Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 469–478

УДК 517.53

Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций вполне регулярного роста в открытой полуплоскости

К. Г. Малютин

Сумской сельскохозяйственный институт, Украина, 244030, г. Сумы, ул. Петропавловская, 57

Статья поступила в редакцию 14 октября 1993 г.

Рассматривается задача кратной интерполяции в полуплоскости в предположении, что каноническое произведение интерполируемого дивизора является функцией вполне регулярного роста в открытой полуплоскости. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах канонических произведений и в терминах меры, определяемой дивизором.

Розглядається задача кратної интерполяції за умови, що канонічний добуток дівізора, що інтерполюється, є функція цілком регулярного зростання у відкритій напівплощинію Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності задачі як в термінах канонічного добутку дівізора, що інтерполюється, так і в термінах міри, яка визначається дівізором.

1. В настоящей статье мы будем пользоваться терминологией работ [1, 2, 3]. Пусть $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho > 0$ при $r \to \infty$. Мы будем обозначать $v(r) = r^{\rho(r)}$ (или $v_i(r) = r^{\rho_i(r)}$, если $\rho_i(r)$ — какой-нибудь уточненный порядок), причем будем считать, что $v(r)$ — неубывающая функция на положительной полуоси и $v(0) = v(+0) = 1$. Через C^+ обозначим открытую полуплоскость, $C^+ = \{ z\colon \operatorname{Im} z > 0 \}$. Пусть в C^+ задан дивизор $D = \{ a_n, q_n \}_{n=1,\dots}$ (т.е. множество различных комплексных чисел $A = \{ a_n \}$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, вместе с их кратностями q_n, $q_n \geq 1$ — целое число) такой, что его каноническое произведение (т.е. произведение Вейерштрасса–Неванлинны) $E(z)$ имеет вполне регулярный рост (в.р.р.) в C^+. Обозначим через $H(\theta)$ индикатор $E(z)$, $\theta \in [0,\pi]$. Этот индикатор может иметь разрывы в точках $\theta = 0,\pi$.

Определение. *Дивизор D называется интерполяционным в C^+, если для любой последовательности комплексных чисел $\{ b_{n,k} \}$, $k = 1, \dots, q_n$, $n = 1,2,\dots$, удовлетворяющей условиям:*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \left\{ \left[\frac{1}{v(r_n)} \ln \max_{1 \leq k \leq q_n} \frac{| b_{n,k} |}{(k-1)!} - H(\theta_n) \right] : \theta_n \in [\alpha, \beta] \right\} \leq 0 \ , \ \forall \ [\alpha, \beta] \subset (0,\pi), \tag{1}$$

$$\sup_{\operatorname{Im} a_n \le 1} \left\{ \frac{1}{v(r_n)} \ln \max_{1 \le k \le q_n} \frac{|b_{n,k}| (\operatorname{Im} a_n)^{k-1}}{(k-1)!} \right\} < \infty , \tag{2}$$

существует функция $F(z)$ в.р.р. в C^+ такая, что

$$h_F(\theta) = H(\theta), \qquad \theta \in (0,\pi), \tag{3}$$

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \qquad k = 1, \ldots, q_n, \qquad n = 1, \ldots . \tag{И}$$

Заметим, что согласно определению равенство (3) в точках $\theta = 0,\pi$, вообще говоря, не выполняется. Для дальнейшего нам понадобятся следующие определения и обозначения.

Через $C(z, \alpha)$ мы будем обозначать открытый круг с центром в точке z радиуса α. Обозначим $n(G) = \sum_{a_n \in G} q_n$, $\mu(G) = \sum_{a_n \in G} q_n \sin\theta_n$. Рассмотрим семейства функций

$$\Phi_z(\alpha) = \frac{\left(n(C(z, \alpha\, |z|)) - q_n\right)^+}{v(|z|)}; \qquad \Phi_z^+(\alpha) = \frac{\left(\mu(C(z, \alpha\, |z|)) - \mu(a_n)\right)^+}{v(|z|)},$$

где a_n — точка, ближайшая к z (если таких точек несколько, то будем брать наибольшее из $q_n \sin\theta_n$). Пусть $\theta = \arg z$, $0 \le \alpha \le 1/2$. Обозначим

$$I(z, \delta) = \int_0^{\delta} \frac{\Phi_z(\alpha)\, d\alpha}{\alpha}; \qquad I^+(z, \alpha) = \sin\theta \int_0^{\alpha} \frac{\Phi_z^+(\delta)\, d\delta}{\delta(\delta + \sin\theta)^2}.$$

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему, доказательство которой составляет содержание настоящей работы.

Теорема. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *дивизор D является интерполяционным в C^+;*

2) *каноническое произведение удовлетворяет соотношениям:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ [(\ln|\gamma_{n,1}|)/v(r_n) + H(\theta_n)] : \theta_n \in [\alpha, \beta] \right\} = 0, \qquad \forall \quad [\alpha,\beta] \subset (0,\pi), \tag{4}$$

$$\sup_{\operatorname{In} a_n \le 1} \left\{ \frac{1}{v(r_n)} \ln \frac{|\gamma_{n,1}|}{\operatorname{Im}^{q_n} a_n} \right\} < \infty , \tag{5}$$

где

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \frac{(z - a_n)^{q_n}}{E(z)} \Bigg|_{z=a_n};$$

3) $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\theta \in [\alpha,\beta]} I(z, \delta) = 0, \ \forall \ [\alpha,\beta] \subset (0,\pi),$ (6)

$$\lim_{n\to\infty} \{ q_n (\ln r_n)/v(r_n) : \theta_n \in [\alpha,\beta] \} = 0, \qquad \forall \quad [\alpha,\beta] \subset (0,\pi), \tag{7}$$

$$\sup_{\operatorname{Im} z \le 1} I^+(z,1/2) < \infty, \tag{8}$$

$$\sup_{\operatorname{Im} a_n \le 1} \{ q_n / v(r_n) \} < \infty. \tag{9}$$

2. В аналогичной постановке интерполяционную задачу рассматривал А. М. Руссаковский [4,5,6]. Им была показана импликация I $\Rightarrow$ 2.

Кроме того, была доказана также следующая лемма.

Лемма 1. *Если дивизор D удовлетворяет условию* (4) *и существует функция $f(z)$, аналитическая и конечного типа при порядке $\rho(r)$ в C^+, решающая задачу* (И) *в точках $a_n \in A$ таких, что* $\operatorname{Im} a_n \le 1$, *то тогда существует функция $f_1(z)$ с индикатором $h_{f_1}(\theta) \le H(\theta)$, $\theta \in (0,\pi)$, аналитическая в C^+ со свойством* (И).

В дальнейшем нам также понадобится еще одна лемма, полученная А. М. Руссаковским.

Лемма 2. *Если дивизор D удовлетворяет условию* (5), *то*

$$\sup_{\operatorname{Im} a_n \le 1} \left\{ \frac{1}{v(r_n)} \ln \max_{1 \le k \le q_n} \frac{|\gamma_{n,k}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n - k+1}} \right\} < \infty . \tag{10}$$

3. Пусть дивизор D удовлетворяет условию (5). Обозначим $E_n(z) = E(z)[a_n(z-\overline{a}_n)/(\overline{a}_n(z-a_n))]^{q_n}$,

$$A_n(z) = \prod_{0<|a_n - a_k| \le r_n/2} \left[(1-z/a_k)/(1-z/\overline{a}_k)\right]^{q_k},$$

$$B_n(z) = E_n(z) A_n^{-1}(z).$$

Для функций $E_n(z)$ и $B_n(z)$ справедливы оценки

$$\ln |E_n(z)| \le \ln |B_n(z)| \le K_1 v(|z|), \tag{11}$$

где $K_1 > 0$ не зависит от n. Так как $2^{q_n} = E_n(a_n)\gamma_{n,1}(\operatorname{Im} a_n)^{-q_n}$, то из (5) и (11) получаем (9).

Лемма 3. *Пусть дивизор D удовлетворяет условию* (5). *Тогда*

$$\sup_{\operatorname{Im} a_n \le 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} a_n \, q_k \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \overline{a}_k|^2 r_k^{\rho+1}} < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Из (5) и (11) получим при некотором $K_2 > 0$

$$|A_n(a_n)| \ge \exp[-K_2 v(r_n)], \qquad \operatorname{Im} a_n \le 1. \tag{13}$$

Отсюда получаем [7, с. 243], что

$$\sum_{0<|a_n-a_k|\le r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_n q_k \operatorname{Im} a_k}{|a_n-\bar a_k|^2} \le K_2 v(r_n). \tag{12'}$$

Откуда, используя сходимость ряда $\sum (q_k \operatorname{Im} a_k)/r_k^{\rho+2}$ (9) и то, что при $k=n$ слагаемое в (12) равно $q_n/4r_n^{\rho+1}$, получим (12).

Лемма доказана.

В силу условия (9), кратности точек из A, попавших в любой круг конечного радиуса, равномерно ограничены, а, следовательно, для таких точек существует функция аналитическая и ограниченная в C^+, со свойством (И) в этих точках [8]. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $r_n>1$. Положим далее при $\operatorname{Im} a_n \le 1$

$$\alpha_{n,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{\substack{i=0\\ a_i\in\Phi}}^{q_n-m} \frac{1}{i!}\gamma_{n,q_n+1-m-i}\, b_{n,i+1},$$

$$\alpha_n(z) = \sum_{\substack{k=n\\ a_k\in\Phi}}^{\infty} \frac{(1+a_k z)q_k \operatorname{Im} a_k}{(\bar a_k - z) i r_k^{[\rho]+3}},$$

где

$$\Phi = \{ a_k \in A : \operatorname{Im} a_k \le 1 \}.$$

Ряд, определяющий функции $\alpha_n(z)$ сходится равномерно в каждой области $\{ z : |z| \le r,\ \operatorname{Im} z \ge \delta > 0 \}$, так как в этой области

$$\left| \frac{(1+a_k z)q_k \operatorname{Im} a_k}{(\bar a_k - z) i r_k^{[\rho]+3}} \right| \le \frac{2rq_k \sin\theta_k}{\delta r_k^{[\rho]+1}}.$$

Перенумеровав, если есть такая необходимость, точки a_n, можно считать, что

$$\frac{\operatorname{Im} a_n}{r_n^2} \ge \frac{\operatorname{Im} a_{n+1}}{r_{n+1}^2}, \qquad a_n \in \Phi. \tag{14}$$

Оценим $\operatorname{Re}\alpha_n(z)$. Из (12) и (14) имеем

$$\operatorname{Re}\alpha_n(a_n) \le K_3, \qquad a_n \in \Phi \tag{15}$$

при некотором $K_3>0$, не зависящем от n. А также

$$\operatorname{Re}\alpha_n(z) \ge \sum_{\substack{k=n\\ a_k\in\Phi}}^{\infty} \frac{q_k(\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{[\rho]+3}|z-\bar a_k|^2} = \lambda_n(z). \tag{16}$$

Положим далее при $a_n \in \Phi$

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n,m} \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)},$$

где выбор натуральных чисел S_n будет осуществлен ниже, и

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{z\,\overline{a}_n}{r_n^2} \right)^{[\rho]+3} \left(\frac{2\,\mathrm{Im}\, a_n}{z - \overline{a}_n} \right)^2 \exp\,[\alpha_n(a_n) - \alpha_n(z)].$$

Непосредственной проверкой (см., например, [9]) доказывается, что функция $f(z) = \sum\limits_{a_n \in \Phi} E(z) P_n(z)$ решает задачу (И) в точках $a_n \in \Phi$.

Покажем, что функция $f(z)$ имеет нормальный тип при порядке $\rho(k)$. Нам понадобится следующая оценка, вытекающая из условия (2) и неравенства (10),

$$\left| \alpha_{n,m} \right| \le \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!} (\mathrm{Im}\, a_n)^m \exp\,[K_4 v(r_n)], \tag{17}$$

где $K_4 > 0$ — абсолютная постоянная. Пусть $r = |z|$. Обозначим

$$u_{n,m}(z) = \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)}.$$

Если $z \overline{\in} \Omega = \bigcup C(a_n, \mathrm{Im}\, a_n/2)$, то интегрируя по окружности $C_n = \partial C(z, \mathrm{Im}\, a_n/2)$, получим

$$\left| u_{n,m}(z) \right| \le \frac{(m-1)!\, 2^m [r(1 + e^2/2)]^{S_n}}{(\mathrm{Im}\, a_n)^m r_n^{S_n}} \max_{\xi \in C_n} |\varphi_n(\xi)|, \tag{18}$$

если $r_n \le e^2 r$, $a_n \in \Phi$ и

$$\left| u_{n,m}(z) \right| \le \frac{(m-1)!\, 2^m e^{-S_n}}{(\mathrm{Im}\, a_n)^m} \max_{\xi \in C_n} |\varphi_n(\xi)| \tag{19}$$

при $r_n > e^2 r$, $a_n \in \Phi$.

Так как на границе окружности C_n выполняются неравенства

$$|z - \overline{a}_n|/2 \le |\xi - \overline{a}_n| \le 3\,|z - \overline{a}_n|/2,$$

то из (15), (16), (18) и (19) получаем

$$\left| u_{n,m}(z) \right| \le \frac{(m-1)!\, 2^m [r(1 + e^2/2)]^{S_n} (r+1)^{[\rho]+3}}{q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^m r_n^{S_n}} \times$$

$$\times \frac{16 K_3\, q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^2}{r_n^{[\rho]+3} |z - \overline{a}_n|^2} \exp\left[-\frac{1}{4} \lambda_n(z) \right], \qquad r_n \le e^2 r, \tag{20}$$

и

$$\left| u_{n,m}(z) \right| \le \frac{(m-1)!2^m e^{-S_n} 16K_3 (r+1)^{[\rho]+3}}{q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^m} \times$$

$$\times \frac{q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^2}{r_n^{[\rho]+3} \left| z - \bar{a}_n \right|^2} \exp\left[-\frac{1}{4}\lambda_n(z) \right], \qquad r_n > e^2 r. \tag{21}$$

Учитывая (9) и (17), получим из (21), что при $z \,\overline{\in}\, \Omega$

$$\left| P_n(z) \right| \le K_5 \exp\left[K_6 v(r_n) - S_n \right] \frac{q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^2}{r_n^{[\rho]+3} \left| z - \bar{a}_n \right|^2} \exp\left[-\frac{1}{4}\lambda_n \right] \tag{22}$$

при некоторых K_5, $K_6 > 0$, если $r_n > e^2 r$.

Положим $S_n = [K_6 v(r_n)] + 1$. Заметим, что

$$\sup_{x \le e^2 r} \left[\frac{r(1 + e^2/2)}{x} \right]^{K_7 v(x)} \le \exp\left[K_8 v(r) \right], \tag{23}$$

где $K_8 > 0$ зависит только от $K_7 > 0$. Тогда из (9), (17), (20), (22) и (23) получаем, что при $z \,\overline{\in}\, \Omega$

$$\left| f(z) \right| \le \left| E(z) \right| K_9 \exp\left[K_{10} v(r) \right] \sum_{a_n \in \Phi} q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^2 \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{4}\lambda_n(z) \right] \Big/ \left(r_n^{[\rho]+3} \left| z - \bar{a}_n \right|^2 \right), \qquad K_9, K_{10} > 0. \tag{24}$$

Поскольку $\lambda_n(z) \downarrow 0$, $n \to \infty$, то, воспользовавшись элементарным неравенством $t \le e^t - 1$ при $t = [\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)]/4$ и замечая, что

$$q_n (\mathrm{Im}\, a_n)^2 \Big/ \left(r_n^{[\rho]+3} \left| z - \bar{a}_n \right|^2 \right) = \lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z),$$

получим из (24) при $z \,\overline{\in}\, \Omega$

$$\left| f(z) \right| \le \left| E(z) \right| K_9 \exp\left[K_{10} v(r) \right] \sum_{a_n \in \Phi} \left[\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_{n+1}(z) \right) - \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_n(z) \right) \right] \le$$

$$\le K_9 \left| E(z) \right| \exp\left[K_{10} v(r) \right].$$

Применяя принцип максимума к аналитической функции $f(z)$, получим, что последнее неравенство справедливо при любых $z \in C^+$.

Пусть теперь $f_1(z)$ — интерполирующая функция, о существовании которой говорится в лемме 1. Возьмем произвольную последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon_1 = \pi/6$. Положим $\psi_n(r) = \sup\{ \left| f_1(z) E^{-1}(z) \right| : |z| = r, \arg z \in [\varepsilon_n, \pi - \varepsilon_n] \}$. Из свойств функций $f_1(z)$ и $E(z)$ следует, что $\lim\limits_{\substack{r \to \infty \\ z \,\overline{\in}\, E_n}} \frac{1}{v(r)} \ln^+ \psi_n(r) = 0$, где E_n — множество кругов нулевой относительной меры. Определим последовательность $R_n \uparrow \infty$, которая при $r \geq R_n$, $z \overline{\in} E_n$ будет иметь вид

$$\frac{1}{v(r)} \ln^+ \psi_n(r) \leq 2^{-n}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Обозначим $G = \bigcup\limits_n \{ z : \arg z < \varepsilon_n, \ \arg z > \pi - \varepsilon_n, \ |z| < R_{n+1} \}$. Определим функцию $\psi(r)$ равенством $\psi(r) = \exp [2^{-n} v(r)]$, $r \in (R_n, R_{n+1}]$.

Пусть $\rho_1(r)$ — такой уточненный порядок, при котором

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{v_1(r)} \ln \psi_n(r) = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{v_1(r)}{v(r)} = 0,$$

и пусть $\varphi(z)$ — целая функция в.р.р. с индикатором 1 относительно порядка $\rho_1(r)$. В силу изложенного выше, если $z \overline{\in} E_0 = \bigcup\limits_n E_n$ и $|z| \to \infty$, то отношение $f_1(z) / [\varphi(z) E(z)]$ стремится к нулю. Заметим, что пересечение множества E_0 с любым внутренним углом полуплоскости C^+ имеет нулевую относительную меру. Функция $\varphi(z)E(z)$ есть функция в.р.р. в C^+ с индикатором $H(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Следовательно, таковой же является функция $F(z) = f_1(z) + \varphi(z)E(z)$. Функция $F(z)$ обладает свойством (И). Импликация $2 \Rightarrow 1$ доказана.

4. Равносильность условий (6), (7) и условия (4) проверяется рассуждениями, проведенными в работе [3]. Покажем равносильность (5) и (8), (9). Пусть выполняется условие (5). Тогда, как было уже показано, справедливо (9).

Лемма 4. *Если дивизор D удовлетворяет условию* (5), *то для любой точки x,* $-\infty < x < \infty$, *верно соотношение*

$$\mu\Big(C(x, \alpha \mid x \mid)\Big) \leq K_{11} v(|x|) \alpha, \qquad K_{11} > 0. \tag{25}$$

Доказательство. Оценим меру множества

$$\Delta_n = \{ z = re^{i\theta} : | r_n - r | \leq 5 \operatorname{Im} a_n, \ | \theta_n - \theta | \leq 15 \theta_n \}.$$

Получив эту оценку, мы сумеем показать, что

$$\mu\Big(\Delta_x^\alpha = \{ z : \Big| r - |x| \Big| < \alpha |x| ; \ \sin\theta < \sin\alpha \}\Big) \leq K_{12} v(|x|).$$

Последнее неравенство, очевидно, эквивалентно неравенству (25). Для всякой точки $a_k \in \Delta_n$ имеем

$$| \bar{a}_k - a_n |^2 / (r_k r_n)^2 \leq K_{12} \sin^2 \theta_n$$

при некотором $K_{12} > 0$. Отсюда получаем

$$\sum_{a_k \in \Delta_n} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{| \bar{a}_k - a_n |^2} \geq \frac{1}{K_{12} \sin \theta_n} \sum_{a_k \in \Delta_n} q_k \sin \theta_k .$$

Из последнего неравенства и из (12′) получаем

$$\mu(\Delta_n) \le K_{13} \sin\theta_n v(r_n), \qquad K_{13} > 0. \tag{26}$$

Нам понадобится следующее утверждение [10]: любое множество I непустых открытых интервалов, расположенных на отрезке $[a,b]$, содержит не более чем счетное подмножество I_0, состоящее из попарно непересекающихся интервалов и обладающее тем свойством, что любой интервал J, $J \in I$, содержится в одном из интервалов $5J_0$, $J_0 \in I_0$. Под интервалом $5J_0$ мы понимаем интервал $5J_0 = (x_0 - 5l, x_0 + 5l)$, где $J_0 = (x_0 - l, x_0 + l)$, $l > 0$.

Рассмотрим систему I всех интервалов J_n, $J_n = (r_n - \operatorname{Im} a_n, r_n + \operatorname{Im} a_n)$, содержащихся в $(x - 3\alpha\,|\,x\,|, x + 3\alpha\,|\,x\,|)$. Заметим, что если $a_n \in \Delta_x^\alpha$, то $J_n \subset (x - 3\alpha\,|\,x\,|, x + 3\alpha\,|\,x\,|)$. Кроме того, если $J_k \subset 5J_n$, то $a_k \in \Delta_n$.

Применяя это утверждение, найдем счетное множество I_0 ($I_0 \subset I$) интервалов такое, что его элементы попарно не пересекаются и любой интервал J_k, $J_k \in I$, покрывается некоторым интервалом $5J_n$, $J_n \in I_0$. Тогда

$$\mu(\Delta_x^\alpha) \le \frac{1}{2}\sum_{J_k \in I} \frac{\operatorname{mes} J_k}{r_k} \le \frac{1}{2}\sum_{J_n \in I_0}\ \sum_{J_k \subset 5J_n} \frac{\operatorname{mes} J_k}{r_k} \le \sum_{J_n \in I} \mu(\Delta_n)$$

(под выражением $\operatorname{mes} J$ мы понимаем длину интервала J).

Применяя неравенство (26), получаем, что

$$\mu(\Delta_x^\alpha) \le K_{14} \frac{v(|\,x\,|)}{|\,x\,|} \sum_{J_n \in I_0} \operatorname{Im} a_n = \frac{K_{14} v(|\,x\,|)}{2|\,x\,|} \times$$

$$\times \sum_{J_n \in I_0} \operatorname{mes} J_n \le 3K_{14}\,\alpha\, v(|\,x\,|), \qquad K_{14} > 0.$$

Таким образом, лемма 4 доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $z \in C^+$, $\sin(\arg z) \le \frac{1}{2}$, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, тогда

$$\mu\Big(C(z, \alpha\,|\,z\,|)\Big) \le K_{15}\,\alpha\,|\,z\,|, \quad K_{15} > 0. \tag{27}$$

Докажем далее, что

$$\sup_{a_n \in \Phi} I^+(a_n, 1/2) < \infty. \tag{28}$$

Предположим противное, т.е., что существуют такие последовательности $R_n \uparrow \infty$ и $\Lambda = \{\lambda_n = \tau_n e^{i\varphi_n}\} \subset A$, что

$$I^+(\lambda_n, 1/2) > R_n, \qquad \lambda_n \in \Lambda. \tag{29}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\tau_{n+1} > 2\tau_n$. Пусть $F(z)$ — функция со свойством (И) для последовательности $b_{n,k}$, где $b_{n,k} = 0$, если $a_n \overline{\in} \Lambda$, и $b_{n,1} = 1$, если $\lambda_n \in \Lambda$.

Запишем формулу Иенсена при $\lambda_n \in \Lambda$

$$\int_0^{\operatorname{Im}\lambda_n/2} \frac{n_{F\lambda_h}(\alpha)d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \left| F\left(\lambda_n + e^{i\theta}\frac{\operatorname{Im}\lambda_n}{2}\right) \right| d\theta, \tag{30}$$

где $n_{F,a}(\alpha)$ — число нулей функции $F(z)$ в круге $C(a,\alpha)$. Заметим, что при $\alpha \le \sin\varphi_n/2$

$$n_F\left(C(\lambda_n, \alpha\tau_n)\right) \ge n\left(C(\lambda_n, \alpha\tau_n)\right) - p_n, \tag{31}$$

где p_n — кратность λ_n в дивизоре D. Кроме того,

$$n\left(C(\lambda_n, \alpha\tau_n)\right) - p_n \ge \frac{2}{3\sin\varphi_n}\left[\mu\left(C(\lambda_n, \alpha\tau_n)\right) - \mu(\lambda_n)\right]. \tag{32}$$

Разделим обе части формулы (30) на $v(\tau_n)$. После замены переменных в подынтегральном выражении и использования соотношений (31), (32) получаем

$$\frac{1}{\sin\varphi_n}\int_0^{\sin\varphi_n/2} \frac{\Phi^+_{\lambda_n}(\alpha)d\alpha}{\alpha} \le K_{16}, \qquad K_{16} > 0. \tag{33}$$

Используя неравенство (27), нетрудно получить оценку

$$I^+(\lambda_n, 1/2) - I^+(\lambda_n, \sin\varphi_n/2) \le K_{17}, \qquad K_{17} > 0. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следуют выводы, вступающие в противоречие с (29).

З а м е ч а н и е: если в (29) $\sup\tau_n < \infty$, то можно считать, что $\operatorname{Im}\lambda_n > 2\operatorname{Im}\lambda_{n+1}$, $\lambda_n \in \Lambda$.

Для завершения доказательства (8) остается заметить, что при некотором K_{18} имеем

$$I^+(z, \sin\theta/2) \le K_{18}\, I^+(a_n, \sin\theta_n/2),$$

где a_n — ближайшая к точке z точка последовательности A, и затем воспользоваться неравенством (27).

Докажем теперь, что из (8), (9) следует (5). Воспользуемся неравенством, которое получено А. Ф. Гришиным [11]:

$$\ln\left|\frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}}\right| \ge \begin{cases} \dfrac{2\sin\varphi}{\sin\theta-\alpha}\ln\dfrac{\alpha}{2\sin\theta-\alpha}, & \alpha < \sin\theta \\ -\dfrac{4\sin\theta\sin\alpha}{\alpha^2}, & \alpha \ge \sin\theta, \end{cases}$$

где $z = re^{i\theta}$, $\arg\xi = \varphi$, $|z-\xi| = \alpha r$, $\varphi \ge 0$, $\theta > 0$.

Оценим с его помощью $A_n(a_n)$:

$$\ln|A_n(a_n)| \ge -\sum_{1/2 \ge \alpha_{n,k} \ge \sin\theta_n} \frac{4\sin\theta_n\, q_k \sin\theta_k}{\alpha^2_{n,k}} +$$

$$+2\sum_{0<\alpha_{n,k}<\sin\theta_n}\frac{q_k\sin\theta_k}{\sin\theta_n-\alpha_{n,k}}\ln\frac{\alpha_{n,k}}{2\sin\theta_n-\alpha_{n,k}},$$

где $\alpha_{n,k}=|a_n-a_k|/r_n$. То есть,

$$-\ln|A_n(a_n)|\le 4\sin\theta_n\int_{\sin\theta_n}^{1/2}\frac{d\mu_{a_n}(\alpha)}{\alpha^2}+2\int_0^{\sin\theta_n}\frac{1}{\sin\theta_n-\alpha}\ln\frac{2\sin\theta_n-\alpha}{\alpha}\,d\mu_{a_n}(\alpha),$$

где $\mu_{a_n}(\alpha)=\mu\left(C(a_n,\alpha r_n)\right)$.

После интегрирования по частям и элементарных преобразований нетрудно получить оценку:

$$-\ln|A_n(a_n)|\le K_{19}J^+(a_n,1/2)\nu(r),\qquad K_{19}>0,$$

из которой, а также из (9) и (11), следует (5).

В заключение автор выражает признательность А. Ф. Гришину за те замечания, которые он высказал во время подготовки этой статьи.

Список литературы

1. *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехтеоретиздат, Москва (1956), 632 с.
2. *Н. В. Говоров*, Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Наука, Москва (1986), 240 с.
3. *А. Ф. Гришин, А. М. Руссаковский*, Свободная интерполяция целыми функциями. — Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1985), вып. 44, с. 32—42.
4. *А. М. Руссаковский*, Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного.— Харьков (1982), 64 с. Деп. в ВИНИТИ 1982, № 5087—82, с. 1—64.
5. *А. М. Руссаковский*, Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного.— Докл. АН СССР (1983), т. 269, № 4, с. 814—817.
6. *А. М. Руссаковский*, Интерполяция в классах голоморфных функций одной и многих переменных с индикатором, не превосходящим данного: Дис. канд. физ.-мат. наук.— Харьков (1984), 122 с.
7. *П. Кусис*, Введение в теорию пространств H^p. Мир, Москва (1984), 368 с.
8. *И. В. Виденский*, Кратная интерполяция произведениями Бляшке.— Зап. науч. семин. ЛОМИ (1977), т. 73, с. 195—201.
9. *Нгуен Тхьонг Уен*, Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1979), вып. 31, с. 119—129.
10. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин*, Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций.— Зап. науч. семин. ЛОМИ (1974), т. 47, с. 15—54.
11. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1968), вып. 7, с. 59—84.

The problem of multiple interpolation in the class of analytical functions of a completely regular growth in an open half-plane

K. G. Malyutin

The problem of multiple interpolation is studied under condition that the canonical product of an interpolated divisor is the function of a completely regular growth in an open half-plane. The necessary and sufficient conditions for a solution of the problem are given in terms both of the canonical product and a measure which is defined with the divisor.