda_0}(0,x) \right| \leq \exp\left\{ mL_0/(2^6) \right\} \leq \exp\{ mK/8 \} \leq \exp\{ m(K - |x|) \}.$$

Предположим, $K < L_0/8$, тогда из (53) $x > L_0/2^6$, используя предположение (52), получим $\left| G_{\Lambda_0}(0,x) \right| \leq \exp\{ -m\,|x| \}$. То есть

$$\left| G_{\Lambda_0}(0,x) \right| \leq \exp\{ m(K - |x|) \} \cdot \tag{57}$$

Найдем оценку для общего члена суммы (56).

$$2^k \left| \left[G_{\Lambda_0} \Gamma_0 G_{\Lambda_1} \dots G_{\Lambda_k} \Gamma_k G_{\Lambda_{k+1}} \right](0,x) \right| =$$

$$= 2^k \sum_{\substack{<t'_i, t_i> \in \partial^* \Lambda_i,\, t_i \in \Lambda_{i+1} \\ i=0,1,\dots,k}} G_{\Lambda_0}(x,t'_0) a(t_0 - t'_0) G_{\Lambda_1}(t_0, t'_1) a(t_1 - t'_1) \times \dots$$

$$\dots \times a(t_{k-1} - t'_{k-1}) G_{\Lambda_k}(t_{k-1}, t'_k) a(t_k - t'_k) G_{\Lambda_{k+1}}(0, t_k). \tag{58}$$

Сначала, рассуждая так же, как при выводе (57), оценим величину

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \left| a(t_0 - t'_0) \right|^{1/2},$$

где t_0 может лежать сколь угодно близко к x. Если $K \ge L_0/8$, из (51) и (53) сразу получим

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \le \exp\{ mL_0/8 \} \le \exp\{ m(K - |x|) \}. \tag{59}$$

Пусть $K < L_0/8$, тогда из (53) $L_0/(2^6) < |x| < L_0/8$. В случае, если $|t'_0 - x| < L_0/8$, то будем иметь:

$$|t'_0| \le |t'_0 - x| + |x| \le L_0/4, \text{ из (51) получим}$$

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \le \exp\left\{ mL_0/(2^6) \right\} \le \exp\{ m((L_0/4) - |x|) \}, \text{ т.е.}$$

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \left| a(t_0 - t'_0) \right|^{1/2} \le C^{1/2} \exp\{ -m|x| \}. \tag{60}$$

В случае, если $|t'_0 - x| \ge L_0/8 > |x|$, используя (52), получим

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \le \exp\{ -m|t'_0 - x| \} \le \exp\{ -m|x| \}. \tag{61}$$

Соотношения (59)-(61) для всех $t'_0 \in \Lambda_0$ влекут за собой оценку

$$\left| G_{\Lambda_0}(x,t'_0) \right| \left| a(t_0 - t'_0) \right|^{1/2} \le C^{1/2} \exp\{ m(K - |x|) \}. \tag{62}$$

Оценим множители вида

$$\left| a(t_{m-1} - t'_{m-1}) \right|^{1/2} \left| G_{\Lambda_m}(t_{m-1}, t'_m) \right| \left| a(t_m - t'_m) \right|^{1/2}, \quad m \ge 1.$$

Пусть

$$|t_{m-1}| - L_{m-1}/2 > L_{m-1}/2. \tag{63}$$

Тогда

$$\left| a(t_{m-1} - t'_{m-1}) \right|^{1/2} \le C^{1/2} \exp\{ -mL_{m-1}/4 \}.$$

В случае, если

$$L_m/2 - |t'_m| > L_{m-1}/2, \tag{64}$$

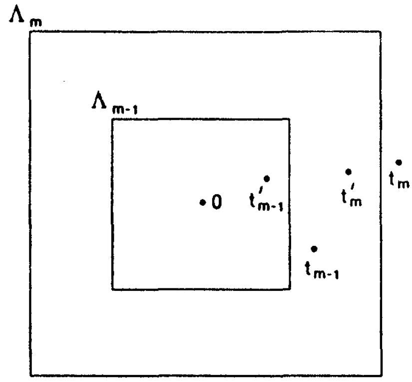

Рис. 6.

то получим $\left| a(t_m - t'_m) \right|^{1/2} \le C^{1/2} \exp\{-mL_{m-1}/4\}$. Если же соотношения (63), (64) не реализуются, то имеет место неравенство

$$| t_{m-1} - t'_{m-1} | \ge L_{m-1}/2 = L_m/8, \tag{65}$$

которое в силу (52) влечет за собой оценку

$$\left| G_{\Lambda_m}(t_{m-1}, t'_m) \right| \le \exp\{-mL_{m-1}/2\}.$$

Таким образом, во всех случаях (63)-(65) для любых $t_{m-1}, t'_m \in \Lambda_m \backslash \Lambda_{m-1}$ получим оценку

$$\begin{aligned} \left| a(t_{m-1} - t'_{m-1}) \right|^{1/2} \left| G_{\Lambda_m}(t_{m-1}, t'_m) \right| \left| a(t_m - t'_m) \right|^{1/2} \le \\ \le C \exp\{-mL_{m-1}/8\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Наконец, дадим оценку последнему множителю в (58). Эта оценка в силу (52) будет иметь вид

$$\left| G_{\Lambda_{k+1}}(0, t_k) \right| \le \exp\{-mL_k/2\}, \tag{67}$$

так как $| t_k | \ge L_k/2$.

Неравенства (62), (66) и (67) позволяют получить оценку для (58):

$$\begin{aligned} \left| 2^k \left[G_{\Lambda_0} \Gamma_0 G_{\Lambda_1} \dots G_{\Lambda_k} \Gamma_k G_{\Lambda_{k+1}} \right](0,x) \right| \le \\ \exp\{-m(K - |x|)\} \sum_{\substack{<t'_i, t_i> \in \partial^* \Lambda_i \\ t_i \in \Lambda_{i+1} \\ i = 0,1,\dots,k}} \prod_{0 \le j \le k} 2C \exp\{-mL_j/8\} \le \\ \le \exp\{-m(K - |x|)\} \prod_{0 \le j \le k} \exp\{-mL_j/8\} \, 2^{2d+1} C L_j^{2d}. \end{aligned} \tag{68}$$

Из (68) следует, что если B_0 достаточно велико, чтобы

$$C2^{2d+1}B_0^{2d} \le \exp\{ mB_0/16 \} \tag{69}$$

($L_0 > B_0$, так что (69) будет выполнено для всех L_i), то общий член разложения резольвенты (57) оценивается величиной

$$\exp\{ m(K - |x|) \} \prod_{0 \le j \le k} \exp\{ -mL_j/16 \}. \tag{70}$$

Из (56), (57) и (70) получим

$$|G(0,x)| \le \exp\{ m(K - |x|) \} \left(\sum_{k \ge 0} \prod_{0 \le j \le k} \exp\{ -mL_j/16 \} + 1 \right). \tag{71}$$

Нетрудно показать, что для $L_0 \ge 12/(m \ln(4))$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \ge 0} \prod_{0 \le j \le k} \exp\{ -mL_j/16 \} \le 2\exp\{ -mL_0/16 \},$$

так что если $\exp\{ -mL_0/16 \} \le 1/2$, то (71) влечет за собой

$$|G(0,x)| \le \exp\{ m(K - |x|) \}. \tag{72}$$

Выберем K_0 достаточно большим, чтобы величина $B_0 = K_0 + 8$ удовлетворяла неравенству (69), а также условиям теоремы 4 (см.(49)). По теореме Вегнера предположение (51) выполняется с вероятностью не меньшей чем

$$1-g_0\sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda_{B_i}| \exp\{ -mB_i/(2^6) \} \ge 1-\widetilde{D}_1 \sum_{i=0}^{\infty} B_i^{-(p/\sqrt{2}-d)} \ge 1 - \widetilde{D}_1 B_0^{-(p/\sqrt{2}-d)}. \tag{73}$$

По теореме 3 предположение (52) выполняется с вероятностью не меньшей чем

$$1 - \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{C} |\Lambda_{B_i}| \left(B_i/(2^6)\right)^{-p/\sqrt{2}} \ge 1 - \widetilde{D}_2 B_0^{-(p/\sqrt{2}-d)}. \tag{74}$$

Из (73) и (74) следует, что при каждом $K \ge K_0$ неравенство (72) выполняется для всех $\varepsilon \ne 0$, $x \in Z^d$ с вероятностью не меньшей чем

$$1 - DK^{-(p/\sqrt{2}-d)},$$

где константа D зависит только от p, m_0, m d и распределения g. Теорема 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты (т.е. чисто точечный спектр и соответствующее убывание собственных функций) получены тем же методом и для оператора с более слабыми условиями на убывание матричных элементов, а именно, в случае

$$|a_0(x - y)| \le C\exp(-\rho |x - y|^{\varepsilon}), \ \varepsilon > 0.$$

Автор благодарит профессора Л. А. Пастура за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *J. Fröhlich and T. Spencer*, Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy.— Comm. Math. Phys. (1983), v. 88, p. 151–184.
2. *F. Martinelli, and E. Scoppola*, Remark on the absence of absolutely continuous spectrum in the Anderson model for large disorder or low energy.— Comm. Math. Phys. (1985), v. 97, p. 465–471.
3. *J. Fröhlich, F. Martinelly, E. Scoppola, and T. Spencer*, Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model.— Comm. Math. Phys. (1985), v. 101, p. 21–46.
4. *F. Delyon, T. Levi, and B. Souillard*, Anderson localization for one and quasi one-dimensional systems.— J. Stat. Phys. (1985), v. 41, p. 375–388.
5. *B. Simon and T. Wolff*, Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians.— Comm. Pure. Appl. Math. (1986), v. 39, p. 75–90.
6. *H. von Dreifus*, On the effects of randomness in ferromagnetic models and Schrödinger operators.— Ph. D. thesis, (1987), New York University.
7. *T. Spencer*, Localization for random and quasi-periodic potentials.— J.Stat. Phys. (1988), v. 51, p. 1009–1021.
8. *J. Chayes and L. Chayes*, In critical Phenomena, Random Systems and Gauge Theories. Ed. by K. Osterwalder and R. Stora, eds. North Holland 1986.
9. *W.-M. Wang*, Exponential decay of Green's functions for a class of Long Range Hamiltonians.— Comm. Math. Phys. (1991), v. 136, N 1, p. 35–43.
10. *В. А. Кошовец*, Об унитарном аналоге модели Андерсона: чисто точечный спектр.— Теор. мат. физ. (1991), v. 89, № 3, с. 337–365.
11. *В. Гриншпун*, Точечный спектр случайного оператора бесконечного порядка, действующего в $l^2(Z^d)$.— Докл. АН Украины, (1992), N 8, с.18–21.
12. *L. Pastur*, Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation.— Comm. Math. Phys. (1980), v. 75, p. 179–196.
13. *W. Kirsch and F. Martinelly*, On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential.— J. Phys. (1982), N 15, p. 2139–2156.
14. *F. Wegner*, Bounds on the density of states in disordered systems.— J. Phys. (1981), v. 44, p. 9–15.
15. *Л. А. Пастур, А. Л. Фиготин*, Случайные и почти периодические самосопряженные операторы, т. 1. Наука, Москва, (1991), 336 с.
16. *H. von Dreifus and A. Klein*, A new proof of localization in the Anderson tight binding model.— Comm. Math. Phys. (1989), v. 24, p. 285–301.

Exponential localization of finite-difference infinite-order operator with random potential

V. Z. Grinshpun

The finite-difference infinite-order operator with random potential (independent identically distributed random variables) is considered. It is proved that this operator has a purely point spectrum either at the entire spectrum for sufficiently high disorder or at the edges of the spectrum for any disorder. The corresponding eigenfunctions decay exponentially at infinity.