Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 513–519

УДК 517.982

Замечание об аналитической представимости отображений, обратных к интегральным операторам

М. И. Островский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 15 октября 1993 г.

В работе найден обширный класс пар (E,F) банаховых функциональных пространств, таких, что для любого счетного ординала α существует линейный инъективный интегральный оператор $T: E \to F$, ядро которого является аналитической функцией двух переменных, а обратный оператор $T^{-1}: TE \to E$ не принадлежит борелевскому классу α.

У роботі знайдено широкий клас пар (E,F) банахових функціональних просторів, таких, що для будь-якого зчисленного ординалу α існує лінійний ін'єктивний інтегральний оператор $T: E \to F$, ядро якого є аналітична функція двох змінних, а обернений оператор $T^{-1}: TE \to E$ не належить до борелівського класу α.

Напомним некоторые определения [1, с. 401, 382]. Пусть X и Y — метрические пространства. Наименьшее семейство отображений из X в Y, содержащее все непрерывные отображения и все пределы сходящихся последовательностей принадлежащих ему отображений, называется семейством аналитически представимых функций. Это семейство можно представить в виде объединения $\bigcup_{\alpha \in \Omega} \Phi_\alpha$, где Ω — множество всех счетных ординалов, а Φ_α определены следующим образом:

1. Φ_0 состоит из всех непрерывных отображений.

2. Класс Φ_α, $\alpha > 0$, состоит из всех отображений, представляющих собой пределы сходящихся последовательностей отображений из $\bigcup_{\xi < \alpha} \Phi_\xi$.

Отображение $f: X \to Y$ называется B-измеримым класса α, если для любого замкнутого подмножества $F \subset Y$ множество $f^{-1}(F)$ есть борелевское множество мультипликативного класса α.

Известно [2,3], что если Y — сепарабельное банахово пространство, то класс Φ_α совпадает со множеством B-измеримых отображений класса α при конечном α, и со множеством B-измеримых отображений класса $\alpha + 1$ при бесконечном α. Кроме того, известно [4] что, если пространство Y банахово, то (важный в теории некорректных задач) класс регуляризуемых отображений из X в Y совпадает с Φ_1.

Пусть F и G — банаховы пространства функций на отрезке $[0,1]$, а $T: F \to G$ — инъективный интегральный оператор с аналитическим ядром. Вопрос, рассматриваемый в настоящей статье, посвящен определению класса аналитически представимых функций, которому может принадлежать отображение $T^{-1}: TF \to F$.

Дадим некоторые пояснения.

1. Под аналитическим ядром мы понимаем такое отображение $K: [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{C}$, что для некоторых открытых подмножеств Γ и Δ в $\mathbf{C}$, содержащих $[0,1]$, найдется продолжение функции K на $\Gamma\times\Delta$, являющееся аналитической функцией двух переменных.

2. Если рассматриваемые пространства вещественны, то будем рассматривать отображения K, принимающие только вещественные значения.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство того, что для обширного класса пар (F,G) функциональных пространств существуют инъективные интегральные операторы из F в G с аналитическими ядрами, обратные которым принадлежат только "далеким" классам Φ_α. Точнее, для любого счетного ординала α найдется такой инъективный интегральный оператор $T: F \to G$ с аналитическим ядром, что $T^{-1}: TF \to F$ не принадлежит классу Φ_α.

Этот результат является обобщением результата Л. Д. Менихеса [5], который построил пример интегрального оператора из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с бесконечно дифференцируемым ядром и нерегуляризуемым обратным. А. Н. Пличко [6] обобщил результат работы [5] на обширные классы функциональных пространств. О связи наших результатов с результатами работы [6] см. ниже замечание 3.

Будем использовать терминологию и обозначения книги [7].

Для подмножества A банахова пространства X через $\mathrm{cl}A$, $\mathrm{lin}A$ и $A^\perp$ будем обозначать замыкание множества A в сильной топологии, линейную оболочку множества A и $\{x^* \in X^*: (\forall\ x \in A)(x^*(x) = 0)\}$ соответственно. Для подмножества A сопряженного банахова пространства X^* через $A^\top$ будем обозначать $\{x \in X: (\forall\ x^* \in A)(x^*(x) = 0)\}$. Через w^*-lim будем обозначать предел в слабой* топологии.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда F — сепарабельное банахово пространство функций на отрезке $[0,1]$, непрерывно инъективно вложенное в пространство $L_1(0,1)$. Нетрудно видеть, что это предположение выполнено для всех классических сепарабельных функциональных банаховых пространств. О несепарабельных пространствах, непрерывно инъективно вложенных в пространство $L_1(0,1)$, см. замечание 4 в конце статьи.

Пусть Γ — некоторая ограниченная открытая область в комплексной плоскости, содержащая замкнутый отрезок $[0,1]$.

Пусть f — функция, аналитическая в Γ и непрерывная на замыкании области Γ. (Если рассматриваемые пространства вещественны, то дополнительно потребуем, чтобы f принимала вещественные значения на вещественной оси.) Функции f соответствует функционал на $L_1(0,1)$, действующий по формуле

$$f(x) = \int_0^1 f(t)x(t)dt.$$

Так как F непрерывно вложено в $L_1(0,1)$, то f естественным образом порождает функционал на F. Обозначим через U подмножество в F^*, состоящее из всех функционалов такого типа. Положим $M = \mathrm{cl}U$. Ясно, что M — замкнутое линейное подпространство в F^*. Каждый элемент из F можно рассматривать как функционал на M. Определенный таким образом оператор из F в M^* мы обозначим через H.

Замечание 1. Подпространство M является тотальным в F^*. Это следует из того, что F инъективно вложено в $L_1(0,1)$, и из того, что множество функционалов, порожденных полиномами, тотально в $(L_1(0,1))^*$.

Основным результатом настоящей статьи является следующий.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{cl}H(F)$ *имеет бесконечную коразмерность в* M^*, *и пусть пространство* G *содержит линейно независимую бесконечную последовательность, состоящую из функций, имеющих аналитические продолжения на некоторую открытую область* Δ *комплексной плоскости, содержащую замкнутый отрезок* $[0,1]$. *Тогда для любого счетного ординала* α *найдется такой линейный непрерывный инъективный интегральный оператор* $T: F \to G$ *с аналитическим ядром, что* $T^{-1}: TF \to F$ *не принадлежит классу* Φ_α.

Введем необходимые определения. Пусть X — банахово пространство. Слабым* секвенциальным замыканием подмножества $V \subset X^*$ называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из V. Обозначается слабое* секвенциальное замыкание через $V_{(1)}$. Для ординала α слабым* секвенциальным замыканием порядка α подмножества $V \subset X^*$ называется множество $\bigcup_{\beta < \alpha}(V_{(\beta)})_{(1)}$.

Теорема 2. (А. Н. Пличко [8]). *Пусть* X — *сепарабельное банахово пространство, а* Y — *произвольное банахово пространство. Пусть* $T: X \to Y$ — *линейный непрерывный инъективный оператор. Если оператор* $T^{-1}: TX \to X$ *принадлежит классу* Φ_α, *то* $(T^* Y^*)_{(\alpha)} = X^*$ *для конечного* α *и* $(T^* Y^*)_{(\alpha+2)} = X^*$ *для бесконечного* α. *Наоборот, если* $(T^* Y^*)_{(\alpha)} = X^*$ *для конечного* α *или* $(T^* Y^*)_{(\alpha+1)} = X^*$ *для бесконечного* α, *то оператор* $T^{-1}: TX \to X$ *принадлежит классу* Φ_α.

Доказательство теоремы 1 основано на теореме 2 и на следующем предложении.

Предложение. *Пусть* F *и* M *удовлетворяют условию теоремы 1. Тогда для любого счетного ординала* β *можно найти такое тотальное подпространство* K *в* M, *что* $K_{(\beta)} \neq F^*$.

Доказательство. Воспользовавшись результатом В. Дэвиса и В. Джонсона [9, с. 360], находим в M слабо* сходящуюся к нулю последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и такую ограниченную последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в F^{**}, что для некоторого разбиения $\{\dot{I}_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества натуральных чисел на бесконечные попарно непересекающиеся подмножества будем иметь:

$$v_k(u_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \dot{I}_k, \\ 0, & \text{если } n \notin \dot{I}_k. \end{cases}$$

Воспользовавшись рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы III.1 в [10], находим в $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую слабо* базисную подпоследовательность $\{u_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, что пересечение $\dot{I}_k \cap \{n(i)\}_{i=1}^{\infty}$ является бесконечным множеством для любого $k \in N$. Нетрудно видеть, что последовательность $\{ u_{n(i)} \}_{i=1}^{\infty}$ можно проредить и перенумеровать так, что для полученной последовательности $\{ y_j \}_{j=0}^{\infty}$ будем иметь

$$v_k(y_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ представимо в виде } j = n(n+1)/2 + k,\ k \le n \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения слабо* базисной последовательности вытекает, что в пространстве $Z = F/\left(\{ y_j \}_{j=0}^{\infty}\right)^{\mathrm{T}}$ можно найти базис $\{ z_j \}_{j=0}^{\infty}$, для которого $y_j(z_k) = \delta_{jk}$. Нетрудно видеть, что последовательность $\{ z_j \}_{j=0}^{\infty}$ отделена от нуля, и что множество

$$\left\{ \sum_{i=j}^{k} z_{i(i+1)/2+j} \right\}_{j=0,k=j}^{\infty\ \ \infty}$$

ограниченно.

Можем, не уменьшая общности, считать, что $\| z_i \| \le 1$ для любого $i \in N$. Воспользовавшись рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 1 в [11], находим такое подпространство N в $\mathrm{cl}\,\mathrm{lin}\,\{ y_j \}_{j=0}^{\infty}$ и такую ограниченную последовательность $\{ h_n \}_{n=1}^{\infty}$ в Z^{**}, что выполнены условия:

а) если слабо* сходящаяся последовательность $\{ x_m^* \}_{m=1}^{\infty}$ содержится в $N_{(\gamma)}$ для некоторого $\gamma < \beta$ и $x^* = w^* - \lim\limits_{m \to \infty} x_m^*$, то

$$h_n(x^*) = \lim_{m \to \infty} h_n(x_m^*);$$

в) найдется такое семейство $\{ x_{n,m}^* \}_{n=1,m=1}^{\infty\ \ \infty}$ векторов из $N_{(\beta)}$, что для любых $k, n \in N$ имеем

$$w^* - \lim_{m \to \infty} x_{n,m}^* = 0, \ (\ \forall\ m \in N) \quad \left(h_k(x_{n,m}^*) = \delta_{k,n} \right).$$

Пусть $\{ s_k^* \}_{k=1}^{\infty}$ — нормированная тотальная последовательность в M. Пусть $c_1 = \sup_n \| h_n \|$. Пусть $\nu_n > 0$ ($n \in N$) таковы, что $\Sigma_{n=1}^{\infty} \nu_n < 1/(2c_1)$. Пространство Z^* будем отождествлять с его образом при естественном изометричном вложении в F^*. Не уменьшая общности, можем считать, что $Z^* \ne F^*$.

Обозначим через g_n прододжения с сохранением нормы функционалов h_n на все пространство F^*. Введем оператор $R : F^* \to F^*$ равенством

$$R(x^*) = x^* + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n g_n(x^*) s_n^*.$$

Нетрудно проверить, что $\| R - \dot{I} \| \le 1/2$ (здесь $\dot{I}$ — тождественный оператор), следовательно, R — изоморфизм.

Положим $K = R(N)$. Точно так же, как и в [11], доказываем, что для любого $\gamma \le \beta$ имеет место соотношение

$$K_{(\gamma)} = R(N_{(\gamma)}) \tag{1}$$

Так как R — изоморфизм, то из соотношений $K_{(\beta)} = R(N_{(\beta)})$ и $N_{(\beta)} \subset Z^* \ne F^*$ вытекает, что $K_{(\beta)} \ne F^*$. В то же время, из (1) и условия b вытекает, что

$R(x^*_{n,m}) = x^*_{n,m} + \nu_n s^*_n \in K_{(\beta)}$, следовательно $s^*_n \in K_{(\beta+1)}$. В силу тотальности последовательности $\{ s^*_n \}$ отсюда вытекает тотальность подпространства K. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Применив предложение с $\beta = \alpha + 2$, находим в M подпространство K, для которого $K_{(\alpha+2)} \neq F^*$. Воспользовавшись хорошо известными рассуждениями (см., например, [7, с.43,44]), находим в F фундаментальную минимальную систему $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, биортогональные функционалы $\{f^*_i\}_{i=1}^{\infty}$ которой содержатся в K и образуют тотальную последовательность. Нетрудно показать (см., например, [12]), что существует такой изоморфизм $S: F \to F$, что функционалы $S^* f^*_i$ $(i \in N)$ принадлежат U. Введем обозначение $g^*_i = S^* f^*_i$ $(i \in N)$. Ясно, что

$$\left(\mathrm{cl\,lin}\,(\{ g^*_i \}_{i=1}^{\infty})\right)_{(\alpha+2)} \neq F^*. \tag{2}$$

Уменьшив при необходимости область Δ, можем считать, что Δ ограниченна, а также, что пространство G содержит последовательность функций, которые имеют аналитические продолжения на Δ, непрерывные на замыкании области Δ.

Используя стандартную процедуру биортогонализации (см., например, [7, с. 43, 44]), выделяем в G минимальную последовательность $\{ q_i \}_{i=1}^{\infty}$, состоящую из функций, имеющих аналитические продолжения $\{ \widetilde{q}_i \}_{i=1}^{\infty}$ на область Δ, непрерывные на замыкании области Δ.

Введем числа

$$a_i = \max \{ \| q_i \|_G, \sup_{t \in \Delta} | \widetilde{q}_i(t) | \}, \quad (i \in N).$$

Пусть r_i — функции, аналитические в Γ и непрерывные на замыкании области Γ, которые порождают функционалы g^*_i $(i \in N)$. Введем числа

$$b_i = \max \{ \| g^*_i \|_{F^*}, \sup_{t \in \Gamma} | r_i(t) | \}, \quad (i \in N).$$

Введем оператор $T: F \to G$ равенством

$$T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} g^*_i(f) q_i / (2^i a_i b_i). \tag{3}$$

Этот оператор можно рассматривать как интегральный оператор с ядром

$$K(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t_1)\, \widetilde{q}_i(t_2) / (2^i a_i b_i)$$

Из определения чисел a_i и b_i вытекает, что этот ряд сходится к функции, аналитической в $\Gamma \times \Delta$.

Оператор T инъективен, так как последовательность $\{ g^*_i \}_{i=1}^{\infty}$ тотальна, а последовательность $\{ q^*_i \}_{i=1}^{\infty}$ минимальна. Легко видеть, что $T^* G^* \subset \mathrm{cl\,lin}\, \{ g^*_i \}_{i=1}^{\infty}$. Воспользовавшись соотношением (2), получаем $(T^* G^*)_{(\alpha+2)} \neq F^*$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что оператор T^{-1} не принадлежит классу Φ_α. Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что ограничение, наложенное на пространство G, выполнено, если хотя бы для какого-нибудь бесконечномерного функционального пространства существует инъективный интегральный оператор с аналитическим ядром из F в G.

Замечание 3. Если подпространство $M \subset F^*$ является нормирующим, то бесконечная коразмерность $\mathrm{cl}\, H(F)$ в M^* эквивалентна бесконечной коразмерности $\mathrm{lin}\left(M^{\perp} \cup F\right)$ в F^{**}. Поэтому теоремы 1 и 2 работы [6] могут быть получены с помощью рассуждений из настоящей работы. Кроме того, отсюда следует, что многие из пространств, рассматриваемых в [6], удовлетворяют условиям теоремы 1 настоящей работы. В частности, это так для классических нерефлексивных пространств.

Замечание 4. Пусть F — несепарабельное функциональное банахово пространство, непрерывно инъективно вложенное в $L_1(0,1)$, а G — функциональное пространство, для которого выполнено условие теоремы 1. Пусть $\{g_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная тотальная последовательность функционалов из F^*, представимых функциями, аналитическими в одной и той же области. Пусть $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность, введенная при доказательстве теоремы 1. Введем оператор T равенством (3). Это — инъективный интегральный оператор с аналитическим ядром. Ясно, что образ этого оператора сепарабелен. Поэтому отображение $T^{-1} : TF \to F$ не является аналитически представимым, так как образ сепарабельного пространства под действием аналитически представимого отображения сепарабелен.

Список литературы

1. *К. Куратовский*, Топология, т. 1, Мир, Москва (1966), 594 с.
2. *S. Banach*, Uber analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Raumen.— Fund. math. (1931), v. 17, p. 283-295.
3. *S. Rolewicz*, On inversion of nonlinear transformations.— Stud. Math. (1958), v. 17, p. 79—83.
4. *В. А. Винокуров*, Регуляризуемость и аналитическая представимость.— Докл. АН СССР (1975), т. 220, № 2, с. 269—272.
5. *Л. Д. Менихес*, О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам.— Докл. АН СССР (1978), т. 241, № 2, с. 282—285.
6. *А. Н. Пличко*, Ненормирующие подпространства и интегральные операторы с нерегуляризуемым обратным.— Сиб. мат. журн. (1988), т. 29, № 4, с. 208—211.
7. *J. Lindenstrauss, L. Tzafriri*, Classical Banach spaces, v. I. Springer, Berlin (1977), 188 p.
8. *А. Н. Пличко*, Слабые* секвенциальные замыкания и B-измеримость отображений, обратных к линейным непрерывным операторам в WCG-пространствах. Новосибирск (1980), 17 с.— Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 4931.
9. *W. J. Davis, W. B. Johnson*, Basic sequences and norming subspaces in nonquasireflexive Banach spaces.— Isr. J. Math. (1973), v. 14, p. 353—367.
10. *W. B. Johnson, H. P. Rosenthal*, On w^* basic sequences and their applications to the study of Banach spaces.— Stud. math. (1972), v. 43, p. 77—92.
11. *M. I. Ostrovskii*, Total subspaces with long chains of nowhere norming weak* sequential closures.— Note Mat. (1993), v. 13, p. 310—321.
12. *М. И. Островский*, Регуляризуемость обратных линейных операторов в банаховых пространствах с базисом.— Сиб. мат. журн. (1992), т. 33, № 3, с. 123—130.

Note on analytical representability of maps inverse to integral operators

M. I. Ostrovskii

A wide class of pairs of Banach functionals paces (E,F), such that for every countable ordinal α there exists a linear injective integral operator $T : E \to F$ with analytic kernel and the inverse operator $T^{-1} : TE \to E$ not of α Borel class, is found.