Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 520–528 УДК 514

К теории кривизны грассманова образа подмногообразий в евклидовом пространстве

В. М. Савельев

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

Изучается кривизна грассманова образа подмногообразий F^n в евклидовом пространстве E^{n+k} знакопостоянной секционной кривизны. Подробно исследован случай $F^2 \subset E^{2+k}$ и $F^3 \subset E^5$. Показано, что при некоторых условиях из положительности секционной кривизны $F^3 \subset E^5$ следует, что кривизна грассманова образа $F^3 \subset E^5$ принадлежит интервалу $(0,1]$.

Вивчається кривина грасманова образу підмноговидів F^n знакопостійної кривини в евклідовому просторі. Докладно досліджено випадок $F^2 \subset E^{2+k}$ і $F^3 \subset E^5$. Показано, що при деяких умовах із додатності секційної кривини $F^3 \subset E^5$ випливає, що кривина грасманова образа належить до інтервалу $(0,1]$.

Пусть F^n — регулярное подмногообразие в евклидовом пространстве E^{n+k}. Каждой точке $x \in F^n$ поставим в соответствие k-мерное пространство N^k, проходящее через фиксированную точку 0 параллельно пространству N_x^k, нормальному к подмногообразию F^n в точке x. Это соответствие задает отображение подмногообразия F^n в грассманово многообразие $G_{k,n+k}$. Образ этого отображения, который будем обозначать через Γ^n, называется грассмановым образом подмногообразия. В работе Ю. А. Аминова [4] было показано, что если поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет гауссову кривизну $k>0$, то кривизна $G_{2,4}$ для площадки, касательной к Γ^2, меньше или равно 1. Нами установлен аналогичный результат для двумерных поверхностей произвольной коразмерности.

Теорема 1. *Пусть $F^2 \subset E^{2+k}$ — регулярная поверхность. Тогда:*

1) *если гауссова кривизна метрики этой поверхности $k>0$, то грассманов образ Γ^2 является регулярным подмногообразием в $G_{2,2+k}$ и кривизна $\bar{k}$ многообразия Грассмана $G_{2,2+k}$ для площадки, касательной к Γ^2, лежит в пределах $\bar{k} \in (0,1]$;*

2) *если поверхность минимальна, то $\bar{k} \in [1,2]$;*

3) *если поверхность $F^2 \subset E^{2+k}$ имеет невырожденный грассманов образ и нулевую гауссову кривизну, то $\bar{k} < 1$.*

В настоящей работе исследуется также грассманов образ трехмерного подмногообразия F^3 в пятимерном евклидовом пространстве E^5 при наложении ряда дополнительных условий (ср. [6]). Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в пространстве, касательном к регулярному подмногообразию $F^3 \subset E^5$ знакопостоянной секционной кривизны, в каждой точке имеются ортогонально сопряженные подпространства T_1^1 и T_2^2 размерностей соответственно* 1 *и* 2. *Тогда*:

1) *грассманов образ Γ^3 является регулярным подмногообразием в $G_{2,5}$*;

2) *если кривизна $F^3 \subset E^5$ положительна, то кривизна многообразия Грассмана $G_{2,5}$ для площадок, касательных к Γ^3, и площадок, ортогональных Γ^3, лежит в интервале* $(0,1]$;

3) *если кривизна $F^3 \subset E^5$ отрицательна, то кривизна для площадок, касательных к Γ^3, и площадок, ортогональных Γ^3, лежит в открытом интервале* $(0,1)$.

1. Рассмотрим n-мерное подмногообразие F^n, погруженное в $(n+k)$-мерное евклидово пространство E^{n+k}. Тогда возникают его касательное и нормальное векторные расслоения TF^n и NF^n. К этим расслоениям можно присоединить ортонормированный подвижный репер, так что

$$e_i \in T_x F^n, \qquad i, j, l = 1,\dots,n,$$

$$e_\alpha \in N_x F^n, \qquad \alpha, \beta, \gamma = n+1,\dots,n+k.$$

Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$dx = \omega^i e_i, \qquad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \qquad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta. \tag{1}$$

Внешние производные уравнений $\omega^\alpha = 0$ дают $[\omega^i \omega_i^\alpha] = 0$, что приводит к уравнениям

$$\omega_i^\alpha = L_{ij}^\alpha \omega^j, \ L_{ij}^\alpha = L_{ji}^\alpha. \tag{2}$$

Величины L_{ij}^α образуют второй фундаментальный тензор подмногообразия F^n.

Пфаффовы формы ω^I и ω_I^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^I = [\omega^K \omega_K^I], \tag{3}$$

$$D\omega_I^K = [\omega_I^L \omega_L^K], \tag{4}$$

$$\omega_I^K + \omega_K^I = 0, \qquad I,K,L = 1,\dots,n+k. \tag{5}$$

Грассманово отображение $x \in F^n \xrightarrow{\psi} p = [e_{n+1},\dots,e_{n+k}]$, $\psi(F^n) = \Gamma^n \subset G_{k,n+k}$ будем строить с помощью поливектора, построенного на векторах базиса нормального пространства N_x^k. Набор плюккеровых координат образует некоторый вектор $p = p(x)$ в E^n, где $N = C_{n+k}^n$ — число компонент поливектора. Имеем:

$$dp = [de_{n+1}, e_{n+2},\dots,e_{n+k}] + [e_{n+1}, de_{n+2},\dots,e_{n+k}] + \dots = \sum_\alpha [e_{n+1},\dots,de_\alpha,\dots,e_{n+k}].$$

Согласно формулам (1) получаем

$$dp = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \, [e_{n+1},\ldots,\overset{\alpha}{e_i},\ldots,e_{n+k}]. \tag{6}$$

Отсюда видно, что $n\cdot k$ поливекторов $[e_{n+1},\ldots,\overset{\alpha}{e_i},\ldots,e_{n+k}]$ образуют базис пространства, касательного к многообразию Грассмана $G_{k,n+k}$, в точке, соответствующей по грассманову отображению точке x.

Найдем теперь второй дифференциал поливектора p:

$$\begin{gathered} d^2p = \sum_{\alpha,i} d\omega^i_\alpha \, [e_{n+1},\ldots,\overset{\alpha}{e_i},\ldots,e_{n+k}] + \\ + \sum_\alpha \omega^i_\alpha \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ i\neq j}} \omega^j_\beta \, [e_{n+1},\ldots,\overset{\alpha}{e_i},\ldots,\overset{\beta}{e_j},\ldots,e_{n+k}] + \sum_i \sum_\alpha \omega^i_\alpha \omega^\alpha_i \, p + \ldots . \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь многоточие означает, что дальше идут слагаемые, являющиеся линейными комбинациями касательных векторов. Первое выражение в правой части полученного равенства является линейной комбинацией векторов, касательных к $G_{k,n+k}$. Третье выражение есть вектор, направленный по вектору p. Нетрудно теперь показать, что поливекторы $[e_{n+1},\ldots,\overset{\alpha}{e_i},\ldots,\overset{\beta}{e_j},\ldots,e_{n+k}]$ ортогональны всем векторам, касательным к $G_{k,n+k}$. Поэтому они являются нормалями к $G_{k,n+k} \subset S^{N-1}$. Будем их обозначать через $\nu^{\alpha\beta}_{ij}$ ($\alpha \neq \beta$, $i \neq j$). Следовательно, мы получим набор вторых квадратичных форм $G_{k,n+k}$ как подмногообразия в S^{N-1} для направлений, касательных к грассманову образу подмногообразия $F^n \subset E^{n+k}$:

$$\Phi_\sigma \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ i & j \end{smallmatrix}\right) = 2(\omega^i_\alpha \, \omega^j_\beta - \omega^j_\alpha \, \omega^i_\beta). \tag{8}$$

Принимая во внимание формулы (2) и (5) получаем

$$\Phi_\sigma \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ i & j \end{smallmatrix}\right) = 2\left(L^\alpha_{ir} L^\beta_{js} + L^\alpha_{is} L^\beta_{jr} - L^\alpha_{jr} L^\beta_{is} - L^\alpha_{js} L^\beta_{ir}\right) \omega^r \omega^s. \tag{9}$$

Пусть $\{ z_i \}$ — базис касательного пространства грассманова образа подмногообразия $F^n \subset E^{n+k}$. Пусть имеют место разложения $X = a^i Z_i$, $Y = b^j Z_j$. Так как $G_{k,n+k}$ является подмногообразием в S^{N-1}, то из уравнения Гаусса следует

$$\overline{K}(X,Y) = \overline{K}_E(X,Y) + 1, \tag{10}$$

где $\overline{K}(X,Y)$ — кривизна многообразия Грассмана $G_{k,n+k}$ для площадки $[X,Y]$, касательной к грассманову образу $F^n \subset E^{n+k}$, а $\overline{K}_E(X,Y)$ — внешняя кривизна $G_{k,n+k} \subset S^{N-1}$ для той же площади.

Тензор внешней кривизны $G_{k,n+k} \subset S^{N-1}$ в точке $Z = 0$ для площадки $[Z_i Z_j]$ будем обозначать через Δ_{ijij}. Используя (9) находим

$$\Delta_{ijij} = -\sum_{\alpha<\beta} \left(\sum_{r,s} \left((L^\alpha_{ir} L^\beta_{js} - L^\alpha_{is} L^\beta_{jr} + L^\alpha_{js} L^\beta_{ir} - L^\alpha_{jr} L^\beta_{is})^2 - \right.\right.$$

$$\ldots-4(L^{\alpha}_{ir}L^{\alpha}_{js}-L^{\alpha}_{jr}L^{\alpha}_{is})(L^{\beta}_{is}L^{\beta}_{jr}-L^{\beta}_{ir}L^{\beta}_{js})\Big)\Big). \tag{11}$$

2. Докажем теорему 1. Пусть $F^2\subset E^{2+k}$ — регулярная поверхность. Воспользуемся специальным ортонормированным базисом в нормальном пространстве, выбор которого предложен Ю. А. Аминовым [2]. Вектор e_3 направим вдоль вектора нормальной кривизны u_1-линии, вектор e_4 — ортогонально e_3 так, чтобы он лежал в плоскости эллипса нормальной кривизны. Вектор e_5 выберем из некоторого трехмерного пространства, содержащего точку $x\in F^2$ и ее эллипс нормальной кривизны, и направим его ортогонально плоскости эллипса. Остальные орты выбираются произвольно. В данном базисе вторые квадратичные формы поверхности $F^2\subset E^{2+k}$ имеют вид:

$$\mathrm{II}(e_3)=a_{11}g_{11}\,du_1^2+2a_{12}\sqrt{g_{11}g_{22}}\,du_1\,du_2+a_{22}g_{22}\,du_2^2,$$
$$\mathrm{II}(e_4)=2b_{12}\sqrt{g_{11}g_{22}}\,du_1\,du_2+b_{22}g_{22}\,du_2^2,$$
$$\mathrm{II}(e_5)=c_{11}g_{11}\,du_1^2+c_{11}g_{22}\,du_2^2,$$
$$\mathrm{II}(e_p)=0,\qquad 4\le p\le 2+k.$$

Можем считать, что в фиксированной точке x коэффициенты $g_{11}=g_{22}=1$. Следовательно, имеем

$$\Delta_{1212}=-(a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)b_{12}^2-(a_{11}c_{11}+a_{22}c_{11})^2+$$
$$+4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)c_{11}^2-b_{22}^2c_{11}^2-4b_{12}^2c_{11}^2.$$

По теореме Гаусса (K — гауссова кривизна)

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2-b_{12}^2+c_{11}^2=K.$$

Поэтому получаем

$$\Delta_{1212}=-4b_{12}^2K-4b_{12}^4-4a_{12}^2c_{11}^2-b_{22}^2c_{11}^2-(a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12})^2-c_{11}^2(a_{11}-a_{22})^2.$$

Теперь нетрудно заметить, что если $K>0$, то $\Delta_{1212}\le 0$, а это означает, что согласно (10), $\overline{K}\le 1$.

Для минимальной поверхности $b_{22}=c_{11}=0$, $a_{11}+a_{22}=0$. Тогда

$$\Delta_{1212}=-4a_{12}^2b_{12}^2-4b_{12}^4-4b_{12}^2K=4a_{11}^2b_{12}^2\ge 0.$$

Поэтому для минимальной поверхности $\overline{K}\in[1,2]$.

Пусть теперь мы имеем поверхность $F^2\subset E^{2+k}$ с нулевой гауссовой кривизной и невырожденным грассмановым образом. Рассмотрим в этом случае выражение Δ_{1212} при условии $K=0$. Предположим, оно равняется нулю. Тогда будем иметь следующие варианты:

$$a)\ \ b_{12}=c_{11}=a_{11}=a_{12}=0,\qquad b_{22}\ne 0,\qquad a_{22}\ne 0;$$

$$б)\ b_{12} = c_{11} = b_{22} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0;$$

$$c)\ b_{12} = a_{12} = b_{22} = 0, \quad c_{11} \neq 0, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Касательные векторы, определяющие площадку, касательную к грассманову образу Γ^2 поверхности $F^2 \subset E^{2+k}$, выражаются через коэффициенты второй квадратичной формы (см. [1]) и имеют вид

$$Z_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b_{12} \\ c_{11} & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \\ 0 & c_{11} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В случае a) мы получаем нулевой вектор Z_1. Нетрудно заметить далее, что в случае $б$) векторы Z_1 и Z_2 коллинеарные. Рассмотрим теперь случай c). Так как

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - b_{12}^2 + c_{11}^2 = 0 = a_{11}^2 + c_{11}^2,$$

то отсюда следует, что $c_{11} = a_{11} = a_{22} = 0$. Таким образом, во всех трех случаях мы имеем вырожденный грассманов образ. Это означает, что для поверхности $F^2 \subset E^{2+k}$ с невырожденным грассмановым образом и нулевой гауссовой кривизной $\overline{K} < 1$. Для того чтобы в случае знакопостоянной кривизны грассманов образ был вырожден, необходимо, чтобы $c_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Но это противоречит условию знакопостоянства кривизны K. Следовательно, теорема 1 доказана полностью.

Рассмотрим теперь подмногообразие $F^3 \subset E^5$. Для удобства вычислений коэффициенты вторых квадратичных форм мы будем обозначать через a_{ij} и b_{ij}. Пусть в пространстве, касательном к регулярному подмногообразию $F^3 \subset E^5$, в каждой точке существуют ортогонально сопряженные подпространства T_1^1 и T_2^2 размерностей соответственно 1 и 2 (сопряженность подпространств означает, что направления векторов X и Y из любых двух различных подпространств сопряжены, т.е. $B(X,Y) = 0$, где $B : (X,Y) \to L_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha = B(X,Y)$ представляет собой вторую фундаментальную форму подмногообразия $F^n \subset E^{n+k}$.

Теперь специализируем репер в касательном пространстве таким образом, чтобы векторы e_i $(i = 1,2)$ принадлежали подпространству T_2^2, а вектор e_3 — подпространству T_1^1. В этом случае матрицы вторых квадратичных форм (a_{ij}) и (b_{ij}) можно с помощью поворотов в подпространстве T_2^2 и нормальном пространстве $N_x F^3$ привести к виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Вычисляя компоненты тензора кривизны получаем

$$R_{2323} = a_{22}\, a_{33}, \quad R_{1313} = a_{11}\, a_{33}, \quad R_{1212} = a_{11}\, a_{22} + b_{11}\, b_{22} - a_{12}^2,$$
$$R_{3112} = R_{1223} = 0, \quad R_{2331} = -\, a_{12} a_{33}.$$

Следовательно, для того чтобы данное подмногообразие имело всюду положительную секционную кривизну, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$R_{2323} > 0, \quad R_{1313} > 0, \quad R_{1212} > 0,$$
$$R_{2323}\, R_{1313} - R_{2331}^2 = a_{33}^2\, (a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2) > 0. \tag{14}$$

Пространство, касательное к грассманову образу подмногообразия $F^3 \subset E^5$ в точке $Z = 0$, есть трехмерное пространство, натянутое на векторы ([1]),

$$Z_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $X = a^1 Z_1 + a^2 Z_2 + a^3 Z_3$, $Y = b^1 Z_1 + b^2 Z_2 + b^3 Z_3$. Для того чтобы найти кривизну многообразия Грассмана $G_{2,5}$ в точке $Z = 0$ по двумерной площадке $[XY]$ согласно формуле (10), достаточно найти внешнюю кривизну $\overline{K}_E(X,Y)$ подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$. Если $\overline{K}_E(X,Y) > 0$, то $\overline{K}(X,Y) > 1$, если $\overline{K}_E(X,Y) = 0$, то $\overline{K}(X,Y) = 1$ и наконец, если $\overline{K}_E(X,Y) < 0$, то $\overline{K}(X,Y) < 1$.

Согласно (9) для $G_{2,5}$, как для подмногообразия в S^9, имеем следующий набор вторых квадратичных форм:

$$\Phi(\nu_{23}) = -\, 2a_{33}\, b_{22}\, \omega^2 \omega^3,$$
$$\Phi(\nu_{31}) = 2a_{33}\, b_{11}\, \omega^1 \omega^3,$$
$$\Phi(\nu_{12}) = -\, 2a_{12}\, b_{11}\, (\omega^1)^2 + 2a_{12}\, b_{22}\, (\omega^2)^2 + 2(a_{11}\, b_{22} - a_{22}\, b_{11})\omega^1 \omega^2,$$

в котором мы для краткости опустили индексы $\alpha = 4$, $\beta = 5$. Теперь нетрудно найти компоненты тензора внешей кривизны $G_{2,5} \subset S^9$ (в точке $Z = 0$), которые мы обозначим через Δ_{ijkl}.

$$\Delta_{2323} = -\, a_{33}^2\, b_{22}^2, \quad \Delta_{3131} = -\, a_{33}^2\, b_{11}^2,$$
$$\Delta_{1212} = -\, (a_{11}\, b_{22} - a_{22}\, b_{11})^2 - 4a_{12}^2\, b_{11}\, b_{22}, \quad \Delta_{2331} = \Delta_{2312} = \Delta_{3112} = 0.$$

Так как

$$(a_{11}\, b_{22} - a_{22}\, b_{11})^2 + 4a_{12}^2\, b_{11}\, b_{22} = (a_{11}\, b_{22} + a_{22}\, b_{11})^2 - 4b_{11}\, b_{22}\, (a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2),$$

то согласно условиям, наложенным на тензор кривизны, заключаем, что

$$-(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})^2-4a_{12}^2b_{11}b_{22}\le 0.$$

Таким образом, $\overline{K}_E(X,Y)>0$ и, следовательно, $\overline{K}(X,Y)\le 1$.

Рассмотрим кривизну для площадок, ортогональных грассманову образу подмногообразия $F^3\subset E^5$. В качестве векторов базиса, ортогонального грассманову образу, возьмем следующие векторы:

$$N_1=\begin{pmatrix} a_{12}b_{22} & -a_{11}b_{22} & 0\\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}^2 & 0\end{pmatrix},\quad N_2=\begin{pmatrix} b_{11}b_{22} & 0 & 0\\ -a_{11}a_{22} & -a_{12}b_{11} & 0\end{pmatrix},\quad N_3=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Пусть $\xi=a^1N_1+a^2N_2+a^3N_3$, $\eta=b^1N_1+b^2N_2+b^3N_3$ — векторы из подпространства, ортогонального грассманову образу $F^3\subset E^5$. Для того чтобы найти кривизну $\overline{K}(\xi,\eta)$, воспользуемся формулой [1]

$$\overline{K}(X,Y)=\frac{2(\mathrm{Tr}\Lambda_1\Lambda_1^*+\mathrm{Tr}\Lambda_2\Lambda_2^*)}{4\mathrm{Tr}(XX^*)\mathrm{Tr}(YY^*)-[\mathrm{Tr}(XY^*+YX^*)]^2},\tag{15}$$

где $\Lambda_1=XY^*-YX^*$, $\Lambda_2=X^*Y-Y^*X$, Tr — след матрицы. В этой формуле для данного случая (подмногообразия $F^3\subset E^5$) векторы $\check{X}$ и Y есть (3x2)-матрицы

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\end{pmatrix}.$$

После несложных вычислений находим

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Lambda_1\Lambda_1^*=(x_{11}y_{21}-x_{21}y_{11}+x_{12}y_{22}-x_{22}y_{12}+x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13})^2,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Lambda_2\Lambda_2^*=(x_{11}y_{12}-x_{12}y_{11}+x_{21}y_{22}-x_{22}y_{21})^2+$$

$$+(x_{11}y_{13}-x_{13}y_{11}+x_{21}y_{23}-x_{23}y_{21})^2+(x_{12}y_{13}-x_{13}y_{12}+x_{22}y_{23}-x_{23}y_{22})^2,$$

$$\mathrm{Tr}(XX^*)=(x_{11}^2+x_{12}^2+x_{13}^2+x_{21}^2+x_{22}^2+x_{23}^2),$$

$$\mathrm{Tr}(YY^*)=(y_{11}^2+y_{12}^2+y_{13}^2+y_{21}^2+y_{22}^2+y_{23}^2),$$

$$\mathrm{Tr}(XY^*+YX^*)=(x_{11}y_{11}+x_{12}y_{12}+x_{13}y_{13}+x_{21}y_{21}+x_{22}y_{22}+x_{23}y_{23}).$$

Вычитая из числителя формулы (15) ее знаменатель, получим

$$-\Delta=(x_{11}y_{22}-x_{22}y_{11})^2+(x_{11}y_{23}-x_{23}y_{11})^2+(x_{12}y_{21}-x_{21}y_{12})^2+$$

$$+(x_{12}y_{23}-x_{23}y_{12})^2+(x_{13}y_{21}-x_{21}y_{13})^2+(x_{13}y_{22}-x_{22}y_{13})^2+$$

$$+2(x_{11}y_{21}-x_{21}y_{11})(x_{22}y_{12}-x_{12}y_{22})+2(x_{11}y_{21}-x_{21}y_{11})(x_{22}y_{21}-x_{21}y_{22})+$$

$$+ 2(x_{12}y_{22} - x_{22}y_{12})(x_{23}y_{13} - x_{13}y_{23}) + 2(x_{11}y_{12} - x_{12}y_{11})(x_{22}y_{21} - x_{21}y_{22}) +$$
$$+ 2(x_{11}y_{13} - x_{13}y_{11})(x_{23}y_{21} - x_{21}y_{23}) + 2(x_{12}y_{13} - x_{13}y_{12})(x_{23}y_{22} - x_{22}y_{23}). \tag{16}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем следующие обозначения:

$$a_{12}b_{22} = T_2, \quad b_{11}b_{22} = K_2, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = K_1, \qquad -a_{12}b_{11} = T_1, \ a_{11}b_{22} = A.$$

Пользуясь формулой (15), где в качестве векторов X и Y берем векторы ξ и η, получаем

$$-\Delta = \left((T_1T_2 - K_1K_2)^2 + A^4 - 2A^2T_1T_2 - 2A^2K_1K_2\right)(q^{12})^2 +$$
$$+ A^2(q^{13})^2 + (T_2q^{13} + K_2q^{23})^2, \ q^{ij} = a^ib^j - a^jb^i.$$

Имеем

$$T_1T_2 - K_1K_2 = -a_{12}^2b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}^2b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} = -Aa_{22}b_{11}.$$

Поэтому

$$(T_1T_2 - K_1K_2)^2 + A^4 - 2A^2T_1T_2 - 2A^2K_1K_2 =$$
$$= A^2\left((a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4a_{12}^2b_{11}b_{22}\right).$$

В силу предыдущих рассуждений, $(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4a_{12}^2b_{11}b_{22} \ge 0$. С учетом этого мы получаем $-\Delta \ge 0$, т.е. $\overline{K}(\xi, \eta) \le 1$.

Пусть теперь секционная кривизна подмногообразия $F^3 \subset E^5$ отрицательна по всем двумерным площадкам, т.е.

$$R_{2323} < 0, \quad R_{3131} < 0, \quad R_{1212} < 0, \quad R_{2323}R_{3131} - R_{2331}^2 = a_{33}^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) > 0.$$

Если в этом случае $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то $b_{11}b_{22} < 0$. Поэтому,

$$(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})^2 - 4b_{11}b_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) > 0.$$

Следовательно, $\overline{K}(X, Y) < 1$. То же самое имеем и для кривизны $\overline{K}(\xi, \eta)$.

Заметим теперь, что векторы Z_1 и Z_2 будут коллинеарны, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Таким образом, в том случае, когда кривизна подмногообразия $F^3 \subset E^5$ всюду отлична от нуля, грассманов образ этого подмногообразия является регулярным подмногообразием Грассмана $G_{2,5}$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Ю. А. Аминов*, Изометрические погружения n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Мат. сб. (1980), т. 3, № 3, с. 402—433.
2. *Ю. А. Аминов*, Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах.— Укр. геометр. сб. (1975), вып. 17, с. 15—22.
3. *В. Т. Базылев*, Геометрия дифференцируемых многообразий. Высшая школа, Москва (1989), 221 с.
4. *Ю. А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб. (1980), вып. 23, с. 3—6.

5. *Ю. А. Аминов*, Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу.— Мат. сб. (1982), т. 117, № 2, с. 147—160.
6. *А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский*, Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу.— Укр. геометр. сб. (1989), вып. 32, с. 11—27.

On the theory of curvature for Grassmanian image of submanifold in Euclidean space

V. M. Savel'ev

The curvature of Grassmanian image of submanifold F^n in Euclidean space E^{n+k} is studied. The case of immersions $F^2 \subset E^{2+k}$ and $F^3 \subset E^5$ is investigated in detail. It is proved that on some conditions of positivity of the sectional curvature $F^3 \subset E^5$ it follows that curvature of Grassmanian image belongs to interval $(0,1]$.