Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 450–453

УДК 514

Обобщение неравенств Боннезена в геометрии Минковского

В. И. Дискант

Черкасский инженерно-технологический институт, Украина, 257006, г. Черкассы, ул. Шевченко, 460

Статья поступила в редакцию 23 января 1994 г.

Получены следующие уточнения изопериметрического неравенства в n-мерном пространстве Минковского M^n $(n \geq 2)$:

$$F_B^{n/(n-1)}(A) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(A) \geq \left(F_B^{1/(n-1)}(A) - (nV_B(I))^{1/(n-1)} q\right)^n,$$

$$F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq \left(F_B(A) - \frac{n}{Q} V_B(A)\right)^n,$$

где B — нормирующее тело M^n; I — изопериметрикс M^n; A — выпуклое тело в M^n; $F_B(A)$ — площадь поверхности, $V_B(A)$ — объем тела A в M^n; q — коэффициент вместимости тела I в тело A; Q — коэффициент охвата тела A телом I.

Одержано такі уточнення ізопериметричної нерівності в n-вимірному просторі Мінковського M^n $(n \geq 2)$:

$$F_B^{n/(n-1)}(A) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(A) \geq \left(F_B^{1/(n-1)}(A) - (nV_B(I))^{1/(n-1)} q\right)^n,$$

$$F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq \left(F_B(A) - \frac{n}{Q} V_B(A)\right)^n,$$

де B — нормуюче тіло простору M^n; I — ізопериметрикс M^n, A — опукле тіло в M^n; $F_B(A)$ — площа поверхні, $V_B(A)$ — об'єм тіла A в M^n; q — коефіцієнт місткості тіла I в тіло A; Q — коефіцієнт охоплення тіла A тілом I.

В настоящей работе под выпуклым телом в n-мерном евклидовом пространстве R^n и n-мерном пространстве Минковского M^n $(n \geq 2)$ [1] будем понимать замкнутое, ограниченное, выпуклое множество пространства $R^n(M^n)$. В случае, если выпуклое тело имеет внутренние точки, оно будет называться собственным.

Классическое изопериметрическое неравенство для выпуклого тела A в R^n имеет вид

$$F^n - n^n v_n V^{n-1} \geq 0, \tag{1}$$

в котором $F = F(A)$ — площадь поверхности; $V = V(A)$ — объем тела A; v_n — объем единичного шара E в R^n. В случае $n = 2$ неравенство (1) запишется в виде $l^2 - 4\pi S \geq 0$, где l — периметр, S — площадь выпуклой фигуры A в R^2.

Изопериметрическое неравенство для выпуклого тела A в M^n с симметричной метрикой имеет вид [1]

$$F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq 0, \tag{2}$$

в котором B — нормирующее тело пространства M^n; I — изопериметрикс пространства M^n; $F_B(A)$ — площадь поверхности тела A в M^n; $V_B(I)$, $V_B(A)$ — объемы тел I и A в M^n.

Для классического изопериметрического неравенства (1) был получен ряд уточнений. Так, Боннезен [2] в случае $n = 2$ доказал неравенства

$$l^2 - 4\pi S \geq (l - 2\pi r)^2, \tag{3}$$

$$l^2 - 4\pi S \geq (2\pi R - l)^2, \tag{4}$$

в которых r — радиус максимального, вписанного в A, круга; R — радиус минимального, описанного около A, круга.

Дингхас [3] обобщил неравенство (3) для любого $n \geq 2$ в виде

$$F^{n/(n-1)} - (n^n v_n)^{1/(n-1)} V \geq \left(F^{1/(n-1)} - r(nv_n)^{1/(n-1)}\right)^n. \tag{5}$$

В настоящей работе будут доказаны следующие уточнения изопериметрического неравенства (2) в M^n:

$$F_B^{n/(n-1)}(A) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(A) \geq \left(F_B^{1/(n-1)}(A) - (nV_B(I))^{1/(n-1)} q\right)^n, \tag{6}$$

$$F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq \left(F_B(A) - \frac{nV_B(A)}{Q}\right)^n, \tag{7}$$

в которых $q = q(A,I)$ — коэффициент вместимости тела I в тело A, т.е. наибольшее из чисел α, для которых тело αI параллельным сдвигом помещается в A, $Q = Q(A,I)$ — коэффициент охвата тела A телом I, т.е. наименьшее из чисел β, для которых тело A параллельным сдвигом помещается в тело βI.

Неравенство (6) является обобщением неравенства Дингхаса (5), а следовательно, и неравенства Боннезена (3), на случай пространства M^n. Неравенство (7) обобщает неравенство Боннезена (4) на случай M^n.

Неравенства Боннезена (3) и (4) можно записать в виде

$$rl \geq S + \pi r^2, \tag{8}$$

$$Rl \geq S + \pi R^2. \tag{9}$$

Виллс [4] предположил, что для собственного тела A в R^n в случае $n \geq 3$ неравенство (8) допускает обобщение в виде

$$rF \geq V + (n-1)V_i, \tag{10}$$

где V_i — объем шара, вписанного в A. Герц [5] доказал, что при условии

$$\frac{V_i}{V} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^n}$$

такое обобщение имеет место. В этой же работе Герц на примере тела, близкого к отрезку, показал, что неравенство $RF \geq V + (n-1)V_u$, обобщающее (9), в котором V_u — объем описанного около A шара, при $n \geq 3$ не имеет места.

В настоящей работе будет показано, что неравенства

$$qF_B(A) \geq V_B(A) + (n-1)V_B(qI), \tag{11}$$

$$QF_B(A)(QF_B(A)/(nV_B(A)))^{n-2} \geq (n-1)V_B(A) + V_B(QI) \tag{12}$$

являются алгебраическими следствиями неравенств (6) и (7).

Неравенство (11) в случае $M^n = R^n$, $B = E$ совпадает с неравенством (10). Следовательно, (11) — обобщение (10) на случай пространства M^n, и (10) справедливо без каких-либо ограничений.

Неравенство (12) в случае $M^n = R^n$, $B = E$, $n = 2$ совпадает с (9). Следовательно, (12) — обобщение (9) на случай пространства M^n.

Доказательство неравенств (6) и (7). Пусть A и C — выпуклые тела в R^n. Относительное изопериметрическое неравенство Минковского [6] для тел A и C в R^n имеет вид

$$V_1^n(A,C) - V^{n-1}(A)V(C) \geq 0, \tag{13}$$

где

$V_1(A,C) = \frac{1}{n} \lim_{\lambda \to +0} \frac{V(A+\lambda C) - V(A)}{\lambda}$ — первый смешанный объем тел A и C в R^n [7].

В работе [8] для собственных тел A и C в R^n были получены следующие уточнения неравенства (13):

$$V_1^{n/(n-1)}(A,C) - V^{1/(n-1)}(C)V(A) \geq \left(V_1^{1/(n-1)}(A,C) - qV^{1/(n-1)}(C)\right)^n, \tag{14}$$

$$V_1^n(A,C) - V(C)V^{n-1}(A) \geq \left(V_1(A,C) - \frac{1}{Q}V(A)\right)^n, \tag{15}$$

в которых $q = q(A,C)$, $Q = Q(A,C)$.

Пусть теперь A^n — n-мерное аффинное пространство, B — собственное центрально симметричное выпуклое тело пространства A^n, имеющее начало координат — точку $\bar{o}$ — своим центром симметрии. Будем считать, что пространство Минковского M^n получено из A^n введением в A^n метрики Минковского с помощью пары $(B,\bar{o})$. Рассмотрим присоединенное к M^n евклидово пространство R^n, которое получается из A^n введением в A^n скалярного произведения с помощью положительно определенной симметричной билинейной формы. При этом будем предполагать, что в R^n выполнено условие $V(B) = v_n$. Тогда (при выполнении условия $V(B) = v_n$) для любого выпуклого тела A в M^n объем $V(A)$ тела A в R^n совпадает с объемом $V_B(A)$ тела A в M^n, а площадь поверхности $F_B(A)$ тела A в M^n определяется равенством $F_B(A) = nV_1(A,I)$, где I — изопериметрикс пространства M^n, $V_1(A,I)$ — первый смешанный объем тел A и I в R^n [1].

Полагая в (14) $C = I$ и учитывая, что

$$nV_1(A,I) = F_B(A), \qquad V(I) = V_B(I), \qquad V(A) = V_B(A)$$

и $q = q(A,I)$ не зависит от выбора присоединенного пространства R^n, придем к неравенству (6).

Уточнение (7) получается из (15), если в (15) положить $C = I$. Отметим, что величина $Q = Q(A,I)$ не зависит от выбора присоединенного к M^n пространства R^n.

Доказательство неравенств (11) и (12). Покажем, что неравенство (11) является алгебраическим следствием неравенства (6). Для этого рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = (x-a)^n - x^n + nx^{n-1}a$, $a > 0$, $n \ge 2$. В работе [9] показано, что $\varphi_{n_1}(x)$ возрастает на промежутке $[a,\infty)$. Положим $x = F_B^{1/(n-1)}(A)$, $a = (nV_B(I))^{1/(n-1)}q$. Не умаляя общности, можем считать, что $qI \subset A$. Из этого включения следует, что

$$F_B^{1/(n-1)}(A) = n^{1/(n-1)}V_1^{1/(n-1)}(A,I) \ge n^{1/(n-1)}V_1(qI,I) =$$
$$= qn^{1/(n-1)}V^{1/(n-1)}(I) = q(nV_B(I))^{1/(n-1)},$$

т.е. $x \ge a$. Поэтому правая часть в (6) допускает следующую оценку снизу:

$$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}a + \varphi_n(x) \ge x^n - nx^{n-1}a + \varphi_n(a) = x^n - nx^{n-1}a + (n-1)a^n =$$
$$= F_B^{n/(n-1)}(A) - nF_B(A)(nV_B(I))^{1/(n-1)}q + (n-1)(nV_B(I))^{n/(n-1)}q^n.$$

Заменяя правую часть в (6) этой оценкой и сокращая полученное неравенство на $n(nV_B(I))^{1/(n-1)}$, придем к неравенству (11). Неравенство (12) получается из неравенства (7) аналогично.

Список литературы

1. *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985), 336 с.
2. *T. Bonnesen*, Les problémes des isopérimetres et des isepiphanes. Paris (1929), 175 p.
3. *A. Dinghas*, Bemerkung zu einer Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger.— Math. Nachr. (1948), v. 1, p. 284—286.
4. *J. M. Wills*, Zum Verhältnis von Volumen zu Oberflache bei konvexen Körpern.— Arch. Math. (1970), v. 21, N 5, p. 557—560.
5. *B. Herz*, Über die Willsche Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bonnesen.— Monatsh. Math. (1971), Bd. 75, № 4, S. 316—319.
6. *H. Minkowski*, Volumen und Oberfläche.— Ges. Abhandlungen, Leipzig-Berlin (1911) Bd. 2, S. 230—276.
7. *T. Bonnesen, W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin (1934).
8. *В. И. Дискант*, Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел.— Тр. ин-та мат. СО АН СССР (1989), т. 14, с. 98—132.
9. *В. И. Дискант*, Обобщение неравенств Боннезена.— Докл. АН СССР (1973), т. 213, N 3, с. 519—521.

Generalization of the Bonnezen inequalities in the Minkowski geometry

V. I. Diskant

The following more precise definitions of isoperimeter inequality in the n-dimensional Minkowski space M^n ($n \ge 2$) are obtained:

$$F_B^{n/(n-1)}(A) - (n^nV_B(I))^{1/(n-1)}V_B(A) \ge \left(F_B^{1/(n-1)}(A) - (nV_B(I))^{1/(n-1)}q\right)^n,$$
$$F_B^n(A) - n^nV_B(I)V_B^{n-1}(A) \ge \left(F_B(A) - \frac{n}{Q}V_B(A)\right)^n,$$

where B — is a normalizing body of M^n; I — isoperimetrix of M^n; A — a convex body in M^n; $F_B(A)$ — a surface area; $V_B(A)$ — a volume of a body A in M^n; q — a capacity coefficient of a body I in a body A; Q — a scope coefficient of a body A by a body I.