Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 462–468

УДК 514

Изометрические погружения некоторых областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением

О. В. Кузнецов

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 26 декабря 1993 г.

В работе доказывается, что в E^4 с плоской нормальной связностью могут быть погружены полосы, ограниченные двумя орициклами или двумя эквидистантами. Эти погружения не могут быть сведены к соответствующим погружениям указанных полос в E^3. Дается оценка на ширину погружаемых областей.

В роботі доводиться, що до E^4 з плоскою нормальною зв'язністю можуть бути занурені смуги, що обмежені двома оріциклами або двома еквідистантами. Ці занурення не можуть бути зведені до відповідних занурень таких смуг до E^3. Дається оцінка на ширину областей, що занурюються.

Изометрические погружения двумерных областей, в частности, областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением, представляют определенный интерес, поскольку они, во-первых, включают в себя изометрические погружения двумерных областей L^2 в E^3, во-вторых, для этих погружений справедливы такие понятия, присутствующие в трехмерном случае, как главные направления, главные кривизны, линии кривизны, т.е. можно сказать, что геометрия поверхностей F^2, являющихся реализацией этих погружений, служит прямым и наиболее "близким" обобщением классической теории поверхностей.

Погружения областей L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением рассматривались Ю. А. Аминовым в работах [1-3], в которых он показал, что если в качестве координатной сети взять сеть, состоящую из линий кривизны, то метрика каждой поверхности $F^2 \subset E^4$, являющейся реализацией погружения указанного типа, будет иметь вид

$$dS^2 = \cos^2\theta\,(\sin^2\omega\, dx^2 + \cos^2\omega\, dy^2).$$

Систему уравнений Гаусса-Кодацци-Риччи в этом случае можно преобразовать в систему двух дифференциальных уравнений второго порядка на функции θ и ω (1):

$$\omega_{yy} - \omega_{xx} - (\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\omega\,\theta_y)_x - (\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\omega\,\theta_x)_y = \cos^2\theta\sin\omega\cos\omega\ , \tag{1}$$

$$\left(\frac{\operatorname{ctg}\omega\,\theta_x}{\cos\theta}\right)_y + \left(\frac{\operatorname{tg}\omega\,\theta_y}{\cos\theta}\right)_x = 0. \tag{2}$$

В работе [2] предложен метод решения системы (1)–(2), а значит, и построения соответствующих погружений. Этот метод заключается в том, что при определенных условиях система (1)-(2) может быть сведена к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\omega_x = -\varphi_y - \frac{\sin\varphi\cos\omega\,(\alpha\sin\theta + 1)}{\cos\theta},$$
$$\omega_y = -\varphi_x + \frac{\cos\varphi\sin\omega\,(\alpha\sin\theta + 1)}{\cos\theta}, \tag{3}$$

$$\theta_x = \sin\varphi\sin\omega\,(\sin\theta + \alpha),$$
$$\theta_y = \cos\varphi\cos\omega\,(\sin\theta + \alpha), \tag{4}$$

где α — произвольная константа, $\varphi(x,y)$ — некоторая регулярная функция, удовлетворяющая уравнению "синус Гордона":

$$\varphi_{yy} - \varphi_{xx} = (1-\alpha^2)\cos\varphi\sin\varphi. \tag{5}$$

В работе [2] построено также погружение некоторой области плоскости Лобачевского L^2, соответствующее решению уравнения (5) при $|\alpha| = 1$.

Целью настоящей работы является построение изометрических погружений L^2 в E^4, которые соответствуют односолитонным решениям уравнения (5), а также описание реализуемых в E^4 областей.

Автором доказана следующая теорема.

Теорема. *Для каждого односолитонного решения* $\varphi(x,y) = 2\operatorname{arc\,tg} e^z$, *где* $z = x\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{ch}k + y\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{sh}k + \delta_1$, $k = const \neq 0$, *при* $|\alpha| > 1$, *или же* $z = x\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{sh}k + y\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{ch}k + \delta_2$ *при* $0 \le \alpha < 1$, *уравнения (5) можно построить изометрическое погружение некоторой области плоскости Лобачевского L^2 в E^4. При этом погружаются полосы, ограниченные:*

а) *орициклом и некоторой его эквидистантой, т.е. двумя орициклами, если* $|\alpha| > 1$;

б) *двумя эквидистантами геодезической линии, если* $0 \le \alpha < 1$.

Ширина каждой из указанных полос ограничена снизу числами $\ln\left(\frac{\alpha\operatorname{ch}k}{\alpha\operatorname{ch}k - 1}\right)$ и $\frac{1}{2}\ln(\operatorname{cth}^2 k)$ *для случаев* а) *и* б) *соответственно.*

Следует заметить, что в работах [5-7] также используются солитоны для построения погружений областей плоскости Лобачевского L^2 в E^3. Однако погружения, которые строим мы, не могут быть сведены к названным погружениям в силу того, что функции θ и ω выражаются через параметры эллипса нормальной кривизны a, α, β, причем $\beta \neq 0$ [3].

1) Возьмем в качестве $\varphi(x,y)$ солитон $\varphi = 2\operatorname{arctg} e^z$, где

$$z = x\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{ch}k + y\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{sh}k + \delta_1$$

при $|\alpha| > 1$, или же

$$z = x\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{sh}k + y\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{ch}k + \delta_2$$

при $0 \le |\alpha| < 1$. Подставив $\varphi(x,y)$ в систему (3)-(4), получим:

$$\omega_x = -\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{sh} k - \frac{\cos\omega\,(\alpha\sin\theta+1)}{\operatorname{ch} z\cos\theta},$$

$$\omega_y = -\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{ch} k - \frac{\operatorname{th} z\sin\omega\,(\alpha\sin\theta+1)}{\cos\theta}; \qquad (3')$$

$$\omega_x = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{ch} k - \frac{\cos\omega\,(\alpha\sin\theta+1)}{\operatorname{ch} z\cos\theta},$$

$$\omega_y = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{sh} k - \frac{\operatorname{th} z\sin\omega\,(\alpha\sin\theta+1)}{\cos\theta}. \qquad (3'')$$

Уравнения (3′) справедливы при $|\alpha| > 1$, уравнения (3″) — при $0 \le |\alpha| < 1$. Кроме того, системы (3′) и (3″) дополняются двумя уравнениями на функцию θ

$$\theta_x = \frac{\sin\omega\,(\sin\theta+\alpha)}{\operatorname{ch} z}, \qquad (4')$$

$$\theta_y = -\operatorname{th} z\cos\omega\,(\sin\theta+\alpha).$$

2) Решим систему (3′) – (4′).

а) Из уравнений (4′) получаем

$$\sin\omega = \frac{\theta_x\operatorname{ch} z}{\sin\theta+\alpha}, \qquad \cos\omega = -\frac{\theta_y\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z\,(\sin\theta+\alpha)}. \qquad (6)$$

Если ввести функцию

$$\gamma = \int\frac{(\alpha\sin\theta+1)\,d\theta}{\cos\theta\,(\sin\theta+\alpha)},$$

то с учетом (6) уравнения (3′) можно записать в виде линейной системы:

$$\omega_x - \frac{1}{\operatorname{sh} z}\gamma_y = -\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{sh} k,$$

$$\omega_y + \operatorname{sh} z\,\gamma_x = -\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\operatorname{ch} z}\operatorname{ch} k. \qquad (7)$$

Сделаем замену переменных:

$$z = x\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{ch} k + y\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{sh} k + \delta_1,$$

$$t = x\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{sh} k + y\sqrt{\alpha^2-1}\operatorname{ch} k.$$

Тогда (7) примет следующий вид:

$$\omega_z - \frac{\operatorname{sh} k\operatorname{ch} k\operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z}\gamma_z + \frac{1+\operatorname{sh}^2 k\operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z}\gamma_t = 0,$$

$$\omega_t + \frac{\operatorname{ch}^2 k\operatorname{ch}^2 z - 1}{\operatorname{sh} z}\gamma_z + \frac{\operatorname{sh} k\operatorname{ch} k\operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z}\gamma_t = -\frac{1}{\operatorname{ch} z}. \qquad (7')$$

Так как в (7′) коэффициенты и правые части зависят только от z, то решение, естественно, мы будем искать в виде

$$\omega = U_1(z) + V_1(t), \qquad \gamma = U_2(z) + V_2(t).$$

После подстановки ω и γ будем иметь

$$U'_{1,z} - \frac{\operatorname{sh} k \operatorname{ch} k \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z} U'_{2,z} - \frac{1 + \operatorname{sh}^2 k \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z} V'_{2,t} = 0,$$

$$V'_{1,t} + \frac{\operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}{\operatorname{sh} z} U'_{2,z} + \frac{\operatorname{sh} k \operatorname{ch} k \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{sh} z} V'_{2,t} = -\frac{1}{\operatorname{ch} z}. \qquad (7'')$$

Из первого уравнения $(7'')$ следует, что $V'_{2,t} = A_2 = \mathrm{const}$. Следовательно, $V_2 = A_2 t + C_1$.

Из второго уравнения $(7'')$ заключаем, что $V'_{1,t} = A_1 = \mathrm{const}$, значит, $V_1 = A_1 t + C_2$.

Зная V_1 и V_2, можно найти U_1 и U_2

$$U_1 = -\operatorname{arctg}(\operatorname{cth} k \operatorname{sh} z) - \frac{A_2}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z + 1}{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - 1} - \frac{A_1}{\operatorname{ch} k} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} k}\right) - A_1 z \operatorname{th} k.$$

Отсюда

$$\omega = -\operatorname{arctg}(\operatorname{cth} k \operatorname{sh} z) - \frac{A_2}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z + 1}{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - 1} -$$

$$- \frac{A_1}{\operatorname{ch} k} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} k}\right) + \frac{A_1 y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\operatorname{ch} k} + A_3.$$

Покажем, что $A_1 = A_2 = 0$. Обозначим $\omega_x \operatorname{ch} z + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{sh} k$ через A, а $\dfrac{\omega_y \operatorname{ch} z + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} z}$ через B. Используя введенные обозначения, можно переписать $(3')$ в виде

$$A \cos\theta + \cos\omega\,(\alpha \sin\theta + 1) = 0, \qquad B\cos\theta + \sin\omega\,(\alpha\sin\theta + 1) = 0. \qquad (8)$$

Будем рассматривать (8) как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\cos\theta$ и $\alpha\sin\theta + 1$. Чтобы система (8) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$A \sin\omega - B\cos\omega = 0. \qquad (9)$$

Разобьем правую часть выражения для ω следующим образом: пусть

$$a = -\operatorname{arctg}(\operatorname{cth} k \operatorname{sh} z),$$

$$b = -A_2 \ln \sqrt{\frac{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z + 1}{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - 1}} - \frac{A_1}{\operatorname{ch} k} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} k}\right) + \frac{A_1 y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\operatorname{ch} k} + A_3.$$

Учитывая a и b, (9) перепишем в виде

$$K_1 \cos b + K_2 \sin b = 0, \qquad (9')$$

где

$$K_1 = A\sin a - B\cos a, \quad K_2 = A\cos a + B\sin a.$$

Выполнив необходимые вычисления, получим:

$$K_1 = -\frac{A_2 \operatorname{ch} k \operatorname{ch} z \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}}, \quad K_2 = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}\,(1 + A_1 \operatorname{ch} z)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}}. \tag{10}$$

В силу (10),

$$\operatorname{tg} b = -\frac{A_2 \operatorname{ch} k \operatorname{ch} z}{1 + A_1 \operatorname{ch} z}. \tag{11}$$

Предположим сначала, что $A_1 \neq 0$. Рассмотрим полуплоскость параметров (x,y), в которой $1 + A_1 \operatorname{ch} z \neq 0$. В этой полуплоскости

$$-\frac{\pi}{2} + \pi l < b < \frac{\pi}{2} + \pi l, \tag{12}$$

где l — целое число. Из (12) следует, что b — ограниченная функция, а это может быть только тогда, когда $A_1 = 0$, что является противоречием. Итак, $A_1 = 0$, не нарушая общности, можно считать, что $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$. Согласно (11),

$$-\frac{A_2}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z + 1}{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - 1} + A_3 \equiv -\operatorname{arctg}\,(A_2 \operatorname{ch} k \operatorname{ch} z). \tag{13}$$

Если левая и правая части в (13) совпадают, значит, совпадают и их производные. Продифференцировав тождество (13), заключаем, что $A_2 = 0$, следовательно, $A_3 = 0$.

Таким образом, мы показали, что

$$\omega = -\operatorname{arctg}\,(\operatorname{cth} k \operatorname{sh} z). \tag{14}$$

Зная ω, из (3′) или (8) находим θ

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}} - \arccos \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}}. \tag{15}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что полученное θ удовлетворяет системе (4′).

Линейный элемент, соответствующий (14) и (15), имеет вид

$$dS^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{(\alpha \operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - 1)^2} (\operatorname{ch}^2 k \operatorname{sh}^2 z\, dx^2 + \operatorname{sh}^2 k\, dy^2). \tag{16}$$

Для заданного линейного элемента линия $z = 0$ является линией вырождения метрики, которую мы будем называть сингулярной линией.

В случае, когда $0 \leq |\alpha| < 1$, в результате аналогичных рассуждений получаем решение (3″)–(4′).

Здесь возможны два значения для ω:

$$\omega_1 = -\operatorname{arctg}\,(\operatorname{th} k \operatorname{sh} z) + \operatorname{arctg}\,(\operatorname{sh} k \operatorname{ch} z), \tag{17}$$

$$\omega_2 = -\operatorname{arctg}\,(\operatorname{th} k \operatorname{sh} z) - \operatorname{arctg}\,(\operatorname{sh} k \operatorname{ch} z). \tag{18}$$

Им соответствует угол

$$\theta = -\arcsin \alpha. \tag{19}$$

Используя, например, (17) и (19), получаем такую метрику:

$$dS^2 = \frac{(1-\alpha^2)(\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)^2}{(1+\operatorname{sh}^2 k \operatorname{ch}^2 z)^2}\left(\operatorname{sh}^2 k\, dx^2 + (\operatorname{ch} k \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2\, dy^2\right). \tag{20}$$

Метрика (20) также имеет сингулярную линию $z = \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$.

3) Отметим области, которые реализуют (16) и (20).

Обозначим через k_g^x, k_g^y, k_g^z геодезические кривизны линий $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$.

а) В метрике (16) $k_g^x = \alpha \operatorname{ch} k$, $k_g^y = \dfrac{\operatorname{ch} z - \alpha \operatorname{sh} k}{\operatorname{sh} z}$, $k_g^z = 1$. Значит, кривые $z = \mathrm{const}$ (в том числе и сингулярная линия $z = 0$) являются орициклами, координатные линии $x = \mathrm{const}$ — дугами окружностей. Нетрудно проверить, что при $z > 0$ все линии $x = \mathrm{const}$ имеют длину

$$l^x = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 k - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha \operatorname{ch} k + 1}{\alpha \operatorname{ch} k - 1}}\,.$$

С помощью формул дифференциальной геометрии можной найти угол ψ_1 между кривыми $x = \mathrm{const}$ и $z = 0$: $\cos \psi_1 = 1$, т.е. мы имеем касание этих кривых.

Семейство геодезических, перпендикулярных орициклам $z = \mathrm{const}$, задается отношением $\operatorname{th} z - x\sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} k = \mathrm{const}$. При $z > 0$ эти геодезические имеют длину, равную $z = \ln\left(\dfrac{\alpha \operatorname{ch} k}{\alpha \operatorname{ch} k - 1}\right)$.

б) В метрике (20) $k_g^y = \alpha \operatorname{ch} k$,

$$k_g^x = \frac{\operatorname{sh}^2 k \operatorname{sh} 2z}{\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z} - \frac{\operatorname{sh}^2 k \operatorname{ch} 2z\,(1 + \operatorname{sh}^2 k \operatorname{ch}^2 z)}{(\operatorname{ch} k + \operatorname{sh}^2 k \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z)(\operatorname{ch} k \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)}\,.$$

Сингулярная линия $z = \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$ имеет геодезическую кривизну $k_g^z = \dfrac{1}{\operatorname{ch} k}$. Таким образом, линия $z = \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$ — эквидистанта геодезической, линии $y = \mathrm{const}$ являются дугами окружностей. Легко проверить, что все дуги $y = \mathrm{const}$ имеют одинаковую длину при $z > \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$, и что координатные линии $y = \mathrm{const}$ касаются кривой $z = \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$.

Геодезические $\ln\left((\operatorname{ch}^2 k + 1) + 2\operatorname{th} z \operatorname{ch} k\right) - 2y\sqrt{1 - \alpha^2} = \mathrm{const}$ также перпендикулярны линиям $z = \mathrm{const}$. Если $z > \ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\right|$, то их длина конечна, однако ограничена снизу числом $\ln|\operatorname{cth} k|$.

З а м е ч а н и я. 1) Для построения изометрических погружений плоскости Лобачевского L^2 в E^4 мы использовали односолитонные решения уравнения

$$\varphi_{yy} - \varphi_{xx} = (1 - \alpha^2) \cos \varphi \sin \varphi:$$

$$\varphi = 2\operatorname{arctg} e^z,$$

где $z = x\sqrt{\alpha^2 - 1}\ \operatorname{ch} k + y\sqrt{\alpha^2 - 1}\ \operatorname{sh} k + \delta_1$, если $|\alpha| > 1$,
и $z = x\sqrt{1 - \alpha^2}\ \operatorname{sh} k + y\sqrt{1 - \alpha^2}\ \operatorname{ch} k + \delta_2$, если $0 \le |\alpha| < 1$.

Указанными функциями φ не исчерпываются, вообще говоря, все односолитонные решения уравнения (5). Для полноты картины нужно еще рассмотреть такие функции: $\varphi = 2\operatorname{arctg} e^z$, где $z = -x\sqrt{\alpha^2 - 1}\ \operatorname{ch} k + y\sqrt{\alpha^2 - 1}\ \operatorname{sh} k + \tilde{\delta}_1$, если $|\alpha| > 1$, и $z = x\sqrt{1 - \alpha^2}\ \operatorname{sh} k - y\sqrt{1 - \alpha^2}\ \operatorname{ch} k + \tilde{\delta}_2$, если $0 \le |\alpha| < 1$.

2) В тексте не оговаривалось, что для определенности все рассуждения проводились в предположении, что $\alpha > 0$ или $0 \le \alpha < 1$. Однако, полученные результаты справедливы и для тех значений α, которые лежат в промежутках $\alpha < -1$ или $-1 < \alpha < 0$.

Однако, применение этих солитонов для построения погружений L^2 в E^4 не дает результатов, которые отличались бы от полученных нами.

Автор выражает благодарность Ю. А. Аминову за ценные замечания и помощь, оказанную им при работе над статьей.

Список литературы

1. *Ю. А. Аминов*, О погружениях n-мерного пространства Лобачевского в $2n$-мерное евклидово пространство с полями главных направлений.— Укр. геометр. сб. (1985), вып. 28, с. 3—8.
2. *Ю. А. Аминов*, Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства с плоской нормальной связностью: модель калибровочного поля.— Мат. сб. (1988), т. 137, № 3, с. 275—298.
3. *Ю. А. Аминов*, О функционально-вырожденных погружениях плоскости Лобачевского L^2 в E^4.— Укр. геометр. сб. (1990), вып. 33, с. 8—18.
4. *В. Бляшке*, Дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.-Л. (1935), 196 с.
5. *Н. В. Грибков*, Построение некоторых регулярных решений уравнения "синус-Гордона" с помощью поверхностей постоянной отрицательной кривизны.— Вестн. МГУ. Сер. мат. и механика (1972), № 3, с. 78—83.
6. *Э. Г. Позняк*, Геометрические исследования, связанные с уравнением "синус-Гордона". Тез. докл. на семинаре по геометрии в целом, посвященном 75-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.— Вестн. МГУ. Сер. мат. и механика (1986), № 5, 92 с.
7. *А. Г. Попов*, Полная геометрическая интерпретация односолитонного решения произвольной амплитуды уравнения "синус-Гордона".— Вестн. МГУ. Сер. мат. и механика (1990), № 5, с. 165—170.

Isometric embeddinds of some domains of the Lobachevsky plane L^2 into E^4 with vanishing Gaussian torsion

O. V. Kuznetsov

It is proven that the domains of L^2 bounded by two horocycles or by two equidistants can be embedded into E^4 with flat normal connection. These embeddings cannot be reduced to the corresponding embeddings of such domains into E^3. The estimation of the width of these domains is obtained.