Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с. 25-41

УДК 514

Восстановление трехмерного подмногообразия пятимерного евклидова пространства по вырожденному двумерному грассманову образу

В. А. Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 14 февраля 1994 года

В статье рассматривается проблема существования подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$ с заданным двумерным грассмановым образом. Доказано несколько необходимых и достаточных условий на грассманов образ, связанных с внешней геометрией грассманова образа как подмногообразия многообразия Грассмана.

1. Пусть $F^n \subset E^{n+m}$ — ориентируемое n-мерное подмногообразие евклидова пространства размерности $n + m$. Каждой точке $x \in F^n$ поставим в соответствие ориентированное подпространство $E^m \subset E^{n+m}$, параллельное нормальному пространству N_xF^n подмногообразия F^n в точке x и одинаково ориентированное с ним. Такое соответствие задает отображение ψ из F^n в грассманово многообразие $G^+(m,n + m)$ ориентированных m-мерных подпространств $(n + m)$-мерного евклидова пространства. Образ $\psi(F^n)$ называют грассмановым образом подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$. Будем обозначать его Г. В общем случае грассманов образ имеет ту же размерность, что и само подмногообразие F^n.

Ю. А. Аминовым в [1] была сформулирована следующая общая проблема: по заданному регулярному подмногообразию $\Gamma^n \subset G^+(m,n + m)$ восстановить регулярное подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$, имеющее Γ^n своим грассмановым образом. Наиболее плодотворно эта проблема изучалась для случая $F^2 \subset E^4$ в работах [1-3].

В некоторых случаях грассманов образ может иметь размерность меньшую, чем размерность F^n: это происходит тогда, когда нормальное пространство N_xF^n вдоль некоторых подмногообразий на F^n стационарно. Грассманов образ называют вырожденным, а само подмногообразие F^n — тангенциально вырожденным. Тангенциально вырожденные поверхности являются сильно-параболическими в смысле [4]. Проблема восстановления подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ по вырожденному грассманову образу также имеет определенный интерес. В случае $F^2 \subset E^4$ с вырожденным в линию грассмановым образом данный вопрос рассматривался в [5]. В предлагаемой статье первоначально предполагалось изложить результаты исследования проблемы восстановления $F^3 \subset E^5$ по заданному двумерному грассманову образу $\Gamma^2 \subset G^+(2,5)$. Однако большинство доказанных результатов удалось обобщить на случай $F^n \subset E^{n+2}$ с двумерным грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G^+(2,n + 2)$, и именно этим общим утверждениям посвящена настоящая статья.

Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть* Γ^2 *— регулярное* C^r, $r>2$, *двумерное подмногообразие в* $G^+(2,n+2)$. *Пусть через каждую точку* $Q\in\Gamma^2$ *проходит стандартное* $G^+(2,4)$, *такое, что касательное пространство* $T_Q\Gamma^2$ *лежит в* $T_QG^+(2,4)$. *Пусть в точке* $P\in\Gamma^2$ *секционная кривизна* $\overline{K}$ *многообразия* $G^+(2,n+2)$ *в направлении* $T_P\Gamma^2$ *не равна 1. Тогда существует окрестность* U *точки* P *на* Γ^2 *и регулярное* C^{r-1} *подмногообразие* $F^n\subset E^{n+2}$, *имеющее* U *своим грассмановым образом.*

Стандартным (стандартно вложенным) $G^+(m,m+k)$ в $G^+(m,m+n))$ назовем многообразие $G^+(m,m+k)$, реализованное в $G^+(m,m+n)$ как подмногообразие ориентированных подпространств $E^m\subset E^{m+n}$, ортогональных фиксированному ориентированному подпространству $E^{n-k}\subset E^{n+m}$. Отметим, что теорема 1 является некоторым обобщением утверждения, полученного Ю. А. Аминовым [1].

Доказано необходимое условие на грассманов образ.

Теорема 4. *Пусть регулярное подмногообразие* $\Gamma^k\subset G^+(m,n+m)$ *является грассмановым образом регулярного* C^r, $r>2$ *подмногообразия* $F^n\subset E^{n+m}$. *Тогда через каждую точку* $Q\in\Gamma^k$ *проходит стандартное* $G^+(m,m+k)$, *такое, что* $T_Q\Gamma^k\subset G^+(m,m+k)$.

Доказано утверждение, указывающее на существование подмногообразия в $G^+(2,n+2)$, удовлетворяющего необходимому условию теоремы 4 и не являющегося грассмановым образом никакого регулярного подмногообразия. Для этого рассматриваются специального вида стандартные сферы $S^n\subset G^+(2,n+2)$, каждая из которых образована ориентированными подпространствами $E^2\subset \dot{E}^{n+2}$, содержащими фиксированную прямую. Через каждую точку Q на $G^+(2,n+2)$ проходит однопараметрическое семейство стандартных сфер S^n, а их касательные пространства T_QS^n образуют в $T_QG^+(2,n+2)$ конус $\mathrm{Con}(Q)$. Любая двумерная площадка из $\mathrm{Con}(Q)$ лежит в касательном пространстве стандартного $G^+(2,4)$, проходящего через точку Q.

Теорема 2. *Пусть в некоторой точке* P *касательное пространство регулярного* C^r, $r>1$, *подмногообразия* $\Gamma^2\subset G^+(2,n+2)$ *лежит в* $\mathrm{Con}(P)$, *но не существует стандартной сферы* S^n, *такой, что* $T_P\Gamma^2\subset T_PS^n$. *Тогда:*

1. *Кривизна* $G^+(2,n+2)$ *в точке* P *в направлении* $T_P\Gamma^2$ *равна* 1.

2. *Не существует окрестности точки* P *на* Γ^2, *являющейся грассмановым образом какого-либо регулярного подмногообразия* $F^n\subset E^{n+m}$.

Теорема 3. *Пусть в каждой точке* Q *регулярного* C^r, $r>1$, *подмногообразия* $\Gamma^2\subset G^+(2,n+2)$ *касательное пространство* $T_Q\Gamma^2$ *лежит в касательном пространстве какой-либо стандартной сферы* S^n. *Тогда:*

1. *Кривизна* $G^+(2,n+2)$ *в точке* Q *в направлении* $T_Q\Gamma^2$ *равна* 1.

2. Γ^2 *лежит на стандартной сфере* S^n.

3. *Для любой точки $P \in \Gamma^2$ существует окрестность U и регулярное C^{r-1} подмногообразие $F^n \subset E^{n+2}$, для которого U — грассманов образ. Любое такое F^n является гиперповерхностью в некотором E^{n+1}.*

Как следствие теорем 1 и 3 изучено строение подмногообразий F^n, фигурирующих в содержании этих теорем. Доказан известный результат о том, что радиус-вектор таких поверхностей можно привести к виду

$$r(v^1,\ldots,v^n) = \sum_{i=1}^{n-2} \omega_i(v^1,v^2)\cdot v^{i+2} + \omega_{n-1}(v^1,v^2),$$

где ω_i — вектор-функции переменных v^1, v^2, а нормальное пространство N_xF^n вдоль подмногообразий $v^1 = \mathrm{const}$, $v^2 = \mathrm{const}$ стационарно.

Указан пример поверхности $F^3 \subset E^5$ с двумерным грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G^+(2,5)$, не являющейся цилиндром.

2. На многообразии $G = G^+(m,n+m)$ существует специальная система координат. Зафиксируем в E^{n+m} ортонормированный базис векторов e_i и рассмотрим подпространство $E_1^m = \mathrm{span}(e_{n+1},\ldots,e_{n+m})$, которое считаем положительно ориентированным. Подпространства E^m, проектирующиеся на E_1^m без вырождения с сохранением ориентации, образуют окрестность точки P, соответствующей E_1^m в G. Каждое такое E^m можно задать в декартовых координатах x^i в E^{n+m} в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 \ldots z_m^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ z_1^n \ldots z_m^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \ldots \\ x^{n+m} \end{pmatrix},$$

и каждое E^m натянуто на векторы $\varepsilon_i = e_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} z_i^j e_j$. Наборы чисел z_i^j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, являются локальными координатами на G, и таким путем на G вводится структура аналитического многообразия [6]. Будем представлять точку из G и вектор из T_QG матрицей размером $m\times n$.

Для G существует вложение в единичную сферу S^{N-1} с помощью плюккеровых координат ($N = C^m_{n+m}$ — биномиальный коэффициент), а именно: каждому ориентированному подпространству в E^{n+m}, натянутому на вектора ε_i, $i = \overline{1,m}$, ставится в соответствие точка в E^N с радиус-вектором $R = R_1/\mid R_1\mid$, где $R_1 = [\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m]$ — ориентированный поливектор. Плюккерово вложение — изометрическое и эквивариантное [7].

3. Рассмотрим в E^{n+2} множество M ориентированных подпространств E^2, содержащих фиксированную прямую l. Если $b = (b^1,\ldots,b^{n+2})$ — направляющий вектор прямой, то M как подмногообразие в $G' = G^+(2,n+2)$ задается в виде

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ & \dots \\ z_1^n & z_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^{n+1} \\ b^{n+2} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Каждое подмногообразие M изометрично сфере S^n радиуса 1 в G' и называется стандартной сферой в G' [8]. Касательное пространство стандартной сферы (3.1) определяется в $T_Q G'$ условием: для любого вектора $T \in T_Q S^n$ и только для таких векторов в $T_Q G'$

$$T \cdot \begin{pmatrix} b^{n+1} \\ b^{n+2} \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Условие (3.2) в общем случае приводит к следующему: если обозначить через T_i, $i = 1,2$, вектор-столбцы матрицы T и рассматривать их как вектора n-мерного евклидова пространства, то для любого $T \in T_Q S^n$

$$[T_1, T_2] = 0. \tag{3.3}$$

Обратно, если задан вектор $T \in T_Q G'$, удовлетворяющий (3.3), то однозначно восстанавливается стандартная сфера $S^n \in G'$, проходящая через точку $Q \in G'$, такая, что $T \in T_Q S^n$. Отметим, что через каждую точку $Q \subset G'$ проходит однопараметрическое семейство стандартных S^n, причем касательные пространства различных стандартных сфер в $T_Q G'$ не имеют общих направлений и образуют конус $\mathrm{Con}(Q)$, задаваемый в $T_Q G'$ условием (3.3). Интересна

Лемма 1. *Направления, касательные к стандартным сферам, проходящим через точку Q, и только они в $T_Q G'$ являются асимптотическими для G', вложенного в S^{N-1} с помощью плюккеровых координат.* (*То есть* $\mathrm{Con}(Q)$ — *конус асимптотических направлений в* $T_Q G'$.)

Доказательство. Радиус-вектор G', вложенного в E^N с помощью плюккеровых координат, имеет вид $R = R_1 / |R_1|$, где вектор R_1 согласно виду векторов ε_i (см. п. 2), имеет следующую структуру: $R_1 = (1; \Delta_1; \Delta_2)$, где Δ_1 — набор координат $(-1)^{\sigma_1} z_j^i$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$; Δ_2 — набор координат $(-1)^{\sigma_2}(z_j^i z_t^r - z_t^i z_j^r)$, $j, t = 1,2$, $i,r = \overline{1,n}$. Возьмем произвольную точку $Q \in G'$. Введем локальные координаты z_j^i так, чтобы точке Q отвечали значения $z_j^i = 0$. (Для этого в исходном пространстве E^{n+2} необходимо выбрать базис так, чтобы соответствующее точке Q подпространство $E^2 \subset E^{n+2}$ было натянуто на вектора e_{n+1}, e_{n+2}.) Легко видеть, что в точке Q

$$R_1 = (1; 0,\dots,0; 0,\dots,0),$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial z_j^i} = (0; 0,\ldots,(-1)^{\sigma_1},\ldots,0; 0,\ldots,0).$$

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial z_j^i \partial z_t^r} = (0; 0,\ldots,0; 0,\ldots,(-1)^{\sigma_3}(1-\delta_{jt})(1-\delta_{ir}),\ldots, 0),$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial z_j^i} = \frac{\partial R_1}{\partial z_j^i}, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial z_j^i \partial z_t^r} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial z_j^i \partial z_t^r} - \delta_{ir}\delta^{jt} R_1.$$

Учитывая, что R_1 есть нормаль к гиперсфере $S^{N-1} \subset E^N$ в точке Q, нетяжело получить, что проекция d^2R на нормальное пространство подмногообразия $G' \subset S^{N-1}$ в точке Q имеет вид $(0;0,\ldots,0;\Delta_3)$, где Δ_3 — набор координат $(-1)^{\sigma_2}(dz_j^i dz_t^r - dz_t^i dz_j^r)$, и условие равенства нулю этой проекции эквивалентно условию (3.3), являющемуся определяющим условием конуса $\mathrm{Con}(Q)$ в T_QG'. Таким образом, $\mathrm{Con}(Q)$ является конусом асимптотических направлений в точке Q подмногообразия $G' \subset S^{N-1}$. Учитывая инвариантность свойства асимптотичности при замене координат в G', получаем утверждение леммы 1.

Если точка $Q \in G'$ имеет координаты $z_j^i = a_j^i$, то семейство стандартных сфер S^n, проходящих через Q, можно задать в виде

$$\begin{cases} z_1^i = v^i \cos\alpha + a_1^i \sin^2\alpha - a_2^i \sin\alpha\cos\alpha \\ z_2^i = v^i \sin\alpha + a_2^i \cos^2\alpha - a_1^i \sin\alpha\cos\alpha \end{cases}, \quad i = \overline{1,n};$$

здесь $\alpha \in [0,\pi)$ — параметр семейства, а v^i — локальные координаты на сфере $S^n(\alpha)$. (Если E_2^2 — подпространство E^{n+2}, соответствующее точке $Q \in G'$, l — прямая в E_2^2, проектирующаяся на E_1^2 в прямую $\cos\alpha\, x^{n+1} + \sin\alpha\, x^{n+2} = 0$, то $S^n(\alpha)$ — стандартная сфера, которая образована подпространствами $E^2 \subset E^{n+2}$, содержащими l.) Вектор T из $T_QS^n(\alpha)$ имеет соответственно следующую форму:

$$T_1^i = t^i\cos\alpha, \qquad T_2^i = t^i\sin\alpha, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим в G множество ориентированных подпространств $E^m \subset E^{n+m}$, ортогональных фиксированному ориентированному подпространству E^k. Каждое такое множество представляет собой при $k < n$ многообразие $G^+(m,m+n-k)$. Если вектора $b_i = (b_i^1,\ldots,b_i^{n+m})$ образуют базис в E^k, то вложение такого $G^+(m,m+n-k)$, которое мы будем называть стандартным, в G описывается локально в виде

$$(b_i^{n+1},\ldots,b_i^{n+m}) = -(b_i^1,\ldots,b_i^n)z, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.5}$$

Касательное пространство $T_QG^+(m,m+n-k)$ в T_QG определяется условием

$$(b_i^1,\ldots,b_i^n)T = 0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.6}$$

Нетяжело видеть, что если задать в $T_Q G'$ двумерную площадку σ векторов вида (3.4), то можно определить $n-2$ векторов $(b_i^1,\dots,b_i^n)$ таких, что имеет место (3.6) для любого вектора $T \in \sigma$, и таким образом можно найти стандартное $G^+(2,4) \subset G'$, проходящее через точку Q и такое, что $\sigma \in T_Q G^+(2,4)$.

4. Если подмногообразие F^n задано в декартовых координатах в E^{n+m} гладкими C^r функциями $x^i(v^1,\dots,v^n)$, то грассманов образ Γ задается в G гладкими C^{r-1} функциями $z_j^i(v^1,\dots,v^n)$. В дальнейшем мы будем использовать известное утверждение, которое сформулируем следующим образом.

Лемма 2. *Если грассманов образ Γ регулярного C^r, $r>2$, подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ имеет размерность k, то на F^n можно ввести такие локальные координаты $v^1,\dots,v^n$, что $\partial z_j^r/\partial v^i = 0$, $i=\overline{k+1,n}$ (т.е. $N_x F^n$ стационарно при $v^i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,k}$).*

5. Доказательство теорем 1-3. Для решения задачи восстановления подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$ по заданному двумерному грассманову образу $\Gamma^2 \subset G'$ воспользуемся общим методом, предложенным Ю. А. Аминовым в [1, 2]. Нам задано регулярное C^r подмногообразие $\Gamma^2 \subset G'$ двумерных подпространств $E^2(v^1,v^2) \subset E^{n+2}$ в виде $z_j^i = z_j^i(v^1,v^2)$, $(v^1,v^2) \in D^2$, где D^2 — область в $\mathbf{R}^2$. (Так как рассмотрение будет носить локальный характер, то, не уменьшая общности, можно считать, что все $E^2(v^1,v^2)$ проектируются на E_1^2 без вырождения с сохранением ориентации.) В каждом $E^2(v^1,v^2)$ существует базис векторов ε_1, ε_2 специального вида. Используя лемму 2, будем искать регулярное подмногообразие $F^n \subset E^{n+2}$, параметризованное координатами $v^1,\dots,v^n$, где $v = (v^1,\dots,v^n) \in D^n$, D^n — цилиндр в $\mathbf{R}^n$ над областью D^2 в плоскости $\mathbf{R}^2$ параметров v^1, v^2. Требуется найти $n+2$ функций $x^i(v^1,\dots,v^n)$, удовлетворяющих условиям

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n+2} \varepsilon_i^j \frac{\partial x^j}{\partial v^t} = 0, \qquad i = 1,2, \qquad t = \overline{1,n}; \right. \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rg} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial v^j} \right\| = n. \tag{5.2}$$

Тогда функции x^i как декартовы координаты в E^{n+2} образуют радиус-вектор поверхности F^n, для которой Γ^2 является грассмановым образом в силу (5.1) и которая регулярна в соответствии с (5.2). Учитывая вид векторов ε_i, систему (5.1) можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x^{n+1}}{\partial v^i} &= -\sum_{j=1}^{n} z_1^j \frac{\partial x^j}{\partial v^i} \\ \frac{\partial x^{n+2}}{\partial v^i} &= -\sum_{j=1}^{n} z_2^j \frac{\partial x^j}{\partial v^i} \end{aligned} \right. , \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Условия совместности систем (5.3) имеют вид

$$\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_t^s}{\partial v^i}\frac{\partial x^s}{\partial v^j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_t^s}{\partial v^j}\frac{\partial x^s}{\partial v^i},\right.$$

Так как по предположению $\partial z_j^i/\partial v^t=0$, $t=\overline{3,n}$, то получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_t^i}{\partial v^1}\frac{\partial x^i}{\partial v^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_t^i}{\partial v^2}\frac{\partial x^i}{\partial v^j},\qquad t=1,2; \tag{5.4.1}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_t^i}{\partial v^1}\frac{\partial x^i}{\partial v^1}=0 &&(5.4.2)\\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_t^i}{\partial v^2}\frac{\partial x^i}{\partial v^j}=0 &&(5.4.3)\end{aligned}\right.\quad,\ t=1,2,\ j=\overline{3,n}.$$

Поскольку все $E^2(v^1,v^2)$ проектируются без вырождения на E_1^2, условие (5.2) эквивалентно следующему:

$$\det J\neq 0, \tag{5.5}$$

где J — матрица с элементами $J_j^i=\partial x^i/\partial v^j$., $i,j=\overline{1,n}$.

Таким образом, вопрос нахождения регулярного $F^n\subset E^{n+2}$ с заданным грассмановым образом $\Gamma^2\subset G'$ эквивалентен проблеме нахождения в D^n решения системы (5.4), удовлетворяющего условию (5.5).

Лемма 3 (необходимое условие на грассманов образ). *Если Γ^2 — грассманов образ регулярного C^r, $r>2$, подмногообразия $F^n\subset E^{n+2}$, то через каждую точку $Q\in\Gamma^2$ проходит стандартное $G^+(2,4)$, такое, что $T_Q\Gamma^2\subset T_QG^+(2,4)$.*

Доказательство. Пусть точке $Q\in\Gamma^2$ соответствуют точка $(v_0^1, v_0^2)\in D^2$ и некоторая точка $v_0\in D^n$. Рассмотрим в G' подмногообразие

$$\left\{\left(\frac{\partial x^1}{\partial v^i},\dots,\frac{\partial x^n}{\partial v^i}\right)\Big|_{v_0}z=\left(\frac{\partial x^1}{\partial v^i},\dots,\frac{\partial x^n}{\partial v^i}\right)\Big|_{v_0}z(v_0^1, v_0^2),\qquad i=\overline{1,n}.\right.$$

Данное подмногообразие является областью на стандартном $G^+(2,4)$, проходящем через Q, и, согласно (5.4.2), (5.4.3), $T_Q\Gamma^2\subset T_QG^+(2,4)$. Лемма доказана.

Точки на $\Gamma^2\subset G'$ классифицируем следующим образом: точки, в которых $T_Q\Gamma^2\not\subset \mathrm{Con}\,(Q)$, и точки, где $T_Q\Gamma^2\subset \mathrm{Con}\,(Q)$; последние назовем точками уплощения.

Предположим, что точка $P\in\Gamma^2$ не является точкой уплощения. Не уменьшая общности можно считать, что все точки на Γ^2 не являются точками уплощения, а координаты на Γ^2 выбраны так, что направления $\partial z/\partial v^i$, $i=1,2$, не являются асимптотическими для $G'\subset S^{N-1}$. Тогда, в силу леммы 1, $H_i=[\partial z_1/\partial v^i,\partial z_2/\partial v^i]\neq 0$,

$i = 1,2$, в точках D^2. В соответствии с необходимым условием на грассманов образ бивектора H_1, H_2 n-мерного евклидова пространства коллинеарны в каждой точке D^2 и, следовательно, существуют гладкие $C^{r-1}(D^2)$ функции φ_{ij}, $i,j = 1,2$, такие, что

$$\begin{pmatrix} \partial z_1/\partial v^2 \\ \partial z_2/\partial v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial z_1/\partial v^1 \\ \partial z_2/\partial v^1 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

причем матрица φ не выраждена.

В дальнейшем будем предполагать, что в

$$D^2 \ H_i^{12} = \partial z_1^1/\partial v^i \, \partial z_2^2/\partial v^i - \partial z_1^2/\partial v^i \, \partial z_2^1/\partial v^i \neq 0.$$

Уравнения (5.4.3) с учетом (5.6) эквивалентны уравнениям (5.4.2), поэтому мы исключим их из рассмотрения. В некоторой окрестности U^n точки $v_0 \in D^n$, соответствующей точке $P \in \Gamma^2$, уравнения (5.4.2) можно проинтегрировать:

$$\left\{ x^1 \frac{\partial z_i^1}{\partial v^1} + \ldots + x^n \frac{\partial z_i^n}{\partial v^1} = f_i(v^1, v^2), \qquad i = 1,2. \right. \tag{5.7}$$

Для любого $C^{r-1}(U^n)$ решения уравнений (5.4.2) существуют однозначно определяемые из (5.7) $f_i(v^1,v^2) \in C^{r-1}(U^2)$, $i = 1,2$, где U^2 — соответствующая окрестность точки (v_0^1,v_0^2) в D^2. Для любых $C^{r-1}(U^2)$ функций $f^1(v^1,v^2)$, $f^2(v^1,v^2)$ и для любых $C^{r-1}(U^n)$ функций $x^3,\ldots,x^n$ существуют однозначно определяемые из (5.7) функции x^1, $x^2 \in C^{r-1}(U^n)$, такие, что набор функций $x^1,\ldots,x^n$ дает гладкое $C^{r-1}(U^n)$ решение уравнений (5.4.2). Отметим, что при данных $x^3,\ldots,x^n$ заданию f_1, f_2 отвечает задание x^1, x^2 в области $U^2 = \{ v \in U^n \mid v^i = v_0^i, \ i = \overline{3,n} \}$.

Подставляя (5.7) в (5.4.1) и учитывая (5.6), нетяжело получить, что функции $x^1,\ldots,x^n$ из (5.7) будут решением уравнений (5.4.1), а, значит, и всей системы (5.4), тогда и только тогда, когда f_1, f_2 удовлетворяют в U^2 условию

$$\frac{\partial f}{\partial v^2} - \varphi \frac{\partial f}{\partial v^1} - \frac{\partial \varphi}{\partial v^1} f = 0, \tag{5.8}$$

где f — вектор-столбец с координатами f_1, f_2. Это — линейная система двух уравнений первого порядка в частных производных, коэффициенты которой определяются подмногообразием $\Gamma^2 \subset G'$. Такие системы допускают определенную классификацию [9, с. 175]. Рассмотрим характеристический определитель $\det \|\varphi + \lambda I\|$ системы (5.8) и приравняем его нулю:

$$\lambda^2 + \operatorname{Tr}\varphi\lambda + \det\varphi = 0. \tag{5.9}$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения есть $\Delta = (\operatorname{Tr}\varphi)^2 - 4\det\varphi$. Знак Δ, как известно, характеризует тип системы (5.8): при $\Delta > 0$ система гиперболична, при $\Delta < 0$ — эллиптична, при $\Delta = 0$ — параболична. Как видим, тип системы (5.8) полностью определяется подмногообразием Γ^2. Введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_1^2 \\ z_2^1 & z_2^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} z_1^3 & \dots & z_1^n \\ z_2^3 & \dots & z_2^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $H_i^{12} = \det(\partial A/\partial v^i)$; непосредственным вычислением можно получить, что $\varphi = \partial A/\partial v^2 \cdot (\partial A/\partial v^1)^{-1}$, и доказать, что

$$(\partial A/\partial v^1)^{-1}\partial B/\partial v^1 = (\partial A/\partial v^2)^{-1}\partial B/\partial v^2.$$

Используя эти факты, можно ввести в рассмотрение функции $g_i = \varphi_{i1} f_1 + \varphi_{i2} f_2$ — система (5.8) будет тогда эквивалента более простой системе для g_1, g_2 того же типа:

$$\frac{\partial A}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^2}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial v^1}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.10}$$

Функции g_1, g_2 и x^1, x^2 связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial A}{\partial v^1}\right)^{-1}\frac{\partial B}{\partial v^1}\begin{pmatrix} x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Условие регулярности также можно привести к более удобному виду. А именно, используя (5.4.2), можно получить, что $\det J = \det J' \det J''$, где J'' — матрица с элементами $J''^i_j = \partial x^{i+2}/\partial v^{j+2}$, $i, j = \overline{1, n-2}$, при этом матрица J' имеет следующий вид:

$$J' = \left(\frac{\partial A}{\partial v^1}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z^*}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \vdots \frac{\partial z^*}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right),$$

где $*$ — транспонирование); учитывая (5.4.1), получаем

$$J' = \left(\frac{\partial A}{\partial v^1}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z^*}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \vdots \frac{\partial z^*}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial v^1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right).$$

Аналогично, используя (5.4.3), можно получить, что

$$J' = \left(\frac{\partial A}{\partial v^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z^*}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \vdots \frac{\partial z^*}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial v^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right).$$

Поэтому $\det J' \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\det\left(\frac{\partial z^*}{\partial v^1}\mathrm{d}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \vdots \frac{\partial z^*}{\partial v^2}\mathrm{d}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \neq 0. \tag{5.12}$$

Отметим, что в силу регулярности Γ^2 вектора $\partial z/\partial v^i$ не коллинеарны. Зададим $x^3, \dots, x^n$ в U^n в виде гладких C^{r-1} функций так, чтобы в точке v_0 выполнялось $\det J'' \neq 0$.

Пусть система (5.10) гиперболична. Возьмем нехарактеристическую гладкую кривую, проходящую через точку (v_0^1,v_0^2) в U^2 и зададим значения функций g_1, g_2 на этой кривой в виде гладких C^{r-1} функций так, чтобы в точке (v_0^1,v_0^2) было выполнено условие (5.12). Тогда в некоторой окрестности точки (v_0^1,v_0^2) в D^2 существует однозначно определяемое гладкое C^{r-1} решение g_1, g_2 системы (5.10), и, следовательно, в некоторой окрестности точки v_0 в D^n существует однозначно определяемое гладкое C^{r-1} решение $x^1,\ldots,x^n$ системы (5.4), удовлетворяющее условию регулярности (5.5).

Пусть теперь система (5.10) эллиптична. М. А. Лаврентьев [10] ввел понятие квазиконформного отображения, соответствующего системе дифференциальных уравнений в частных производных: гомеоморфизм области D_1 на область D_2 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ называется квазиконформным, соответствующим системе $\Phi_i(x,y,u,v,\partial u/\partial x,\ldots,\partial v/\partial y) = 0$, $i = 1,2$, удовлетворяют этой системе. В [10] доказана теорема существования и единственности соответствующего сильно эллиптической системе квазиконформного отображения, переводящего друг в друга области D_1 и D_2, которые ограничены кусочно-гладкими кривыми, и тройку точек из ∂D_1 в тройку точек из ∂D_2, причем если коэффициенты соответствующей системы гладкие C^2, то и решение будет гладким C^2. Возьмем в U^2 область с гладкой границей U_1^2 так, чтобы $(v_0^1,v_0^2) \in \partial U_1^2$, и зададим значения g_1, g_2 на ∂U_1^2 в виде гладких C^{r-1} функций так, чтобы в точке $v_0 \in D^n$ было выполнено условие (5.12). Тогда в $\overline{U_1^2}$ по теореме Лаврентьева существует единственное решение g_1, $g_2 \in C^2(u_1^2)$ системы (5.10), удовлетворяющее в точке (v_0^1,v_0^2) условию (5.12). Возьмем теперь область $U_2^2 \subset U^2$, содержащую U_1^2, так, чтобы точка (v_0^1,v_0^2) оказалась внутри U_2^2. Тогда мы можем единственным образом продолжить решение системы (5.10) с области U_1^2 на U_2^2 [9, с. 393] и таким образом получить в некоторой окрестности точки (v_0^1,v_0^2) гладкое C^2 решение g_1, g_2 системы (5.10), а, значит, в некоторой окрестности точки v_0 — гладкое C^2 решение $x^1,\ldots,x^n$ системы (5.4), удовлетворяющее условию (5.12), а, значит, и условию регулярности (5.5). Так как коэффициенты системы (5.10) являются гладкими C^{r-1}, то и решение системы будет гладким C^{r-1} [9, с. 343], и, следовательно, соответствующее решение $x^1,\ldots,x^n$ системы (5.4) также будет гладким C^{r-1}. Поэтому в некоторой окрестности точки v_0 в D^n построено гладкое C^{r-1} решение системы (5.4), удовлетворяющее условию (5.5).

Подставив в (5.3) функции $x^1,\ldots,x^n$, полученные в рассмотренных случаях, будем иметь для каждой из функций x^{n+1}, x^{n+2} совместную систему. Задавая значения x^{n+1}, x^{n+2} в точке v_0, однозначно определяем решение этих систем, гладкое C^r, и таким образом находим радиус-вектор $(x^1,\ldots,x^{2+n})$ регулярного C^{r-1} подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$, для которого соответствующая окрестность U точки P на Γ^2 будет грассмановым образом.

Характеристические направления системы (5.8) являются асимптотическими направлениями подмногообразия $G' \subset S^{N-1}$. Действительно, направление $a\partial z/\partial v^1 + b\partial z/\partial v^2$ асимптотично тогда и только тогда, когда

$$\left[a\frac{\partial z_1}{\partial v^1}+b\frac{\partial z_1}{\partial v^2};\, a\frac{\partial z_2}{\partial v^1}+b\frac{\partial z_2}{\partial v^2}\right]=0.$$

Используя (5.6), можно привести это уравнение к виду

$$(a^2+ab\operatorname{Tr}\varphi+b^2\det\varphi)\left[\frac{\partial z_1}{\partial v^1},\frac{\partial z_2}{\partial v^1}\right]=0. \tag{5.13}$$

Как видно, асимптотические направления $(a,в)$, определяемые уравнением (5.13), совпадают с характеристическими направлениями ($\lambda = a/b$) системы (5.8), определяемыми уравнением (5.9). Итак, тип системы (5.8) обладает определенным инвариантным содержанием.

Пусть точка P — точка уплощения, т.е. $T_P\Gamma^2 \subset \mathrm{Con}\,(P)$. Тогда, вспоминая (3.4), можно записать

$$\frac{\partial z}{\partial v^i}=\begin{pmatrix} t_i^1\cos\alpha_i & t_i^1\sin\alpha_i \\ \dots & \dots \\ t_i^n\cos\alpha_i & t_i^n\sin\alpha_i\end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Так как $\forall\, a, b$: $\partial z/\partial v^1 a+\partial z/\partial v^2 b\in \mathrm{Con}\,(P)$, то получаем

$$[t_1,t_2]\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0, \tag{5.15}$$

где t_i — вектор-столбцы с координатами t_i^j, $i=1,2$, $j=\overline{1,n}$.

Предположим, что не существует стандартной сферы $S^n(\alpha)$, проходящей через точку P, такой, что $T_P\Gamma^2\subset T_PS^n(\alpha)$. Тогда $\alpha_1\neq\alpha_2$, и из (5.15) следует, что вектор-столбцы t_1, t_2 коллинеарны. Система (5.4) в точке P примет поэтому вид

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^n t_1^i\dfrac{\partial x^i}{\partial v^2}\right)\cos\alpha_1=\left(\sum\limits_{i=1}^n t_2^i\dfrac{\partial x^i}{\partial v^1}\right)\cos\alpha_2;\\[2ex] \left(\sum\limits_{i=1}^n t_1^i\dfrac{\partial x^i}{\partial v^2}\right)\sin\alpha_1=\left(\sum\limits_{i=1}^n t_2^i\dfrac{\partial x^i}{\partial v^1}\right)\sin\alpha_2;\\[2ex] \sum\limits_{i=1}^n t_j^i\dfrac{\partial x^i}{\partial v^s}=0,\ j=1,2,\ s=\overline{3,n};\end{cases}$$

откуда получаем, учитывая $\alpha_1\neq\alpha_2$, что

$$\left\{\sum_{i=1}^n t_1^i\frac{\partial x^i}{\partial v^j}=\sum_{i=1}^n t_2^i\frac{\partial x^i}{\partial v^j}=0,\qquad j=\overline{1,n}.\right. \tag{5.16}$$

В силу регулярности Γ^2 $t_i\neq 0$ в P. Следовательно, любое решение системы (5.4) в точке, соответствующей точке $P\in\Gamma^2$, с учетом (5.16) не будет удовлетворять условию регулярности (5.5). Поэтому не существует окрестности точки P на Γ^2, являющейся грассмановым образом какого-либо регулярного подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$, что составляет содержание пункта 2 теоремы 2.

Пусть теперь в каждой точке $Q \in \Gamma^2$ касательное пространство $T_Q\Gamma^2$ лежит в касательном пространстве стандартной сферы, проходящей через точку Q. Тогда, снова учитывая (3.4), получаем, что в каждой точке $Q \in \Gamma^2$ имеет место

$$\frac{\partial z}{\partial v^i} = \begin{pmatrix} t_i^1 \cos\alpha & t_i^1 \sin\alpha \\ \dots & \dots \\ t_i^n \cos\alpha & t_i^n \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,$$

причем в силу регулярности Γ^2 вектор-столбцы t_1, t_2 не коллинеарны в каждой точке $Q \in \Gamma^2$. Используя это представление, запишем условия равенства смешанных производных для z. Получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial t_1^i}{\partial v^2} - \frac{\partial t_2^i}{\partial v^1}\right)\cos\alpha - \left(t_1^i \frac{\partial \alpha}{\partial v^2} - t_2^i \frac{\partial \alpha}{\partial v^1}\right)\sin\alpha = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{1,n}, \\ &\left(\frac{\partial t_1^i}{\partial v^2} - \frac{\partial t_2^i}{\partial v^1}\right)\sin\alpha + \left(t_1^i \frac{\partial \alpha}{\partial v^2} - t_2^i \frac{\partial \alpha}{\partial v^1}\right)\cos\alpha = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

1. $\partial t_1/\partial v^2 = \partial t_2/\partial v^1$;
2. $t_1\, \partial\alpha/\partial v^2 = t_2\, \partial\alpha/\partial v^1$, откуда $\alpha = \mathrm{const}$.

Поэтому легко видеть, что Γ^2 лежит на стандартной сфере.

Система (5.4) примет вид

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_1^i \frac{\partial x^i}{\partial v^2} = \sum_{i=1}^{n} t_2^i \frac{\partial x^i}{\partial v^1}; & (5.17.1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_j^i \frac{\partial x^i}{\partial v^s} = 0, \quad j = 1,2, \quad s = \overline{3,n}. & (5.17.2) \end{cases}$$

Не уменьшая общности будем считать, что на Γ^2: $t_1^1 t_2^2 - t_2^1 t_1^2 \neq 0$. Уравнения (5.17.2) можно проинтегрировать:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_j^i x^i = f_j(v^1, v^2), \qquad i = 1,2. \right. \tag{5.18}$$

Для любого C^{r-1} решения $x^1,\dots,x^n$ уравнений (5.17.2) существуют единственные функции f_1, $f_2 \in C^{r-1}$, такие, что имеет место (5.18). Если задать функции $x^3,\dots,x^n \in C^{r-1}$ и $f_1, f_2 \in C^{r-1}$, то однозначно можно определить x^1, x^2 из (5.18), а, значит, найти C^{r-1} решение уравнений (5.17.2). Подставляя (5.18) в (5.17.1), получаем, что найденное решение уравнений (5.17.2) будет решением уравнений (5.17.1), а, следовательно, и всей системы (5.17) тогда и только тогда, когда

$$\partial f_2/\partial v^1 = \partial f_1/\partial v^2. \tag{5.19}$$

Используя (5.17.2), условие (5.5) можно привести к виду

$$\det J = \det J' \det J'' \neq 0,$$

где J'' — матрица с элементами $J''^i_j = \partial x^{i+2}/\partial v^{j+2}$, $i,j = \overline{1,n-2}$, а J' может быть представлена в виде

$$J' = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} t_1^1 & \dots & t_1^n \\ t_2^1 & \dots & t_2^n \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} t_1^1 & \dots & t_1^n \\ t_2^1 & \dots & t_2^n \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^2} \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \right).$$

Зададим в D^n гладкие C^{r-1} функции $x^3,\dots,x^n$ так, чтобы в точке v_0 $\det J'' \neq 0$. Условие $\det J' \neq 0$, учитывая (5.18), можно записать при заданных $x^3,\dots,x^n$ как условие на f_1, f_2. Задавая $f_1 \in C^{r-1}(D^2)$ и f_2 на линии $v^1 = v_0^1$ в D^2 в виде гладкой C^{r-1} функции так, чтобы в точке (v_0^1, v_0^2) было выполнено $\det J' \neq 0$, найдем в некоторой окрестности точки $(v_0^1, v_0^2) \in D^2$ решение f_1, f_2 уравнения (5.19) гладкое C^{r-1}, а, значит, найдем в некоторой окрестности точки $v_0 \in D^n$ гладкое C^{r-1} решение $x^1,\dots,x^n$ системы (5.17), эквивалентной в рассматриваемом случае системе (5.4), которая удовлетворяет условию регулярности (5.5). Подставляя найденные $x^1,\dots,x^n$ в (5.3), получаем для каждой из функций x^{n+1}, x^{n+2} совместную систему: задавая значения x^{n+1}, x^{n+2} в точке v_0, находим решение этих систем гладкое C^{r-1}. Таким образом, найдена регулярная поверхность $F^n \subset E^{n+2}$, гладкая C^{r-1}, с радиус-вектором $(x^1,\dots,x^{n+2})$, для которой некоторая окрестность U точки P на Γ^2 является грассмановым образом. Так как Γ^2 лежит на стандартной сфере, то все нормальные плоскости N_xF^n параллельны некоторому фиксированному направлению в E^{n+2}, поэтому F^n — гиперповерхность в некотором E^{n+1}. Пункты 2 и 3 теоремы 3 доказаны.

Нами остались не рассмотрены случаи, когда P является: а) точкой, в которой система (5.8) параболична; б) точкой, в которой $T_P\Gamma^2$ лежит в касательном пространстве стандартной сферы S^n, но являющейся предельной точкой множества точек, не являющихся точками уплощения либо удовлетворяющих условиям теоремы 2.

Завершим доказательство теорем 1-3 вычислением кривизны $\overline{K}$ многообразия G' в направлении $T_P\Gamma^2$. Известно, что $\overline{K} \in [0,2]$. Используем формулу Вонга [11]:

$$\overline{K}(X,Y) = \frac{1/2\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_1\Lambda_1^*) + 1/2\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_2\Lambda_2^*)}{\mathrm{Tr}\,(XX^*)\mathrm{Tr}\,(YY^*) - \left(\mathrm{Tr}\,(XY^*)\right)^2}, \tag{5.20}$$

где $X, Y \in T_PG'$, $\Lambda_1 = XY^* - YX^*$, $\Lambda_2 = X^*Y - Y^*X$, $*$ — транспонирование.

Если P — не точка уплощения, то взяв $X = \partial z/\partial v^1$, $Y = \partial z/\partial v^2$ и учитывая (5.6), получим, вычтя числитель из знаменателя в (5.20):

$$\left|\left[\frac{\partial z_1}{\partial v^1}, \frac{\partial z_2}{\partial v^1}\right]\right| \left((\operatorname{Tr}\varphi)^2 - 4\det\varphi\right) = \left|\left[\frac{\partial z_1}{\partial v^1}, \frac{\partial z_2}{\partial v^1}\right]\right| \Delta.$$

Таким образом, если $\overline{K} > 1$, то в точке P система (5.8) эллиптична, если $\overline{K} < 1$ — гиперболична, если $\overline{K} = 1$ — параболична. Если $\overline{K} \neq 1$, то в некоторой окрестности точки P система (5.8) либо гиперболична, либо эллиптична — в обоих случаях проблема восстановления решена.

Если P — точка уплощения, то с учетом (5.14) получаем

$$\overline{K}\left(\frac{\partial z}{\partial v^1}, \frac{\partial z}{\partial v^2}\right) = \frac{(t_1,t_2)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \left|[t_1,t_2]\right|^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{(t_1,t_1)\cdot(t_2,t_2) - (t_1,t_2)^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)} .$$

В силу (5.15) имеем $\overline{K} = 1$, и если $\overline{K} \neq 1$, то точка P не является точкой уплощения. Теоремы 1–3 доказаны.

Есть все основания быть уверенным в том, что поведение грассманова образа Γ^2 в значительной степени определяется поведением базы F^2 сильно параболической поверхности $F^n \subset E^{n+2}$, для которой Γ^2 — грассманов образ. Так, в случае, когда $F^2 \subset E^{n+2}$ имеет плоскую нормальную связность, кривизна $\overline{K}$ вдоль $T_P\Gamma^2$ не больше 1.

6. Рассмотрим строение подмногообразий $F^n \subset E^{n+2}$, полученных при доказательстве теоремы 1. Уравнения системы (5.3) при $j = \overline{3,n}$ можно проинтегрировать:

$$\begin{cases} x^{n+1} = -\sum\limits_{i=1}^{n} z_1^i x^i + L^1(v^1,v^2) \\ x^{n+2} = -\sum\limits_{i=1}^{n} z_2^i x^i + L^2(v^1,v^2) \end{cases} \tag{6.1}$$

Функции x^{n+1}, x^{n+2} будут решением системы (5.3) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^1}{\partial v^i} = +\sum\limits_{j=1}^{n} x^j \dfrac{\partial z_1^j}{\partial v^i} \\ \dfrac{\partial L^2}{\partial v^i} = +\sum\limits_{j=1}^{n} x^j \dfrac{\partial z_2^j}{\partial v^i} \end{cases}, \quad i = \overline{1,2}.$$

Используя (5.7), получаем тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^1}{\partial v^1} = f_1, \quad \dfrac{\partial L^1}{\partial v^2} = \varphi_{11} f_1 + \varphi_{12} f_2, \\ \dfrac{\partial L^2}{\partial v^1} = f_2, \quad \dfrac{\partial L^2}{\partial v^2} = \varphi_{21} f_1 + \varphi_{22} f_2, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial A}{\partial v^1}\right)^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} - \frac{\partial B}{\partial v^1} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^n \end{pmatrix} \right\}.$$

Радиус-вектор поверхности $F^n \subset E^{n+2}$ в силу (6.1) имеет вид $r = L + \sum_{i=1}^{n} \omega_i x^i$, где $\omega_i = (\delta_i^1,\ldots,\delta_i^n, -z_1^i, -z_2^i)$, $L = (0,\ldots,0,L^1,L^2)$. Так как x^1, x^2 есть линейная комбинация $x^3,\ldots,x^n$, f_1, f_2 с коэффициентами, определяемыми грассмановым образом, то радиус-вектор можно привести к виду $r = L' + \sum_{i=1}^{n} \omega_i' x^i$, где ω_i' — вектор-функции переменных v^1,v^2, определяемые грассмановым образом, а L' — вектор-функция переменных v^1,v^2, определяемая, кроме того, и функциями f^1, f^2. Поскольку $x^3,\ldots,x^n$ выбиралась так, что $\det J'' \neq 0$ то, заменив $v^3,\ldots,v^n$ на $x^3,\ldots,x^n$ и сделав соответствующие переобозначения, получим указанный во введении вид радиус-вектора поверхности $F^n \subset E^{n+2}$.

В случае теоремы 3 рассуждения аналогичны.

7. Доказательство теоремы 4. Пусть Γ^k задано в G радиус-вектором $z_j^i = z_j^i(v^1,\ldots,v^k)$, а $F^n \subset E^{n+m} - r = \{ x^i(v^1,\ldots,v^n) \}$. Пусть точке P отвечают значения координат $v_0 = (v_0^1,\ldots,v_0^k)$ на Γ^k, а соответствующей точке X на F^n — $v_0' = (v_0^1,\ldots,v_0^n)$. Рассмотрим в G подмногообразие, задаваемое локально в виде

$$\left\{ \left(\frac{\partial x^1}{\partial v^i},\ldots,\frac{\partial x^n}{\partial v^i}\right) \Bigg|_{v_0'} z = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v^i},\ldots,\frac{\partial x^n}{\partial v^i}\right) \Bigg|_{v_0'} z(v_0), \quad i = \overline{k+1,n}. \right.$$

Это подмногообразие является областью на стандартном $G^+(m,m+k)$ в G, проходящем через точку P (см. п. 3). $T_pG^+(m,m+k)$ определяется в T_pG условием: вектор $T \in T_pG$ лежит в $T_pG^+(m,m+k)$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial v^i},\ldots,\frac{\partial x^n}{\partial v^i}\right) \Bigg|_{v_0'} T = 0, \quad i = \overline{k+1,n}. \tag{7.1}$$

Нормальное пространство $N_X F^n$ натянуто на векторы $\varepsilon_j = (z_j^1,\ldots,z_j^n, \delta_j^1,\ldots,\delta_j^m)$. Поэтому $(\partial r/\partial v^i,\varepsilon_j) = 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, откуда

$$\left\{ \frac{\partial x^{s+n}}{\partial v^i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial v^i} z_s^j, \quad i = \overline{1,n}, \quad s = \overline{1,m}. \right.$$

Условия совместности данной системы $\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i = 0$ при $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{k+1,n}$ есть

$$\left\{ \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial x^t}{\partial v^i} \frac{\partial z_s^t}{\partial v^j} = 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{k+1,n}, \quad s = \overline{1,m}. \right.$$

Поэтому любой вектор $T \in T_p\Gamma^k$ удовлетворяет условию (7.1), откуда и следует, что $T_p\Gamma^k \subset T_pG^+(m,m+k)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае невырожденного грассманова образа теорема 4 теряет свою содержательность.

8. П р и м е р. Укажем пример $F^3 \subset E^5$, которая не является цилиндром и имеет двумерный грассманов образ: такой будет поверхность с радиус-вектором

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ v^1 \\ v^2/2 \\ (v^1)^2/2 \\ v^1v^2/2 \end{pmatrix} + v^3 \begin{pmatrix} 1 \\ (v^1)^2 \\ v^1v^2 \\ \frac{2}{3}(v^1)^3 \\ (v^1)^2v^2 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Грассманов образ имеет вид

$$z = \begin{pmatrix} (v^1)^3/3 & (v^1)^2v^2/2 \\ -v^1 & -v^2/2 \\ 0 & -v^1 \end{pmatrix}.$$

Вдоль подмногообразия $v^1 = \mathrm{const}$, $v^2 = \mathrm{const}$ нормальное пространство N_XF^3 стационарно. Легко видеть из (8.1), что указанная поверхность не является цилиндром.

Список литературы

1. *Ю. А. Аминов*, Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по грассманову образу.— Мат. сб. (1982), т. 117, № 2, с. 147—160.
2. *Ю. А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб. (1980), вып. 23, с. 3—16.
3. D. *Hoffman and R. Osserman*, The Gauss map of surfaces in R^3 and R^4.— Proc. London Math. Soc. (1985), v. 50, № 1, p. 27—56.
4. *А. А. Борисенко*, О полных параболических поверхностях.— Укр. геометр. сб. (1985), вып. 28, с. 8—19.
5. *Ю. А. Аминов, Т. С. Тарасова*, Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу.— Укр. гуометр. сб. (1983), вып. 26, с. 6—13.
6. *В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс*, Начальный курс топологии. Геометрические главы. Наука, Москва (1977), 488 с.
7. *А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — Успехи мат. наук. (1991), т. 46, вып. 2 (278), с. 41—83.
8. *Ю. А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. 1. Укр. геометр. сб. (1991), вып. 34, с. 83—98.
9. *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, Мир, Москва (1964), 830 с.
10. *М. А. Лаврентьев*, Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей.— Изв. АН СССР, сер. мат. (1948), т. 12, с. 513—534.
11. *Y. C. Wong*, Sectional curvatures of Grassmann manifolds.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1968), v. 60, № 1, p. 76—79.

On reconstruction of a 3-dimensional submanifold of a 5-dimensional Euclidean space from a degenerate 2-dimensional Grassmann image

V. A. Gorkaviy

The problem of the existence of the submanifold $F^n \subset E^{n+2}$ with a given degenerate 2-dimensional Grassmann image generalized Gauss image is studied. Some sufficient and necessary conditions on the Grassmann image are proved associated with the external geometry of the Grassmann image as a submanifold of Grassmannian.

Відбудова тривимірного підмноговиду п'ятивимірного евклідового простору за виродженим двумірним грасмановим образом

В. О. Горькавий

У статті розглядається проблема існування підмноговида $F^n \subset E^{n+2}$ із заданим грасмановим образом. Доведено декілька необхідних та достатніх умов на *грасманів образ, зв'язаних з зовнішньою геометрією* грасманова образу як підмноговиду многовида Грасмана.