Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с. 3-14

УДК 517.5+517.9

Гамма-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции. 4.

Д. З. Аров

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского, Украина, 270020, г. Одесса, ул. Старопортофранковская, 26

Статья поступила в редакцию 11 апреля 1994 года

В этой четвертой заключительной части работы приводятся доказательства теорем о регулярных j-внутренних матрицах-фунциях ($j = \mathrm{diag}\,[I_n, -I_m]$) и соответствующих обобщенных бикасательных задачах Шура–Неванлинны–Пика, ранее сформулированных во второй части работы. Для возможности независимого от предыдущих частей чтения здесь воспроизводятся формулировки доказываемых теорем и другие необходимые сведения из предыдущих частей работы.

Данная работа выполнена как четвертая заключительная часть цикла [5-7] и содержит доказательства приведенных в [6] теорем. Однако по независящим от автора техническим причинам публикация не состоялась. Я благодарен редакционной коллегии, которая помогла мне выйти из затруднительного положения, связанного с прекращением выпуска сборника, опубликовавшего части 1-3.

1. Для удобства читателя воспроизводим здесь необходимые обозначения и определения из [5], номера формул и теорем согласованы с предыдущими частями.

Класс $\mathrm{M}(n,m)$ исследуемых в работе матриц-функций (сокращенно — м.-ф.) связан с известной задачей Нехари экстраполяции сжимающей м.-ф. $f(\zeta)$ ($|\zeta| = 1$, $\|f\|_\infty \le 1$) порядка $n\times m$ по заданным ее коэффициентам Фурье $\gamma_k(f)$:

$$\gamma_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \zeta^k f(\zeta)\,|d\zeta|$$

при $k \ge 1$ в так называемом вполне неопределенном случае. В силу этой связи м.-ф. класса $\mathrm{M}(n,m)$ названы γ-производящими матрицами.

Интерес автора к м.-ф. класса $\mathrm{M}(n,m)$ вызван еще и тем, что к ним сводится исследование j-внутренних м.-ф. W, так как последние в существенном однозначно представимы в виде

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1}\end{bmatrix} A, \qquad A \in \mathrm{M}(n,m), \tag{1.1}$$

где b_1 и b_2 — внутренние м.-ф. порядков n и m. Так же, как класс $\mathrm{M}(n,m)$ связан с задачей Нехари (задачей $N(n,m)$), класс $U(n,m)$ j-внутренних м.-ф. связан с обобщенной би-касательной задачей Шура–Неванлинны–Пика (задачей $SNP(n,m)$). Напомним эти задачи

Задача $N(n,m)$. Найти м.-ф. f из $L^{\infty}_{n\times m}$ такие, что

$$f(\zeta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} + \ldots, \quad \|f\|_{\infty} \le 1, \tag{1.2}$$

где $\gamma_k = \gamma_k(f)$ — заданные матрицы порядка $n\times m$, $k \ge 1$.

Задача $SNP(n,m)$. Найти м.-ф. s такие, что

$$b_1^{-1}(s - s_0)b_2^{-1} \in H^{\infty}_{n\times m}, \quad s \in B_{n\times m}, \tag{1.3}$$

где s_0, b_1, b_2 — заданные м.-ф., $s_0 \in B_{n\times m}$, $b_1 \in B_n$, $b_2 \in B_m$, b_1 и b_2 — внутренние м.-ф.

Ниже используется следующее обозначение: для матрицы-функции $p(z)$ обозначим $p^{\sim}(z) = p^*(1/\bar{z})$.

Определение. *γ-производящей матрицей называется матрица-функция $A(\zeta)$ ($|\zeta| = 1$) порядка $n + m$, разбитая на блоки $p_{\pm}(\zeta)$ и $q_{\pm}(\zeta)$,*

$$A(\zeta) = \begin{bmatrix} p_-(\zeta) & q_-(\zeta) \\ q_+(\zeta) & p_+(\zeta) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

с диагональными блоками p_- и p_+ порядков n и m, если $A(\zeta)$ обладает свойствами:

1) *$A(\zeta)$ принимает j-унитарные значения почти всюду на ∂D, т.е.*

$$A^*(\zeta)jA(\zeta) = j, \ A(\zeta)jA^*(\zeta) = j; \ j = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}; \tag{1.5}$$

2) *$p_+^{-1}(z)$ и $[p_-^{\sim}(z)]^{-1}$ — внешние матрицы-функции из B_m и B_n;*

3) $\chi \overset{\text{def}}{=} -p_+^{-1}q_+ \in B_{m\times n}$. $\qquad$ (1.6)

Если к тому же

4) $p_+(0) > 0$, $p_-^{\sim}(0) > 0$, то назовем $A(\zeta)$ нормированной γ-производящей матрицей.

Обозначения. Множество всех γ-производящих матриц (с фиксированными n и m) обозначим через $M(n,m)$, а нормированных — через $M^0(n,m)$.

Для м.-ф. $A(\zeta)$, рассматриваемой в (1.4), положим

$$F_A(E) = [p_-(\zeta)E(\zeta) + q_-(\zeta)]\cdot[q_+(\zeta)E(\zeta) + p_+(\zeta)]^{-1}, \quad E \in B_{n\times m} \tag{1.7}$$

$$F_A(B_{n\times m}) = \{f : f = F_A(E),\ E \in B_{n\times m}\}.$$

Связь γ-производящих матриц с задачами $N(n,m)$ устанавливает следующая теорема.

Теорема А. *Для произвольной вполне неопределенной задачи* (1.2) *существует м.-ф.* $A \in N(n,m)$ *такая, что* $F_\Gamma = F_A(B_{n\times m})$, *где* F_Γ — *совокупность решений этой задачи* (см. историю вопроса и библиографию в [5]).

Назовем γ-производящую матрицу $A(\in \mathrm{M}(n,m))$ *сингулярной*, если $F_A(0) = \left(= q_- p_+^{-1}\right) \in B_{n\times m}$. Множество таких A обозначим через $\mathrm{M}_s(n,m)$.

Назовем γ-производящую матрицу $A(\in \mathrm{M}(n,m))$ *регулярной*, если для нее не существует непостоянной м.-ф. A_s из $\mathrm{M}_s(n,m)$, такой, что $A\cdot A_s^{-1} \in \mathrm{M}(n,m)$. Множество таких A обозначим через $\mathrm{M}_r(n,m)$.

2. Формулировки доказываемых здесь теорем.
В следующей теореме установлена связь между классами $\mathrm{M}(n,m)$ и $\mathrm{U}(n,m)$.

Теорема 7. *а) Произвольная j-внутренняя м.-ф.* $W(z)$ *в существенном однозначно представима в виде* (1.1), *причем если* $f_0 = F_A(0)$, *то* $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$, *где* A, b_1, b_2 *взяты из представления* (1.1).

б) *Произвольная м.-ф.* W, *представимая в виде* (1.1) *с* $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$, *где* $f_0 = F_A(0)$, *является j-внутренней м.-ф.*

Следствие. $\mathrm{M}_s(n,m) \subset \mathrm{U}(n,m)$.

Через D_+ обозначим класс голоморфных в D м.-ф. h, представимых в виде $h = h_2^{-1} h_1$, где $h_1 \in H^\infty_{n\times m}$ при некоторых n и m, а h_2 — скалярная внешняя функция из H^∞_1; если в таком представлении и м.-ф. h_1 является внешней, то м.-ф. h из D_+ называется *внешней*.

Будет показано, что класс $\mathrm{M}_s(n,m)$ состоит из тех и только тех j-внутрених м.-ф., которые являются внешними м.-ф..

Назовем такие м.-ф. *сингулярными j-внутренними м.-ф.*

$$\mathrm{U}_s(n,m) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{M}_s(n,m).$$

М.-ф. W из $\mathrm{U}(n,m)$ назовем *регулярной j-внутренней м.-ф.*, если не существует непостоянной м.-ф. $W_s \in \mathrm{U}_s(n,m)$, такой, что $WW_s^{-1} \in \mathrm{U}(n,m)$. Множество регулярных j-внутренних м.-ф. обозначим через $\mathrm{U}_r(n,m)$.

Теорема 8. *Пусть* $W \in \mathrm{U}(n,m)$ *и* A — *м.-ф., рассматриваемая в представлении* W *в виде* (1.1). *Тогда*

$$W \in \mathrm{U}_r(n,m) \Leftrightarrow A \in \mathrm{M}_r(n,m).$$

Теорема 9. *Произвольная j-внутренняя м.-ф.* $W(\in \mathrm{U}(n,m))$ в существенном однозначно представима в виде $W = W_r W_s$, где $W_r \in \mathrm{U}_r(n,m)$, $W_s \in \mathrm{U}_s(n,m)$.

Теорема 10. 1. *Пусть* $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$, $s_0 = F_W(0)$ $(= w_{12}w_{22}^{-1})$, b_1 *и* b_2 — *внутренние м.-ф., рассматриваемые в представлении* W *в виде* (1.1). *Тогда*

а) задача (1.3) *с указанными* s_0, b_1 *и* b_2 *является вполне неопределенной;*

б) $F_W(B_{n\times m}) \subset F_{s_0, b_1, b_2}$, *где* F_{s_0, b_1, b_2} — *множество решений этой задачи;*

в) $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0, b_1, b_2} \Leftrightarrow W \in \mathrm{U}_r(n,m)$.

2. *Для произвольной вполне неопределенной задачи* (1.3) *существует* $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$, *имеющая в представлении* (1.1) *те же* b_1 *и* b_2, *что и в задаче* (1.3), *и такая, что* $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0, b_1, b_2}$. *Эта м.-ф.* W *определяется по задаче* (1.3) *с точностью до постоянного правого* j*-унитарного множителя.*

Теорема 11. *Пусть* $W \in \mathrm{U}(n,m)$, $s_0 = F_W(0)$ $(= w_{12}w_{22}^{-1})$; $\left(1 - \| s_0(\zeta) \|\right)^{-1} \in L^1$. *Тогда* $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$.

Теорема 12. *Для того чтобы* j*-внутренняя м.-ф.* W *была произведением множителей Бляшке–Потапова: а)* 1*-го или* 2*-го рода, б) только первого,* в) *только* 2*-го рода, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$; 2) *м.-ф.* b_1 *и* b_2, *рассматриваемые в представлении* (1.1) *были произведениями Бляшке–Потапова (и, соответственно, б)* $b_1 = \mathrm{const}$, *в)* $b_2 = \mathrm{const}$).

Для выполнения условия 2) необходимо и достаточно, чтобы соответственно:

$$\text{а)}\lim_{r\uparrow 1} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{22}(r\zeta)|\, |d\zeta| = \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{22}(\zeta)|\, |d\zeta|; \tag{1.14}$$

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{11}(r\zeta)|\, |d\zeta| = \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{11}(\zeta)|\, |d\zeta|; \tag{1.15}$$

б) *выполнялось условие* (1.14) *и*

$$\ln |\det w_{11}(\infty)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{11}(\zeta)|\, |d\zeta|; \tag{1.16}$$

в) *выполнялось условие* (1.15) *и*

$$\ln |\det w_{22}(0)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{22}(\zeta)|\, |d\zeta|. \tag{1.17}$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$, $s_0 = w_{12}w_{22}^{-1}$, $\left(1 - \| s_0(\zeta) \|\right)^{-1} \in L^1$ *и выполняются условия: или а)* (1.14), (1.15), *или б)* (1.14), (1.16), *или в)* (1.15), (1.17). *Тогда* W — *произведение Бляшке–Потапова элементарных множителей соответственно: а)* 1*- или* 2*-го рода, б) только* 1*-го рода, в) только* 2*-го рода.*

В связи с синтезом пассивных систем с потерями методом Дарлингтона интересна задача представления заданной м.-ф. $s_0(\in B_{n\times m})$ в виде

$$s_0 = F_W(E_0), \quad W \in \mathrm{U}(n,m), \quad E_0 = \mathrm{const}, \quad E_0^* E_0 \le I. \tag{1.18}$$

В настоящей работе будет показано, что справедлива

Теорема 13. *Пусть* $s_0(\in B_{n\times m})$ *представима в виде* (1.18), *где* $E_0^*E_0 < I_m$, b_1 *и* b_2 *— внутренние м.-ф., рассматриваемые для* W *в представлении* (1.1). *Тогда*

$$b_2(I - s_0^* s_0)^{-1} s_0^* b_1 \in D_+; \tag{1.19}$$

2. *Пусть для* $s_0(\in B_{n\times m})$ *при некоторых внутренних м.-ф.* $b_1(\in B_n)$ *и* $b_2(\in B_m)$ *выполняется условие* (1.19). *Тогда* s_0 *представима в виде* (1.18) *и* $E_0^*E_0 < I_m$;

3. *Если в дополнение к условию имеем* $\left(1 - \| s_0(\zeta) \|\right)^{-1} \in L^1$, *то обязательно в представлении* (1.18) *имеем* $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$. *Это представление может быть получено путем рассмотрения задачи* (1.3), *поставленной по* s_0 *и* b_1, b_2, *которые взяты из условия* (1.19). *Такая задача является вполне неопределенной,* $F_{s_0, b_1, b_2} = F_W(B_{n\times m})$.

3. При доказательстве теорем 7-13 нам понадобятся леммы, доказанные в [7].

Для A из $\mathrm{M}(n,m)$ рассмотрим

$$\varphi_E = (q_+ E + p_+)^{-1}, \quad \psi_E = (Eq_-^* + p_-^*)^{-1}, \quad E \in B_{n\times m}. \tag{3.7}$$

Лемма 1. φ_E *и* ψ_E *— внешние из* $H^2_{n\times n}$ *и* $H^2_{m\times m}$.

Лемма 2. *Если* $A \in \mathrm{M}(n,m)$, *то* $\det A(\zeta) \equiv c$, *где* $c = \mathrm{const}$, $|c| = 1$; *если* $A \in \mathrm{M}^0(n,m)$, *то* $\det A(\zeta) \equiv 1$.

Лемма 3. *Для того чтобы* $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$, *необходимо и достаточно, чтобы* W *имела* j*-унитарные граничные значения п.в. и чтобы*

$$(w_{11}^{\sim})^{-1} \in B_n, \quad w_{22}^{-1} w_{21} \in B_{m\times n},$$
$$w_{12} w_{22}^{-1} \in B_{n\times m}, \quad w_{22}^{-1} \in B_n. \tag{3.11}$$

Отметим, что фигурирующие в (3.11) м.-ф. представляют собой блоки сжимающей м.-ф. $\tilde{s} = [s_{ij}]_1^2$, связанной с W известным преобразованием Потапова–Гинзбурга

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21} & w_{12}w_{22}^{-1} \\ -w_{22}^{-1}w_{21} & w_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

При этом преобразовании j-унитарным матрицам W отвечают унитарные матрицы $\widetilde{s}$, и для таких W дополнительно к (3.12) имеем

$$s_{11} = (w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21}) = (w_{11}^{*})^{-1}. \tag{3.13}$$

4. Доказательство теоремы 7. Воспользуемся леммой 3. Пусть $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$. Тогда будем иметь (3.11) и потому $w_{11} = b_1 p_-$, $w_{22} = b_2^{-1} p_+$, где $b_1 (\in B_n)$ и $b_2 (\in B_m)$ — внутренние м.-ф., а $(p_-^*)^{-1} (\in B_n)$ и $p_+^{-1} (\in B_m)$ — внешние м.-ф. Положим $q_- = b_1^{-1} w_{12}$, $q_+ = b_2 w_{21}$, откуда получаем (1.1), ибо $\chi \overset{\text{def}}{=} - p_+^{-1} q_+ = - w_{22}^{-1} w_{21} \in B_{m\times n}$. Так как $f_0 \overset{\text{def}}{=} F_A(0) = q_- p_+^{-1} = b_1^{-1} w_{12} w_{22}^{-1} b_2^{-1}$ и $w_{12} w_{22}^{-1} \in B_{n\times m}$, то $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$.

Пусть теперь $W = [w_{jk}]_1^2$ представима в виде (1.1) и $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$, $f_0 = F_A(0)$. Отсюда следует, что $W(\zeta)$ принимает j-унитарные значения и выполняются условия (3.11). В соответствии с леммой 3, получаем, что $W \in \mathrm{U}(n,m)$.

Так как для $A \in \mathrm{M}_s(n,m)$ имеем $f_0 = F_A(0) \in B_{n\times m}$, то такое $A \in \mathrm{U}(n,m)$, т.е. $\mathrm{M}_s(n,m) \subset \mathrm{U}(n,m)$. В силу предложения 4 [7], класс $\mathrm{M}_s(n,m) (= \mathrm{U}_s(n,m))$ состоит из таких j-внутренних м.-ф., которые являются внешними м.-ф. из D_+.

5. Согласно утверждению а) теоремы 2 [5] произведение конечного числа сингулярных j-внутренних м.-ф. является сингулярной j-внутренней м.-ф. Оказывается, что это верно и для бесконечных произведений, так как справедливо

Предложение 5. *Пусть W_k — последовательность сингулярных j-внутренних м.-ф., такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} W_k(z) = W(z), \qquad W^*(z) j W(z) \le W_k^*(z) j W_k(z).$$

Тогда $W(z)$ — сингулярная j-внутренння м.-ф.

Доказательство. Пусть W_k и W — м.-ф., рассматриваемые в формулировке предложения. В соответствии с леммой 2 имеем $c_k \overset{\text{def}}{=} \det W_k(z) \equiv \text{const}$, $|c_k| = 1$. Поэтому

$$c \overset{\text{def}}{=} \det W(z) \ (= \lim_{k\to\infty} c_k) = \text{const}, \qquad |c| = 1.$$

Так как $W_k \in \mathrm{M}_s(n,m)$, то блок $w_{22}^{(k)}$ — внешняя м.-ф., $(w_{22}^{(k)})^{-1} \in B_m$, и потому

$$\ln |\det w_{22}^{(k)}(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{22}^{(k)}(\zeta)| \, |d\zeta|.$$

Положим $\widetilde{W}_k = W_k^{-1} W$. Согласно условию, $\widetilde{W}_k$ — j-сжимающие м.-ф. Более того, $\widetilde{W}_k \in \mathrm{U}(n,m)$, так же, как и $W \in \mathrm{U}(n,m)$. Действительно, по теореме из работы [1] существует подпоследовательность W_{k_p} такая, что для граничных значений имеем

$$W(\zeta) = \lim_{p \to \infty} W_{k_p}(\zeta), \qquad |\zeta| = 1 \text{ п.в.}$$

Поэтому $W(\zeta)$ имеет j-унитарные граничные значения. Таким образом, получено, что $\widetilde{W}_k \in \mathrm{U}(n,m)$, $W \in \mathrm{U}(n,m)$. Рассмотрим м.-ф. $\widetilde{S}_k = [\widetilde{s}_{ij}^{(k)}]_1^2$, $S_k = [s_{ij}^{(k)}]_1^2$, $S = [s_{ij}]_1^2$, отвечающие м.-ф. $\widetilde{W}_k$, W_k, W по формуле (3.12). Из равенства $W = W_k\widetilde{W}_k$ следует, что

$$w_{22} = w_{21}^{(k)}\,\widetilde{w}_{12}^{(k)} + w_{22}^{(k)}\,\widetilde{w}_{22}^{(k)} = w_{22}^{(k)}\left[I - s_{21}^{(k)}\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}\right]\widetilde{w}_{22}^{(k)}.$$

Так как $\| s_{21}^{(k)}(z)\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}(z) \| < 1$, $(|z| < 1)$ и $s_{21}^{(k)}\,\widetilde{s}_{12}^{(k)} \in B_m$, то $I - s_{21}^{(k)}\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}$ — внешняя м.-ф., следовательно

$$\ln |\det [I - s_{21}^{(k)}(0)\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}(0)]| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det [I - s_{21}^{(k)}(\zeta)\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}(\zeta)]|\, |d\zeta|.$$

Но $\lim\limits_{k \to \infty} s_{21}^{(k)}(0) = s_{21}(0)$, $\lim\limits_{k \to \infty} \widetilde{s}_{12}^{(k)}(0) = 0$, так что

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{|\zeta|} \ln |\det [I - s_{21}^{(k)}(\zeta)\,\widetilde{s}_{12}^{(k)}(\zeta)]|\, |d\zeta| = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{22}(\zeta)|\, |d\zeta| \ge \frac{1}{2\pi} \lim_{k \to \infty} \int\limits_{|\zeta| = 1} \ln |\det w_{22}^{(k)}(\zeta)|\, |d\zeta| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \ln |\det w_{22}^{(k)}(0)| = \ln |\det w_{22}(0)|.$$

Учитывая, что $w_{22}^{-1} \in B_m$, получаем, что w_{22} — внешняя м.-ф. (из D_+). Так как при этом $W \in \mathrm{U}(n,m)$ и $\det W(z) \equiv c$, $|c| = 1$, то $W \in \mathrm{U}_s(n,m)$.

С л е д с т в и е. *Сходящееся произведение элементарных множителей Бляшке–Потапова с полюсами на ∂D является сингулярной j-внутренней м.-ф.*

6. Предложение 6. *Если $W = W_1 W_2$, где $W_1 \in \mathrm{U}(n,m)$, а $W_2 \in \mathrm{U}_s(n,m)$, то $W(\in \mathrm{U}(n,m))$ имеет в представлении* (1.1) *те же внутренние м.-ф. b_1 и b_2, что и W_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W = [w_{jk}]_1^2$, $W_1 = [w_{jk}^{(1)}]_1^2$, $W_2 = [w_{jk}^{(2)}]_1^2$ — м.-ф., удовлетворяющие условиям предложения, а $S = [s_{jk}]_1^2$, $S_1 = [s_{jk}^{(1)}]_1^2$, $S_2 = [s_{jk}^{(2)}]_1^2$ — отвечающие им м.-ф. по формуле (3.12). Тогда

$$w_{22} = w_{21}^{(1)}\,w_{12}^{(2)} + w_{22}^{(1)}\,w_{22}^{(2)} = w_{22}^{(1)}\left[I - s_{21}^{(1)}\,s_{12}^{(2)}\right]w_{22}^{(2)}.$$

Если теперь учтем, что $I - s_{21}^{(1)}\,s_{12}^{(2)}$ и $w_{22}^{(2)}$ — внешние м.-ф., то получим, что

$$(s_{22}^{-1} =)w_{22} = b_2^{-1}\varphi, \qquad (s_{22}^{(1)} =)w_{22}^{(1)} = b_2^{-1}\varphi_1,$$

где φ и φ_1 — внешние м.-ф., а $b_2(\in B_m)$ — внутренняя м.-ф., одна и та же у w_{22} и $w_{22}^{(1)}$. Тем самым показано, что в представлениях W и W_1 в виде (1.1) м.-ф. b_2 можно брать одну и ту же.

7. Доказательство теорем 8-10. Пусть $W \in \mathrm{U}(n,m)$, b_1, b_2 и A — м.-ф., рассматриваемые в представлении (1.1), $s_0 = F_W(0)$, $f_0 = b_1^{-1} s_0 b_2^{-1} (= F_A(0))$. Рассмотрим задачу (1.3) с этими b_1, b_2 и s_0, а также соответствующую задачу (1.2) с $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$ $(k \geq 1)$. Если F_{s_0, b_1, b_2} и F_Γ — множества решений этих задач, то, очевидно,

$$F_{s_0, b_1, b_2} = \{ s: s = b_1 f b_2,\ f \in F_\Gamma \},$$

и обе задачи являются вполне неопределенными. Имеем также:

$$F_W(B_{n\times m}) = \{ s: s = b_1 f b_2,\ f \in F_A(B_{n\times m}) \}.$$

Поэтому $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0; b_1, b_2}$ тогда и только тогда, когда $F_A(B_{n\times m}) = F_\Gamma$, а последнее равенство по теореме 1 [5] имеет место тогда и только тогда, когда $A \in \mathrm{M}_r(n,m)$.

Пусть $W = W_1 W_2$, где $W_1 \in \mathrm{U}(n,m)$, $W_2 \in \mathrm{U}_s(n,m)$. Имеем

$$F_W(B_{n\times m}) \subset F_{W_1}(B_{n\times m}),$$

причем $F_W(B_{n\times m}) = F_{W_1}(B_{n\times m})$ тогда и только тогда, когда $W_2 = \mathrm{const}$, так как только при этом $F_{W_2}(B_{n\times m}) = B_{n\times m}$. Согласно предложению 6 у W и W_1 в представлении (1.1) одни и те же м.-ф. b_1 и b_2. Пусть $W_2 \neq \mathrm{const}$, то есть $W \overline{\in} \mathrm{U}_r(n,m)$. Тогда получаем, что

$$F_W(B_{n\times m}) \subset F_{W_1}(B_{n\times m}) \subseteq F_{s_0; b_1, b_2},$$

причем $F_W(B_{n\times m}) \neq F_{W_1}(B_{n\times m})$. Поэтому $F_W(B_{n\times m}) \neq F_{s_0; b_1, b_2}$ и потому $A \overline{\in} \mathrm{M}_r(n,m)$, где A взято из представления W в виде (1.1).

Так как рассматриваемая задача (1.2) является вполне неопределенной, то, согласно теоремам А (см. выше) и 1 [5], существует $\tilde{A} \in \mathrm{M}_r(n,m)$ такая, что $F_\Gamma = F_{\tilde{A}}(B_{n\times m})$.

Получаем, что $F_{s_0; b_1, b_2} = F_{\tilde{W}}(B_{n\times m})$, где

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \tilde{A}.$$

Так как $F_{\tilde{W}}(0) \in B_{n\times m}$, то по теореме 7 получаем, что $\tilde{W} \in \mathrm{U}(n,m)$. Из включения $F_W(B_{n\times m}) \subset F_{s_0; b_1, b_2} = F_{\tilde{W}}(B_{n\times m})$ следует, что $F_A(B_{n\times m}) \subset F_{\tilde{A}}(B_{n\times m})$. Согласно теореме 3 [5] имеем, что $A = AU$, где $U \in \mathrm{M}_s(n,m)$ ($= \mathrm{U}_s(n,m)$), причем $U = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $F_A(B_{n\times m}) = F_{\tilde{A}}(B_{n\times m})$ т.е. когда $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0;\,b_1,\,b_2}$. Имеем $W = \tilde{W}U$. Следовательно, если $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$, то $U = \mathrm{const}$ и $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0;\,b_1,\,b_2}$, $A \in \mathbf{M}_r(n,m)$. Доказаны все утверждения теорем 8-10.

8. Доказательство теоремы 11. Пусть $W \in \mathrm{U}(n,m)$, $s_0 = F_W(0)$, $(1 - \|s_0(\zeta)\|)^{-1} \in L_1$. Рассмотрим представление W в виде (1.1) и покажем, что в нем $A \in \mathbf{M}_r(n,m)$. Тогда, согласно теореме 8, $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$. Воспользуемся теоремой 6 из работы [5]. Будем считать, что $n \ge m$. Рассмотрим $f_{E_0} = F_A(E_0)$, $E_0 = \mathrm{const}$, $E_0^* E_0 = I_m$. Пусть h_+, h_- — решение задачи (1.12). Тогда получим, что

$$E_0^* \psi_{E_0}^{-1} h_+ = (\varphi_{E_0}^*)^{-1} h_-,$$

где φ_{E_0} и ψ_{E_0} определены по $E = E_0$ и A формулами (3.7). Покажем, что из условия $(1 - \|s_0(\zeta)\|)^{-1} \in L^1$ вытекает: $\psi_{E_0}^{-1} \in H^2_{n\times n}$, $\varphi_{E_0}^{-1} \in H^2_{m\times m}$. Поэтому полученное равенство возможно лишь при $h_- = 0$. Из теоремы 6 следует, что $A \in M_r$. Используя затем теорему 8, получим, что $W \in \mathrm{U}_r(n,m)$. Имеем

$$(I - \|s_0(\zeta)\|^2)^{-1} = \|(I - s_0^*(\zeta)\, s_0(\zeta))^{-1}\| \in L^1.$$

Так как $p_+^* p_+ - q_+^* q_+ = I$ и $S_0 = b_1 q_- p_+^{-1} b_2$, то получаем, что

$$\|(I - s_0^* s_0)^{-1}\| = \|p_+ p_+^*\| \in L^1.$$

Поэтому для внешней м.-ф. p_+ имеем

$$p_+ \in H^2_{m\times m}: \quad \varphi_{E_0}^{-1} = q_+ E_0 + p_+ = p_+(I - \chi E_0) \in H^2_{m\times m}.$$

Аналогично

$$\|(I - s_0^*(\zeta) s_0(\zeta))^{-1}\| = \|p_-(\zeta) p_-^*(\zeta)\| \in L^1, \qquad p_-^* \in H^2_{n\times n},$$

$$\psi_{E_0}^{-1}(\zeta) = E_0 q_-^*(\zeta) + p_-^*(\zeta) = (I - E_0 \chi(\zeta)) p_-^*(\zeta) \in H^2_{n\times n}.$$

9. Доказательство теоремы 12. В работах И. П. Федчиной [2-4] исследована задача (1.3) в случае, когда $b_1 = I_n$, а b_2 — произвольное (дефинитное) произведение Бляшке–Потапова. Эта задача имеет определенную, приведенную в работах [4] формулировку в терминах интерполяционных данных для s, в связи с чем ее естественно называть касательной задачей Шура–Неванлинны–Пика. Результаты И. П. Федчиной показывают, что справедливы следующие утверждения: 1) для произвольной вполне неопределенной задачи (1.3), в которой $b_1 = I_n$, а b_2 — произведение Бляшке–Потапова, отвечающая ей, согласно теореме 10, резольвентная матрица $W(\in \mathrm{U}_r(n,m))$, $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0;\,b_1,\,b_2}$, которая имеет в представлении

(1.1) те же $b_1 (= I_n)$ и b_2, что и в задаче (1.3), является произведением элементарных множителей Бляшке–Потапова 1-го рода; 2) произвольное произведение W элементарных множителей 1-го рода является резольвентной матрицей некоторой вполне неопределенной задачи (1.3), в которой $b_1 = I_n$, а b_2 — произведение Бляшке–Потапова, причем эти b_1 и b_2 взяты из представления W в виде (1.1). Сформулированные утверждения 1) и 2) вместе с теоремой 10 доказывают часть теоремы 12, которая относится к произведениям элементарных множителей 1-го рода. Аналогично доказывается часть теоремы 12, относящаяся к произведению элементарных множителей 2-го рода. При этом следует рассмотреть вполне неопределенную задачу (1.3) с $b_2 = I_m$ и b_1 — произведением Бляшке–Потапова. Такая задача может быть переформулирована как касательная задача Шура–Неванлинны–Пика с интерполяционными данными для $s^*(z)$ (*-касательная задача). Наконец, часть теоремы 12, относящаяся к произвольному сходящемуся произведению Бляшке-Потапова элементарных множителей 1-го и 2-го рода, доказывается путем рассмотрения вполне неопределенной задачи (1.3), в которой b_1 и b_2 — произведения Бляшке–Потапова. Задача может быть переформулирована в терминах интерполяционных данных как би-касательная задача Шура–Неванлинны–Пика, в которой рассматриваются касательные интерполяционные данные для $s(z)$ и $s^*(\bar{z})$. Исследовать эту задачу можно так же, как в работах И. П. Федчиной исследована касательная задача.

Заметим теперь, что у $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$ всегда $w_{22}^{-1} \in B_m$, $[w_{11}^*(1/\bar{z})]^{-1} \in B_n$, и рассматриваемые в представлении (1.1) внутренние м.-ф. b_1 и b_2 взяты из внешне-внутренней факторизации:

$$(w_{11}^*)^{-1} = b_1\varphi_1, \qquad w_{22}^{-1} = \varphi_2 b_2,$$

где φ_1 и φ_2 — внешние м.-ф.. Имеем: b_1 и b_2 — произведения Бляшке–Потапова тогда и только тогда, когда $\det b_1$ и $\det b_2$ — произведения Бляшке, а это имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.14), (1.15). Если же $w_{11}^*(w_{22})$ — внешняя м.-ф. , то в этом и только этом случае в представлении (1.1) можно брать $b_1 = I_n$ ($b_2 = I_m$). Это имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.16) ((1.17)).

10. Доказательство теоремы 13. 1) Пусть имеем представление (1.18), где $E_0^* E_0 < I_m$. Можно считать, что в нем $E_0 = 0$, так как $E_0 = F_U(0)$, где U — j-унитарная матрица, тогда перейдем от W к $\widetilde{W} = WU$. Согласно предложению 6, у W и $\widetilde{W}$ в представлении (1.1) имеем одни и те же b_1 и b_2. Итак, пусть $s_0 = F_W(0)$, $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$. Тогда п.в. при $|\zeta| = 1$

$$h_1 \overset{\mathrm{def}}{=} (I - s_0^* s_0)^{-1} s_0^* = \left[I - (w_{12}w_{22}^{-1})^*(w_{12}w_{22}^{-1})\right]^{-1}(w_{22}^*)^{-1} w_{12}^* =$$

$$= w_{22}(w_{22}^* w_{22} - w_{12}^* w_{12})^{-1} w_{12}^* = w_{22} w_{12}^* .$$

Рассматриваемые в представлении (1.1) внутренние м.-ф. b_1 и b_2 взяты из внешне-внутренней факторизации

$$(w_{11}^*)^{-1} = b_1\varphi_1(\in B_n), \qquad w_{22}^{-1} = \varphi_2 b_2(\in B_m),$$

где $\varphi_1(\in B_n)$ и $\varphi_2(\in B_m)$ — внешние м.-ф. Учтем также, что $w_{12}^* = -\chi w_{11}^*$, где $\chi \overset{\text{def}}{=} -w_{22}^{-1}w_{21} \in B_{m\times n}$. Получим, что выполняется условие (1.19):

$$h_1(= w_{22}w_{12}^*) = -b_2^{-1}\varphi_2^{-1}\chi\varphi_1^{-1}b_1^{-1}, \qquad b_2h_1b_1 \in D_+.$$

2) Пусть теперь $b_1(\in B_n)$ и $b_2(\in B_m)$ — внутренние м.-ф., при которых верно условие (1.19). Покажем, что тогда существует представление $s_0 = F_W(0)$, где $W = [w_{jk}]_1^2 \in \mathrm{U}(n,m)$. Рассмотрим

$$f(\zeta) = b_1^*(\zeta)(I - s_0(\zeta)s_0^*(\zeta))b_1(\zeta), \quad g(\zeta) = b_2(\zeta)(I - s_0^*(\zeta)s_0(\zeta))b_2^*(\zeta).$$

Из условия (1.19) следует, что $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ — граничные значения м.-ф. ограниченного вида в D. Поэтому $\ln\det f \in L^1$ и $\ln\det g \in L^1$. По теореме Засухина–Крейна существуют внешние м.-ф. $\varphi_1(\in B_n)$ и $\varphi_2(\in B_m)$, такие, что

$$f(\zeta) = \varphi_1(\zeta)\varphi_1^*(\zeta), \qquad g(\zeta) = \varphi_2^*(\zeta)\varphi_2(\zeta).$$

Определим блоки м.-ф. $W = [w_{jk}]_1^2$ по формулам

$$w_{11} = b_1(\varphi_1^*)^{-1}, \qquad w_{22} = b_2^{-1}\varphi_2^{-1}, \qquad w_{12} = s_0w_{22}, \qquad w_{21} = s_0^*w_{11}.$$

Покажем, что $W(\zeta)$ принимает j-унитарные значения, т.е.

$$w_{11}^*w_{11} - w_{21}^*w_{21} = I_n, \qquad w_{12}^*w_{11} = w_{22}^*w_{21}, \qquad w_{22}^*w_{22} - w_{12}^*w_{12} = I_m.$$

Второе из этих равенств следует из определений w_{12} и w_{21}. А первое и третье имеют место, так как

$$\begin{aligned} w_{22}w_{22}^* &= b_2^*\varphi_2^{-1}(\varphi_2^{-1})^*b_2 = b_2^*(\varphi_2^*\varphi_2)^{-1}b_2 = b_2^*g^{-1}b_2 = \\ &= (I - s_0^*s_0)^{-1} = w_{22}(w_{22}^*w_{22} - w_{12}^*w_{12})^{-1}w_{22}^*; \\ w_{11}w_{11}^* &= b_1(\varphi_1^*)^{-1}\varphi_1^{-1}b_1^* = b_1(\varphi_1\varphi_1^*)^{-1}b_1^* = b_1f^{-1}b_1^* = \\ &= (I - s_0s_0^*)^{-1} = w_{11}(w_{11}^*w_{11} - w_{21}^*w_{21})^{-1}w_{11}^*. \end{aligned}$$

Воспользуемся для W леммой 3. Условия (3.12) здесь выполнены. В проверке нуждается лишь второе включение в (3.12). Имеем:

$$-\chi \overset{\text{def}}{=} w_{22}^{-1}w_{21} = w_{12}^*(w_{11}^*)^{-1} = w_{22}^*s_0^*(w_{11}^*)^{-1} =$$

$$= (\varphi_2^*)^{-1}b_2s_0^*b_1\varphi_1 = \varphi_2g^{-1}b_2s_0^*b_1\varphi_1 = \varphi_2b_2(I - s_0^*s_0)^{-1}s_0^*b_1\varphi_1 = \varphi_2b_2h_1b_1\varphi_1.$$

Поскольку уже доказано, что $W(\zeta)$ принимает j-унитарные значения, то $\|\chi(\zeta)\| \le 1$ п.в. Это вместе с условием $\chi \in D_+$ дает нужное включение $\chi \in B_{m\times n}$.

3) Пусть теперь в дополнение к условию (1.19) имеем: $(1 - \|s_0(\zeta)\|)^{-1} \in L^1$. Тогда в представлении $s_0 = F_W(0)$ $(W \in \mathrm{U}(n,m))$ по теореме 11 получаем:

$W \in U_r(n,m)$. Рассмотрим внутренние b_1 и b_2, взятые из представления W в виде (1.1), и задачу (1.3) с этими же b_1, b_2 и s_0. Согласно теореме 10 имеем $F_{s_0; b_1, b_2} = F_W(B_{n \times m})$. Решение s_0 этой задачи получается по общей формуле $s = F_W(E)$ при $E = E_0 = \mathrm{const}$.

Список литературы

1. *Д. З. Аров*, О граничных значениях сходящейся последовательности мероморфных матриц-функций.— Мат. заметки (1979), т. 25, № 3, с. 335—339.
2. *И. П. Федчина*, Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны–Пика.– Мат. исслед., Кишинев (1972), т. 7, вып. 4, с. 213—227.
3. *И. П. Федчина*, Описание решений касательной проблемы Неванлинны–Пика.– ДАН Арм.ССР, Сер. мат. (1975), т. X, № 1, с. 37—42.
4. *И. П. Федчина*, Касательная проблема Неванлинны–Пика с кратными точками.— ДАН Арм.ССР, Сер. мат. (1975), т. XI, № 4, с. 214—218.
5. *Д. З. Аров*, Гамма-производящие, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции. 1.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), вып. 51, с. 61—67.
6. *Д. З. Аров*, Гамма-производящие, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции. 2.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), вып. 52, с. 103—109.
7. *Д. З. Аров*, Гамма-производящие, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции. 3.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1990), вып. 53, с. 57—65.

Gamma-generating matrices, J-inner matrix functions and related extrapolation problems. 4.

D. Z. Arov

In this fourth conclusive part of the work are proved theorems on regular j-inner matrix functions ($j = \mathrm{diag}\,[I_n, -I_m]$) and on the corresponding generalized bitangential Schur–Nevanlinna–Pick problems formulated in the second part of the work. For independence of reading are repeated formulations of this theorems and of some other information of previous parts of the work.

Гамма-проізводящі матриці, J-внутришні матриці-функції та пов'язані з ними задачі экстраполяції. 4.

Д. З. Аров

У цій четвертій заключній частині роботи приводяться доведення теорем про регулярні j-внутрішні матриці-функції ($j = \mathrm{diag}\,[I_n, -I_m]$) та відповідні узагальнені бідотичні задачі Шура–Неванлінни–Піка, раніше сформульовані у другій частині роботи. Для можливості незалежного від попередніх частин читання тут подаються формуліровки цих теорем та інші необхідні свідомості з попередніх частин роботи.