Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 540–545

УДК 514

О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии

А. Л. Ямпольский

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

В статье рассматриваются подмногообразия в касательном расслоении риманова многообразия M^n, порожденные векторным полем ξ, заданным на подмногообразии F^l в M^n. Выясняются условия, при которых образ $\xi(F^l)$ есть вполне геодезическое подмногообразие в TM^n с метрикой Сасаки. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если ξ — нормальное векторное поле на F^l, параллельное в нормальной связности, то $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n.*

Теорема 2. *Если ξ — нормальное векторное поле на поверхности F^l в пространстве постоянной кривизны $M^n(c)$, то $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в $M^n(c)$ и* $|\xi| = \text{const}$.

В статті розглянуто підмноговиди в дотичному розшаруванні риманова многовиду M^n, що породжені векторним полем ξ на підмноговиді F^l в M^n. Знайдено умови, за яких образ $\xi(F^l)$ буде цілком геодезичним підмноговидом у TM^n з метрикою Сасакі. Доведено:

Теорема 1. *Якщо ξ — нормальне векторне поле на F^l, паралельне у нормальній зв'язності, то $\xi(F^l)$ буде цілком геодезичною в TM^n тоді і тільки тоді, коли F^l цілком геодезична в M^n.*

Теорема 2. *Якщо ξ — нормальне векторне поле на підмноговиді F^l у просторі сталої кривини $M^n(c)$, то $\xi(F^l)$ буде цілком геодезичною в TM^n тоді і тільки тоді, коли F^l цілком геодезична в $M^n(c)$ і* $|\xi| = \text{const}$.

Введение

Пусть M^n — риманово многообразие, TM^n — его касательное расслоение с естественной римановой метрикой [1]. Известно, что вполне геодезическими многообразиями в TM^n являются слои [1], база [2], образ базы в TM^n, задаваемый параллельным векторным полем на M^n [3] (если такое существует). В данной статье рассматриваются подмногообразия в TM^n, порожденные нормальными векторными полями на подмногообразии $F^l \subset M^n$.

1. Основные определения и формулировки результатов

Пусть $F^l \subset M^n$ — подмногообразие, ξ — касательное векторное поле на M^n. Пусть $(u^1,\dots,u^l)$ — локальные координаты на F^l; $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты на M^n. Так как $\{x^1,\dots,x^n;\xi^1,\dots,\xi^n\}$ — естественные индуцированные координаты на TM^n, то отображение

$$x = x^a(u^1,\dots,u^l),$$
$$\xi = \xi^a\left(x^1(u^1,\dots,u^l),\dots, x^n(u^1,\dots,u^l)\right),\ a = 1,\dots,n, \tag{1}$$

задает естественное вложение F^l в TM^n посредством векторного поля ξ. Образ F^l при отображении (1) будем обозначать $\xi(F^l)$.

Мы докажем следующие утверждения:

Теорема 1. *Если ξ — нормальное векторное поле на F^l, параллельное в нормальной связности, то $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n.*

Теорема 2. *Если ξ — нормальное векторное поле на поверхности F^l в пространстве постоянной кривизны $M^n(c)$, то $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n и $|\xi| = \mathrm{const}$.*

2. Основные леммы

На касательном расслоении TTM в каждой точке $(Q,\xi) \in TM^n$ определены два отображения: π_* и K. В естественных индуцированных координатах их локальное выражение имеет вид [4,6]:

$$\pi_*\left\{\widetilde{X}^a\frac{\partial}{\partial x^a} + \widetilde{X}^{n+a}\frac{\partial}{\partial \xi^a}\right\} = \widetilde{X}^a\frac{\partial}{\partial x^a},$$
$$K\left\{\widetilde{X}^a\frac{\partial}{\partial x^a} + \widetilde{X}^{n+a}\frac{\partial}{\partial \xi^a}\right\} = \left\{\widetilde{X}^{n+a} + \overline{\Gamma}^a_{bc}\widetilde{X}^b\xi^c\right\}\frac{\partial}{\partial x^a}, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}^a_{bc}$ — символы Кристоффеля связности M^n; $a, b, c = 1,\dots,n$.

Если $X = X^a\dfrac{\partial}{\partial x^a}$ — касательное векторное поле на M^n, то формулами

$$X^H_{(Q,\xi)} = \left\{X^a\frac{\partial}{\partial x^a} - \overline{\Gamma}^a_{bc}X^b\xi^c\frac{\partial}{\partial \xi^a}\right\}, \qquad X^V_{(Q,\xi)} = \left\{X^a\frac{\partial}{\partial \xi^a}\right\} \tag{3}$$

задаются горизонтальный и вертикальный лифты поля X в касательном расслоении на TM^n.

Обозначим через $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ скалярное произведение касательных к TM^n векторов, а через $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение векторов, касательных к M^n. Метрика Сасаки TM^n определяется следующим образом:

$$\langle\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle\rangle = \langle\pi_*\widetilde{X},\pi_*\widetilde{Y}\rangle + \langle K\widetilde{X}, K\widetilde{Y}\rangle. \tag{4}$$

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ — касательные векторы (поля) на TM^n; $\widetilde{\nabla}$ — связность в TM^n; X, Y, Z — касательные векторы (поля) на M^n и касательные векторы на F^l, естественно вложенные в TM^n; $\overline{\nabla}$ — связность в M; ∇ — связность в F^l.

Лемма 1 [5]. *Для любых векторов X^H, Y^H, X^V, $Y^V \in T_{(Q,\xi)}TM$ справедливы следующие формулы:*

$$\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^H_Q - \frac{1}{2}\left(\overline{R}_Q(X,Y)\xi\right)^V, \quad \widetilde{\nabla}_{X^V} Y^H = \frac{1}{2}\left(\overline{R}_Q(\xi, X)Y\right)^H,$$

$$\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^V = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^V_Q + \frac{1}{2}\left(R_Q(\xi, Y)X\right)^H, \quad \widetilde{\nabla}_{X^V} Y^V = 0.$$

Лемма 2. *Касательное расслоение $T\xi\,(F^l)$ порождается векторами вида*

$$X^H + \left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^V,$$

где $X \in TF^l$, а лифты рассматриваются как лифты в $T_{(Q,\xi)}TM$.

Доказательство. Базис касательного пространства к (F^l) составляют векторы (см. (1))

$$\widetilde{X}_i = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial \xi^a}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \xi^a},$$

поэтому, используя (2), найдем

$$\pi_* \widetilde{X}_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad K\widetilde{X}_i = \overline{\nabla}_i \xi.$$

Таким образом, базис $T\xi\,(F^l)$ составляют векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^H + \left(\overline{\nabla}_i \xi\right)^V.$$

Переходя к векторным полям, получим утверждения леммы.

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{X} = X^H + \left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^V$, $\widetilde{Y} = Y^H + \left(\overline{\nabla}_Y \xi\right)^V$ — векторные поля на TM^n, касательные к $\xi\,(F^l)$. Тогда*

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \left(\overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\overline{R}(\xi, \overline{\nabla}_X \xi)\,Y + \frac{1}{2}\overline{R}(\xi, \overline{\nabla}_Y \xi)\,X\right)^H + \left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi - \frac{1}{2}R(X,Y)\xi\right)^V.$$

Доказательство. Действительно,

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H + \widetilde{\nabla}_{X^H}\left(\overline{\nabla}_Y \xi\right)^V + \widetilde{\nabla}_{(\overline{\nabla}_X \xi)^V} Y^H + \widetilde{\nabla}_{(\overline{\nabla}_X \xi)^V}(\overline{\nabla}_Y \xi)^V.$$

Применяя лемму 1, получим требуемый результат.

Лемма 4. *Если* $\xi\,(F^l)$ *вполне геодезично в* TM^n *и* $|\,\xi\,| = \mathrm{const}$ *вдоль* F^l, *то* ξ — *параллельное векторное поле на* M^n *вдоль* F^l.

Доказательство. Если $|\,\xi\,| = \mathrm{const}$ вдоль F^l, то дифференцируя по $X \in TF^l$ получим

$$<\overline{\nabla}_X \xi, \xi> = 0. \tag{5}$$

Тогда из леммы 2 следует, что ξ — нормаль к поверхности $\xi\,(F^l)$. Если $\xi\,(F^l)$ вполне геодезично в TM^n, то

$$<<\widetilde{\overline{\nabla}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \xi^V>> = 0.$$

Тогда из леммы 3 следует, что

$$<\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi, \xi> = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя (5) и принимая во внимание (6), найдем, что

$$<\overline{\nabla}_X \xi, \overline{\nabla}_Y \xi> = 0$$

для любых X, $Y \in TF^l$. Полагая $X = Y$, получим утверждение леммы.

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть ξ — нормальное векторное поле на F^l, параллельное в нормальной связности. Тогда по формуле Вейнгартена

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X. \tag{7}$$

Пусть η — произвольная единичная нормаль к F^l. Тогда, принимая во внимание (7), из леммы 3 найдем, что векторы η^H и η^V лежат в нормальном подпространстве к $\xi\,(F^l)$ и среди них можно выбрать $2(n-l)$ линейно независимых.

Пусть Y — произвольный касательный вектор к F^l. Тогда $Y^V + (A_\xi Y)^H$ лежит в нормальном подпространстве к $\xi\,(F^l)$. Среди всех таких векторов можно выбрать l линейно независимых. Таким образом, множество векторов вида

$$\eta^H,\ \eta^V,\ Y^V + (A_\xi Y)^H \tag{8}$$

составляет полный набор нормалей поверхности $\xi\,(F^l)$ в каждой ее точке.

Полагая $\eta = \xi$, по лемме 3 найдем, что

$$<\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi, \xi> = 0. \tag{9}$$

Но так как в силу (7), $<\overline{\nabla}_X \xi, \xi> = 0$, то из (9) следует, что

$$<\overline{\nabla}_X \xi, \overline{\nabla}_X \xi> = 0$$

или $|\,A_\xi X\,|^2 = 0$ для любого $X \in TF^l$. Это означает, что для данного нормального векторного поля

$$A_\xi = 0. \tag{10}$$

Пусть η — произвольная нормаль к F^l, ортогональная ξ. Тогда, рассматривая η^H как нормаль к $\xi(F^l)$ и учитывая (10), из леммы 3 найдем

$$<\overline{\nabla}_X Y,\eta> = 0$$

или

$$<h(X,Y),\eta> = 0.$$

Следовательно, $A_\eta = 0$ для любой нормали η, ортогональной ξ. Учитывая (10), получим утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Поскольку ξ — нормальное векторное поле, то по формуле Вейнгартена

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \tag{11}$$

В пространстве постоянной $M^n(c)$ кривизны результат леммы 3 запишется в виде:

$$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y} = \left(\nabla_X Y + h(X,Y) - c<A_\xi X, Y>\xi\right)^H + \left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi\right)^V. \tag{12}$$

При этом по-прежнему для любой нормали $\eta \in NF^l$ лифт η^H есть нормаль к $\xi(F^l)$. Умножим (12) на η^H скалярно. Если $\xi(F^l)$ вполне геодезично, то должно выполняться равенство

$$<h(X,Y) - c<A_\xi X,Y>\xi,\, h> = 0 \tag{13}$$

для любой нормали η.

Пусть $<\eta,\xi> = 0$. Тогда из (13) следует, что

$$<h(X,Y),\eta> = 0. \tag{14}$$

Положим $\eta = \xi$, тогда из (13) найдем

$$<h(X,Y),\xi>(1 - c\rho^2) = 0, \tag{15}$$

где $\rho^2 = |\xi|^2$.

Если $c \leq 0$, то из (15) следует, что $<h(X,Y),\xi> = 0$ и в совокупности с (14) это означает, что F^l вполне геодезично в M^n. Если $c > 0$, то либо $<h(X,Y),\xi> = 0$, либо $1 - c\rho^2 = 0$. В первом случае в совокупности с (14) получаем вполне геодезичность F^l, во втором случае имеем

$$\rho = \sqrt{1/c} = \text{const}.$$

По лемме 4 поле ξ параллельно на M^n, т.е.

$$\overline{\nabla}_X \xi = 0,$$

и, следовательно, $A_\xi X = 0$, что в совокупности с (14) доказывает теорему.

Список литературы

1. *S. Sasaki*, On the differential geometry of tangent bundle of a Riemannian manifold.— Tohoku Math. Journ. (1958), v. 10, p. 145—155.
2. *M. S. Lin*, Affine maps on tangent bundle with Sasaki metric.— Tensor (1974), v. 28, № 1, p. 34—42.

3. *P. Walczhak*, On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric.— Bull Acad. Pol. sci. Ser. sci. mat. (1980), v. 28, № 3,4, p. 161—165.
4. *Д. Громолл, В. Клингенберг, В. Мейер*, Риманова геометрия в целом. Мир, Москва (1971), 343 с.
5. *O. Kowalski*, On the curvature of the tangent bundle of a Riemannian manfold.— J. reine angew. math. (1971), v. 250, p. 124—129.
6. *P. Dombrowski*, On the geometry of tangent bundle.— Journ. reine angew. math. (1962), v. 210, № 1, 2, p. 73—88.

On the totally geodesic vector fields on a submanifold

A. L. Yampol'sky

The research of submanifolds in the tangent bundle of a Riemannian manifold M^n generated by the vector field ξ on the submanifold F^l in M^n is carried out. The conditions of the total geodesicity of $\xi(F^l)$ in TM^n with Sasaki metric are obtained. The following theorems are true:

Theorem 1. *Let ξ be a normal vector field on the F^l parallel in a normal bundle connection, then $\xi(F^l)$ is totally geodesic in TM^n if and only if F^l is totally geodesic in M^n.*

Theorem 2. *Let ξ be a normal vector field on the submanifold F^l in the space of constant curvature $M^n(c)$ then $\xi(F^l)$ is totally geodesic in TM^n if and only is F^l is totally geodesic in $M^n(c)$ and* $|\xi| = \text{const}$.