

## Вопрос о наиболее короткой пространственной кривой единичной ширины

В. А. Залгаллер

Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова, Россия, 191011,  
г. Санкт-Петербург, Фонтанка, 27

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

Высказывается гипотеза о форме наиболее короткой пространственной кривой единичной ширины. Отдельно рассматриваются случаи замкнутой и незамкнутой кривых. Гипотезы подтверждаются геометрическими доказательствами и компьютерным анализом.

Висловлюються гіпотези про форму найбільш короткої просторової кривої одиничної ширини. Окремо розглядаються випадки замкненої та незамкненої кривих. Гіпотези підтверджуються геометричними доказами та комп'ютерним аналізом.

1. Ширина пространственной кривой — это ширина ее выпуклой оболочки. Класс кривых в  $\mathbb{R}^3$  ограниченной ширины 1 непуст и компактен, поэтому в нем существует хотя бы одна кривая наименьшей длины. Мы ставим вопрос о нахождении такой кривой и высказываем гипотезу о ее форме. Для плоских кривых соответствующий вопрос давно решен (см. [1] или [2]).

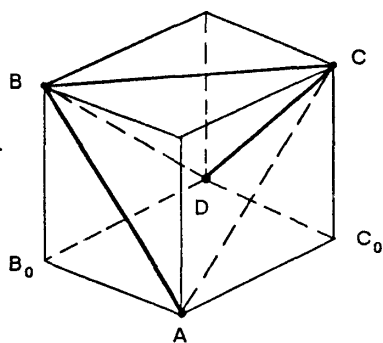


Рис. 1.

2. Рассмотрим единичный куб (рис. 1). Трехзвенная ломаная  $L_1 = ABCD$  дает пример кривой конечной длины и ширины 1. (Выпуклой оболочкой для  $L_1$  служит правильный тетраэдр ширины 1.) Длина  $|L_1| = 3\sqrt{2} \approx 4,2464$ .

3. Нам придется иметь дело только с кусочно  $C^1$ -гладкими кривыми. Пусть  $L$  — такая кривая и  $\Phi$  — ее выпуклая оболочка. Каждая опорная к  $\Phi$  плоскость имеет контакт с  $L$ . Точки на поверхности тела  $\Phi$  могут быть коническими, ребристыми или гладкими. Ребристыми могут быть только точки самой кривой  $L$  или отрезков, соединяющих пары угловых точек кривой  $L$ . Чтобы проверить, что  $\Phi$  имеет ширину не меньше 1, достаточно убедиться в том, что для каждой опорной к  $\Phi$  плоскости  $P$ , проходящей через ребристую точку поверхности  $\Phi$ , существует точка  $x \in L$ , удаленная от  $P$  не менее чем на 1.

Для ломаной  $L_1$  такая проверка тривиальна.

4. Будем искать более короткую, чем  $L_1$ , кривую ширины 1 сначала на следующем пути. Назначим три вещественных числа, которые удовлетворяют шести условиям:

$$a > \frac{1}{2}; \quad b < \frac{1}{4a}; \quad c < 1; \quad (1)-(3)$$

$$c^2 + t^2 \geq 1, \quad \text{где } t = (a - b) / \sqrt{4a^2 - 1}; \quad (4)$$

$$4a^2(c^2 + t^2) > (a + b)^2 + c^2 + t^2; \quad (5)$$

$$4(a^2t^2 + b^2c^2 + c^2t^2) > (a + b)^2 + c^2 + t^2. \quad (6)$$

Затем в декартовых координатах  $(x, y, z)$  выберем четыре точки:

$$A(a, 0, 0), \quad B(-b, -t, c), \quad C(b, t, c), \quad D(-a, 0, 0). \quad (7)$$

В проекции на плоскость  $z = 0$  эти точки образуют параллелограмм с вершинами

$$A(a, 0, 0), \quad B_0(-b, -t, 0), \quad C_0(b, t, 0), \quad D(-a, 0, 0).$$

Выбор  $t$  обеспечивает, что стороны  $AC_0$  и  $DB_0$  этого параллелограмма удалены от начала координат на  $1/2$  и друг от друга на 1, а стороны  $AB_0$  и  $DC_0$  удалены друг от друга на расстояние

$$d = \frac{|[B_0A \times B_0D]|}{|B_0D|} = \frac{2at}{\sqrt{(a+b)^2 + t^2}} < 1. \quad (8)$$

Найдем еще расстояния  $d_1, d_2$  точек  $A$  и  $B$  до прямой  $DC$ :

$$d_1 = \frac{|[DA \times DC]|}{|DC|} = \frac{2a\sqrt{c^2 + t^2}}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2 + t^2}},$$

$$d_2 = \frac{|[DB \times DC]|}{|DC|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 + b^2c^2 + c^2t^2}}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2 + t^2}}.$$

В соответствии с условиями (5) и (6),  $d_1 > 1, d_2 > 1$ .

5. Рассмотрим в пространстве три круговых цилиндра  $Z_1, Z_2, Z_3$  с радиусами, равными 1. Осями этих цилиндров являются соответственно прямые  $AB, AD, DC$ , где  $A, B, C, D$  — точки (7). Кривую  $L_2(a, b, c)$  составим из трех  $C^1$ -гладких участков  $\overset{\frown}{AB}$ ,  $\overset{\frown}{BC}$ ,  $\overset{\frown}{CD}$ . Участок  $\overset{\frown}{AB}$  строим как кратчайшую среди линий, соединяющих точки  $A$  и  $B$  и охватывающих извне цилиндр  $Z_3$ . Эта кратчайшая "натягивается" на  $Z_3$  и поэтому состоит из некоторого отрезка  $AP_1$ , дуги  $P_1\overset{\frown}{Q_1}$  винтовой линии на  $Z_3$  и отрезка  $Q_1B$ .

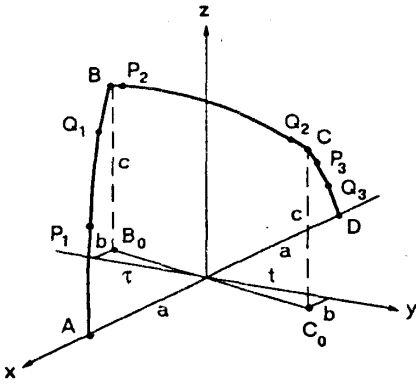


Рис. 2.

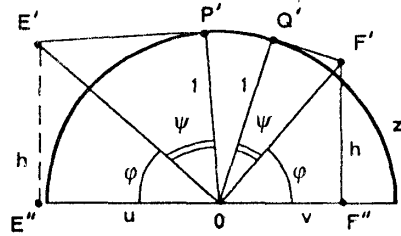


Рис. 3.

Аналогично, участок  $\widehat{BC} = BP_2 + P_2\widehat{Q_2} + Q_2C$  — кратчайшая среди соединяющих  $B$  и  $C$  линий, огибающих извне цилиндр  $Z_2$ . Здесь  $BP_2, Q_2C$  — отрезки, а  $P_2\widehat{Q_2}$  — дуга винтовой линии на  $Z_2$ . Наконец, участок  $\widehat{CD} = CP_3 + P_3\widehat{Q_3} + Q_3D$  симметричен участку  $\widehat{AB}$  относительно оси координат  $z$ . Примерный вид кривой  $L_2(a, b, c)$  изображен на рис. 2.

Мы вычислим длину кривых и минимизируем ее за счет выбора значений  $a, b, c$ .

6. Чтобы находить длины участков интересующего нас типа, рассмотрим ситуацию, когда по бокам от кругового цилиндра  $Z$  радиуса 1 расположены точки  $E$  и  $F$ , положение которых относительно  $Z$  в проекции на плоскость поперечного сечения (рис. 3) задаются величинами

$$h = E'E'' = F'F'', \quad u = OE'', \quad v = OF'', \quad (h < 1, \quad h^2 + u^2 \geq 1, \quad h^2 + v^2 \geq 1),$$

а проекции точек  $E$  и  $F$  на ось цилиндра  $Z$  удалены вдоль этой оси на  $w$ . В этом случае при тех обозначениях, которые понятны из рис. 3, имеем:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{h}{u}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{h}{v}, \quad \psi_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{h^2 + u^2}},$$

$$\psi_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt{h^2 + v^2}}, \quad p = P'Q' = \pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2, \tag{9}$$

$$p_1 = E'P' = \sqrt{h^2 + u^2 - 1}, \quad p_2 = Q'F' = \sqrt{h^2 + v^2 - 1}.$$

Из развертки (рис. 4) цилиндра над плоской линией  $E'P'Q'F'$  (рис. 3) находим длину  $l(h, u, v, w)$  пространственной кривой, которая соединяет точки  $E$  и  $F$ , огибая извне цилиндр  $Z$ :

$$l(h, u, v, w) = \sqrt{(p_1 + p + p_2)^2 + w^2}. \tag{10}$$

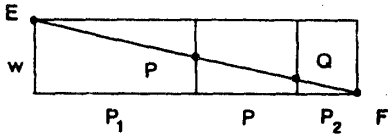


Рис. 4.

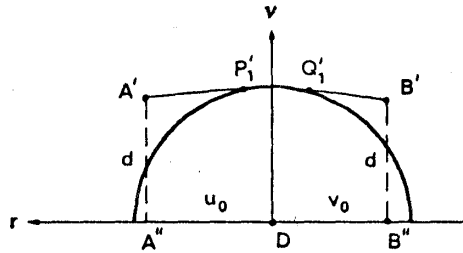


Рис. 5.

7. Особенно просто находится длина  $l_2$  участка  $\widehat{BC}$ . В этом случае  $h = c$ ,  $u = v = t$ ,  $w = 2b$ , откуда

$$l_2 = l(c, t, t, 2b). \quad (11)$$

8. Чтобы найти длину  $l_1$  участка  $\widehat{AB}$ , проведем через точки  $DCC_0$  плоскость  $\tau$  и рассмотрим изображенную на рис. 5 проекцию на проходящую через точку  $D$  плоскость поперечного сечения цилиндра  $Z_3$ . Здесь  $A'A'' = B'B'' = d$  (см. (8)).

Обозначим через  $\nu$  вектор нормали плоскости  $\tau$ .

$$\nu = \frac{1}{2c} [\overline{BA} \times \overline{DC}] = (t, -(a+b), 0).$$

Тогда вектор

$$r = \frac{1}{c} [\overline{DC} \times \nu] = (a+b, t, -s),$$

где  $s = \frac{(a+b)^2 + t^2}{c}$  будет направляющим вектором прямой, лежащей в плоскости  $\tau$  и ортогональной  $\overline{DC}$ . Величина проекции вектора  $\overline{DA}$  на направление  $r$  даст нам значение  $u_0 = DA''$  (рис. 5)

$$u_0 = \frac{\overline{DA} \cdot r}{|r|} = \frac{2a(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2 + t^2 + s^2}}. \quad (12)$$

Аналогично,

$$v_0 = DB'' = \frac{\overline{BD} \cdot r}{|r|} = \frac{2(b^2 + ab + t^2)}{\sqrt{(a+b)^2 + t^2 + s^2}}. \quad (13)$$

Наконец,

$$w_0 = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{DC}}{|\overline{DC}|} = \frac{(a+b)^2 - c^2 + t^2}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2 + t^2}},$$

и длина участка  $\widehat{AB}$

$$l_1 = l(d, u_0, v_0, w_0).$$

9. Общая длина  $|L_2(a, b, c)| = 2l_1 + l_2$ .

Как показывает компьютерный анализ, длина  $|L_2(a, b, c)|$  при допустимых  $a, b, c$  достигает наименьшего значения в точке  $(a_2, b_2, c_2)$ , где

$$a_2 \approx 0,77925, \quad b_2 \approx 0,04223, \quad c_2 \approx 0,78744.*$$

Кривая  $L_2 = L_2(a_2, b_2, c_2)$  имеет длину  $|L_2| \approx 3,934255$ .

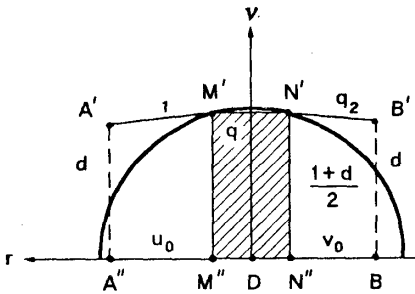


Рис. 6.

10. Теперь кривую  $L_2$  можно заменить более короткой кривой. Поскольку расстояние  $d$  между параллельными плоскостями  $ABB_0$  и  $DCC_0$  (см. рис. 2) согласно (8), меньше 1, то построение участка  $\widehat{AB}$  кривых  $L_2(a, b, c)$  изменим следующим образом: будем охватывать извне не цилиндр  $Z_3$ , а тот же цилиндр, но "стесанный" плоскостью, идущей параллельно плоскости  $\tau$  на расстоянии  $(1 + d)/2$  от плоскости  $\tau$ . Тогда рис. 5

заменится на рис. 6. Проекция кратчайшей  $\widehat{AB}$ , охватывающей стесанный цилиндр, на плоскость поперечного сечения цилиндра (рис. 6) будет ломаной  $A'M'N'B'$ , натянутой на заштрихованный на рис. 6 прямоугольник  $M''M'N'N''$ , где

$$DM'' = DN'' = \sqrt{DN'^2 - N'N''^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2d - d^2}. \quad (15)$$

11. Рассмотрим кривые  $L_3(a, b, c)$ , у которых участок  $\widehat{BC}$  строится так же, как и у  $L_2(a, b, c)$ , а участок  $\widehat{AB}$  является кратчайшей трехзвенной ломаной  $AMNB$ , охватывающей извне не цилиндр  $Z_3$  и даже не стесанный цилиндр, а лишь продольный брус с поперечным сечением в виде прямоугольника  $M''M'N'N''$  (рис. 6).

Для нахождения длины  $l_3$  такого участка  $\widehat{AB}$  последовательно находим

$$q = M'N' = \sqrt{3 - 2d - d^2}, \quad q_1 = A'M' = \sqrt{\left(\frac{1-d}{2}\right)^2 + \left(u_0 - \frac{q}{2}\right)^2},$$

$$q_2 = N'B' = \sqrt{\left(\frac{1-d}{2}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{q}{2}\right)^2}, \quad l_3 = \sqrt{(q_1 + q + q_2)^2 + w_0^2},$$

где значения  $d, u_0, v_0, w_0$  определяются из (8), (12), (13), (14).

\* При этом  $c^2 + t^2 \approx 1,0002$ , так что на участке  $\widehat{BC}$  отрезки  $BP_2$  и  $Q_2C$  весьма короткие, но не нулевые.

12. Общая длина  $|L_3(a, b, c)| = 2l_3 + l_2$ .

Как показывает компьютерный анализ, длина  $|L_3(a, b, c)|$  при допустимых  $a, b, c$  достигает наименьшего значения в точке  $(a_3, b_3, c_3)$ , где

$$a_3 \approx 0,761337, \quad b_3 \approx 0,064738, \quad c_3 \approx 0,794.982.$$

13. Гипотеза 1. Мы предполагаем, что кривая  $L_3 = L_3(a_3, b_3, c_3)$  является наиболее короткой пространственной кривой ширины 1 в  $\mathbb{R}^3$ .

14. При указанных значениях  $a_3, b_3, c_3$  имеем  $t \approx 0,606648, d \approx 0,901284$ . Для участка  $\widehat{BC}$   $\varphi_1 = \varphi_2 \approx 0,918966, \psi_1 = \psi_2 \approx 0,004276, p_1 = p_2 \approx 0,004276, p \approx 1,295109, l_2 \approx 1,310075, BP_2 = Q_2 C = l_2 p_1 / (p_1 + p + p_2) \approx 0,004297$ .

Для участка  $\widehat{AB}$

$$u_0 \approx 0,752203, \quad v_0 \approx 0,504123, \quad w_0 \approx 0,322590, \quad q_1 \approx 0,444661, \quad q \approx 0,200019,$$

$$q_2 \approx 0,620578, \quad l_3 \approx 1,305735. \quad \text{Общая длина } |L_3| = 2l_3 + l_2 \approx 3,921545.$$

При этих данных в условиях рис. 6 углы  $\angle DM'A'$  и  $\angle DN'B'$  больше  $\pi/2$ . Поэтому кривая  $L_3$ , огибая брус с сечением  $M''M'N'N''$ , огибает и стесанный по  $M'N'$  цилиндр  $Z_3$ . Это позволяет проверить, что ширина кривой  $L_3$  не меньше 1.

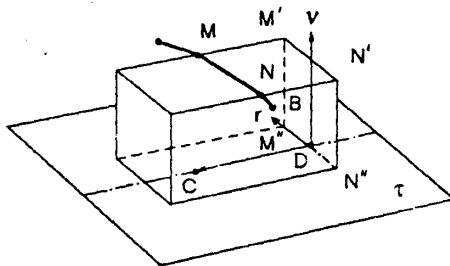


Рис. 7.

15. Чтобы лучше описать кривую  $L_3$ , найдем координаты точек  $M$  и  $N$ . Для этого разложим векторы  $\overline{AM}$  и  $\overline{BN}$  (см. пункт 8 и рис. 7) по базису  $(r, \overline{DC}, v)$ .

$$\overline{AM} = -\frac{r}{|r|} \left(u_0 - \frac{q}{2}\right) - \frac{\overline{DC}}{|\overline{DC}|} \left(\frac{w_0 q_1}{q_1 + q + q_2}\right) + \frac{v}{|v|} \left(\frac{1-d}{2}\right),$$

$$\overline{BN} = \frac{r}{|r|} \left(v_0 - \frac{q}{2}\right) - \frac{\overline{DC}}{|\overline{DC}|} \left(\frac{w_0 q_2}{q_1 + q + q_2}\right) + \frac{v}{|v|} \left(\frac{1-d}{2}\right).$$

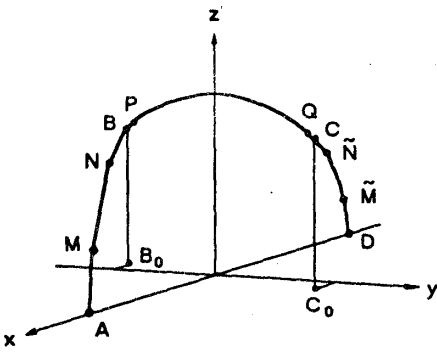


Рис. 8.

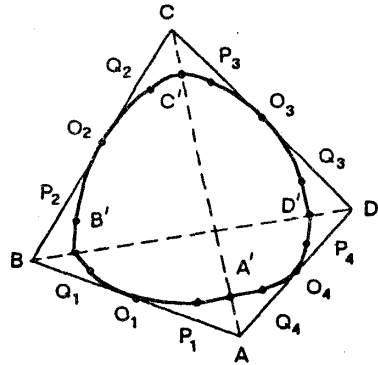


Рис. 9.

Отсюда для кривой  $L_3$  получаем

$$M \approx (0,500044, -0,253125, 0,279697),$$

$$N \approx (0,092710, -0,552260, 0,673078).$$

Общий вид кривой  $L_3$  изображен на рис. 8.

16. Аналогичный вопрос можно ставить для замкнутых кривых. На плоскости наиболее короткой замкнутой кривой ширины 1 является любая из кривых постоянной ширины 1. В пространстве рассмотрим правильный тетраэдр с ребром  $\sqrt{2}$  (рис. 9). Четырехзвенная ломаная  $L_4 = ABCDA$  дает пример замкнутой кривой ширины 1. Отметим середины  $O_1, O_2, O_3, O_4$  звеньев ломаной  $L_4$ . На ребре  $AC$ , которое не входит в состав  $L_4$ , отметим точку  $A'$ , удаленную на 1 от плоскости  $BCD$ , и точку  $C'$ , удаленную на 1 от плоскости  $ABD$ . Аналогично, на ребре  $BD$ , которое также не входит в состав  $L_4$ , отметим точки  $B'$  на расстоянии 1 от плоскости  $ACD$  и  $D'$  на расстоянии 1 от плоскости  $ABC$ .

Кривую  $L_5$  составим из четырех однотипных  $C^1$ -гладких участков  $A'B', B'C', C'D', D'A'$ . Достаточно описать строение участка  $A'B'$ . Он строится как кратчайшая кривая  $A'P_1O_1Q_1B'$ , соединяющая точки  $A'$  и  $B'$  и охватывающая извне круговой цилиндр  $Z$  радиуса 1 с осью  $CD$ . Участок этот имеет вид  $A'B' = A'P_1 + P_1O_1Q_1 + Q_1B'$ , где  $A'P_1$  и  $Q_1B'$  — прямолинейные отрезки, а  $P_1O_1Q_1$  — дуга винтовой линии на цилиндре  $Z$ . Аналогично строятся участки  $B'C' = B'P_2O_2Q_2C', C'D' = C'P_3O_3Q_3D', D'A' = D'P_4O_4Q_4A'$ .

17. Гипотеза 2. Кривая  $L_5$  имеет ширину 1 и является наиболее короткой замкнутой пространственной кривой ширины 1.

Длину  $|L_5|$  легко найти по правилам пункта 6.

Автор благодарит программиста В. Г. Хачатурова за помощь, оказанную им во время подготовки этой статьи.

Работа поддержана грантом РФФИ 94-01-0104.

### Список литературы

1. *V. A. Zalgaller*, Как выйти из леса? (Об одной задаче Беллмана). — Матем. просвещение (1957), вып. 6, с. 191–195.
2. *A. Adhikari and J. Pitman*, The shortest planar arc of width 1. — Amer. Math. Month. (1989), v. 96, № 4, p. 309–327.

### On a problem of the shortest space curve of unit width

V. A. Zalgaller

Some hypotheses of a form of the shortest space curves of unit width are presented. The cases of closed and unclosed curves are discussed separately. The hypotheses are verified both by geometrical proofs and computer analysis.