Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с.51-67

УДК 517.946

Усреднение случайного блуждания на решетках со слабыми связями

М. Б. Краснянский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 15 апреля 1994 г.

Изучается асимптотическое поведение случайного блуждания на решетке со слабыми связями, когда параметр решетки и промежуток времени между прыжками стремятся к нулю. Сформулированы условия, при выполнении которых предельное поведение описывается некоторой системой уравнений в частных производных параболического типа. В качестве примеров рассмотрены различные реализации слабых связей, которые включают и нелокальную модель.

Данная статья является продолжением работ [1,2], которые посвящены исследованию асимптотического поведения случайного блуждания на решетках с отражающими узлами и выводу усредненных уравнений, описывающих эту асимптотику. В работе [1] было введено понятие продолжаемости для последовательности решеток и показано, что в том случае, когда решетки удовлетворяют условию продолжаемости, усредненное уравнение является уравнением диффузии. В работе [2] были рассмотрены решетки с ловушками и показано, что в этой ситуации, при некоторых условиях, накладываемых на структуру отражающих узлов, усредненное уравнение содержит интегральный член по переменной времени.

Оказалось, что условие продолжаемости не является достаточно общим. Существуют решетки, не удовлетворяющие условию продолжаемости, для которых, однако, можно получить усредненные уравнения (например, решетки, мера которых стремится к нулю). Поэтому в данной работе вводится понятие квазипродолжаемости, которое является обобщением упомянутого выше понятия продолжаемости. Кроме того, в данной работе не предполагается, в отличие от традиционного подхода, трансляционная инвариантность вероятностей перехода. Термин "случайное блуждание" употребляется, чтобы подчеркнуть специфику пространства состояний марковской цепи.

В статье рассматривается случайное блуждание на решетках со слабыми связями и показано, что при выполнении некоторых условий "усредненное уравнение" является параболической системой дифференциальных уравнений. В качестве примеров рассмотрены конкретные ситуации при различных реализациях слабых связей. Также отмечено, что в некоторых случаях усредненное уравнение является нелокальным.

Рассмотрим для произвольного $\varepsilon > 0$ семейство функций $p_\varepsilon(x,y)$ при $x, y \in \varepsilon Z^d$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$p_\varepsilon(x,y) \geq 0,\ p_\varepsilon(x,y) = p_\varepsilon(y,x), \quad \sum_{y \in \varepsilon Z^d} p_\varepsilon(x,y) \equiv 1,$$

где $p_\varepsilon(x,y) = 0$ при $|x - y| > C_\varepsilon$, а при ε, стремящемся к нулю, C_ε стремится к нулю. Для произвольной гладкой ограниченной области Q в R^d $(d \geq 2)$ рассмотрим последовательность решеток $Q_\varepsilon = \varepsilon Z^d \cap \overline{Q}$. Будем исследовать поведение при ε, стремящемся к нулю, функций $u_\varepsilon(x,t)$, $t \in \varepsilon^2 Z_+$, $x \in Q_\varepsilon$, эволюция которых определяется соотношением

$$d_t u_\varepsilon(x,t) = A_\varepsilon u_\varepsilon(x,t),\ x \in Q_\varepsilon,\ t \in \varepsilon^2 Z_+ \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x),\ x \in Q_\varepsilon; \tag{2}$$

здесь

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{z \in \Omega_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z) d_z u_\varepsilon(x),$$

где $\Omega_\varepsilon = \{ x \in Q_\varepsilon \mid p_\varepsilon(x,x) < 1 \}$,

$$d_t u_\varepsilon(x,t) = \frac{u_\varepsilon(x,t+\varepsilon^2) - u_\varepsilon(x,t)}{\varepsilon^2}, \qquad d_z u_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(z) - u_\varepsilon(x)}{\varepsilon}.$$

Функцию u_ε можно интерпретировать как функционал от траектории случайного блуждания $\xi_\varepsilon^x(t)$: $\xi_\varepsilon^x(0) = x$ с отражением на $\varepsilon Z^d \backslash Q_\varepsilon$, а именно $u_\varepsilon(t,x) = M(u_\varepsilon^0(\xi_\varepsilon(t)))$, где u_ε^0 — заданная функция, а M — знак математического ожидания.

Наряду с этой задачей рассмотрим стационарную задачу:

$$A_\varepsilon u_\varepsilon(x) - c_\varepsilon u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x),\ x \in Q_\varepsilon \tag{3}$$

при $c_\varepsilon(x) \geq c_0 \geq 0$.

Введем необходимые определения и обозначения:

$$\mu(\Omega_\varepsilon) = \sum_{x \in \Omega_\varepsilon} \varepsilon^d,$$

$$\| u_\varepsilon \|^2_{1,\varepsilon,G_\varepsilon} = \sum_{x \in G_\varepsilon} \sum_{\substack{x + \varepsilon e_i \in G_\varepsilon \\ 1 \leq i \leq d}} | d_i u_\varepsilon(x) |^2 \varepsilon^d + \| u_\varepsilon(x) \|^2_{0,\varepsilon,G_\varepsilon},$$

$$\| u_\varepsilon \|^2_{1,p_\varepsilon,G_\varepsilon} = \sum_{x,z \in G_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z u_\varepsilon(x) \mid^2 \varepsilon^d + \| u_\varepsilon(x) \|^2_{0,\varepsilon,G_\varepsilon},$$

где

$$\| u_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,G_\varepsilon} = \frac{1}{\mu(G_\varepsilon)} \sum_{x \in G_\varepsilon} | u_\varepsilon(x) |^2 \varepsilon^d.$$

Определение 1. Последовательность решеток Ω_ε удовлетворяет условию *p_ε-квазипродолжаемости*, если для любой заданной на Ω_ε последовательности функций $u_\varepsilon(x)$, такой что $\|u_\varepsilon\|^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le C$, для всякого M существуют подрешетки $S_\varepsilon^M \subset \Omega_\varepsilon$, обладающие следующими свойствами при всех $\varepsilon \le \varepsilon(M)$:

$$\frac{\mu(S_\varepsilon^M)}{\mu(Q_\varepsilon)} \le \varphi(M), \qquad \varphi(M) = o\left(\frac{1}{M^2}\right), \qquad M \to \infty;$$

функции u_ε удовлетворяют условию Липшица на $\Omega_\varepsilon \backslash S_\varepsilon^M$ с константой M, $|u_\varepsilon(x)| \le M, x \in \Omega_\varepsilon \backslash S_\varepsilon^M$;

$$\frac{1}{\mu(\Omega_\varepsilon)} \sum_{x \in S_\varepsilon^M} |u_\varepsilon(x)|^2 \varepsilon^d = o(1), \qquad M \to \infty.$$

Определение квазипродолжаемости является дискретным аналогом определения сильной связности, введенного в [3], и представляет собой обобщение понятия продолжаемости для последовательности решеток [1].

Введем также понятие сходимости функций, заданных на последовательности решеток, плотных в каждом кубе K_h, т.е.

$$\exists C \ \forall \ K_h \subset Q \ \exists \varepsilon(h) \ \forall \ \varepsilon \le \varepsilon(h) \ \mu\left(S_\varepsilon \cap K_h\right) \ge C h^d \mu(S_\varepsilon). \tag{4}$$

Определение 2. Пусть решетки S_ε плотны в каждом кубе. Будем говорить, что последовательность функций u_ε, определенных на S_ε, сходится к функции $u \in L_2(Q)$, если существуют функции $u_M \in Lip(\overline{Q})$, которые сходятся к u в $L_2(Q)$ при M, стремящемся к бесконечности, и

$$\lim_{M\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|u_\varepsilon - u_M\|_{0,\varepsilon,S_\varepsilon} = 0.$$

Обозначим $S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times \left([0,T] \cap \varepsilon^2 Z_+\right)$.

Определение 3. Пусть решетки S_ε плотны в каждом кубе. Будем говорить, что последовательность функций u_ε, определенных на S_ε^T, сходится к функции $u(x,t) \in L_2(Q\times[0,T])$, если существуют функции $u_M(x,t) \in Lip(\overline{Q})$ для всех t, которые сходятся к u в $L_2(Q\times[0,T])$ при M, стремящемся к бесконечности, такие, что

$$\lim_{M\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_0^T \|\overline{u}_\varepsilon - u_M\|^2_{0,\varepsilon,S_\varepsilon} dt = 0;$$

здесь через $\overline{u}_\varepsilon$ обозначено L_2-восполнение по x функции u_ε.

Замечание. Единственность предельной функции гарантируется условием (4). Кроме того, если $\mu(S_\varepsilon) \ge C$, то данная сходимость эквивалентна сходимости в $L_{2,\varepsilon}(S_\varepsilon)$ [1].

Лемма 1. *Пусть решетки Ω_ε удовлетворяют условиям квазипродолжаемости и* (4), *тогда для всякой последовательности функций u_ε, таких, что $\| u_\varepsilon \|^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le C$, существует подпоследовательность, которая сходится к $u \in L_2(Q)$.*

Доказательство. Пусть u_ε обладает свойством $\| u_\varepsilon \|^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le C$. Из условия квазипродолжаемости следует, что существуют множества $S^M_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ такие, что $\forall\, \varepsilon \le \varepsilon(M)$ функции u_ε удовлетворяют условию Липшица с константой M на $\Omega_\varepsilon \backslash S^M_\varepsilon$. Продолжим u_ε с $\Omega_\varepsilon \backslash S^M_\varepsilon$ на R^d с помощью теоремы Уитни. Продолжение $u^M_\varepsilon \in Lip(R^d)$ имеет норму, не превосходящую CM. Выделим по теореме Арцела подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon'$, равномерно сходящуюся к u^M, при ε, стремящемся к нулю. Тогда, учитывая свойства функций u^M_ε и множеств Q_ε, S^M_ε, получаем $\forall\, \varepsilon \le \varepsilon(M,N)$

$$\| u^M - u^N \|^2_{L_2(Q)} \le C \| u^M - u^N \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le$$

$$\le C\Big(\| u^M - u^M_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} + \| u^N - u^N_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} +$$

$$+ \| u^M_\varepsilon - u_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} + \| u_\varepsilon - u^N_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \Big) = o(1), \quad M, N \to \infty.$$

Таким образом, последовательность u^M — фундаментальная, а, следовательно, существует функция $u \in L_2(Q)$, которая является пределом u^M. Далее $\forall\, \varepsilon \le \varepsilon(M)$ из определения 1 имеем

$$\| u^M - u_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le \| u^M - u^M_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} + \| u^M_\varepsilon - u_\varepsilon \|_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} = o(1), \quad M \to \infty,$$

что и требовалось доказать.

В данной работе рассматривается последовательность решеток Q_ε, имеющих следующий вид:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega^1_\varepsilon \cup \Omega^2_\varepsilon \cup S_\varepsilon, \tag{5}$$

где Ω^k_ε удовлетворяют условию квазипродолжения, связь между Ω^k_ε слабая, а мера S_ε мала. Более точно, выполнены соотношения:

1.1) $\mu(\Omega^2_\varepsilon) \ge C > 0, \qquad \mu(S_\varepsilon) = o(\mu(\Omega^k_\varepsilon)), \qquad k = 1,2;$

1.2) $\exists C_1, C_2\ \forall\, K_h \subset Q\ \exists \varepsilon(h)\ \forall\, \varepsilon \le \varepsilon(h), \qquad C_1 \le \dfrac{\mu(\Omega^k_\varepsilon \cap K_h)}{\mu(\Omega^k_\varepsilon) h^d} \le C_2\,;$

$$2.1)\ \sup_{x\in\Omega_\varepsilon^k\cup S_\varepsilon} \sum_{y\in Z^d} p_\varepsilon(x,x+\varepsilon y)\mid y\mid^2 \le \frac{C}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)},\quad k=1,2;$$

Введем локальные характеристики:

$$G_l^k(y,\varepsilon,h,\tau)=\min_{u_\varepsilon}\frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega_\varepsilon^k\cap K_h(y)}\left\{\sum_{z\in\Omega_\varepsilon^k\cap K_h(y)} p_\varepsilon(x,z)\mid d_z u_\varepsilon(x)\mid^2+\right.$$

$$\left.+\frac{h^{-\tau}}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)}\mid u_\varepsilon(x)-(x-y,l)\mid^2\right\}\varepsilon^d,$$

$$G_l^k(y,\varepsilon,h,\tau)=\sum_{i,j=1}^d a_{ij}^k(y,\varepsilon,h,\tau)\,l_i l_j. \tag{6}$$

Минимум берется в классе сеточных функций, заданных на Ω_ε^k, $k=1,2$. Функционалы G_l^k определяют локальную "проводимость" решеток Ω_ε^k. Введем характеристику слабых связей:

$$c(y,\varepsilon,h,\gamma)=\min_{u_\varepsilon}\frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega_\varepsilon\cap K_h(y)}\left\{\sum_{z\in\Omega_\varepsilon\cap K_h(y)} p_\varepsilon(x,z)\mid d_z u_\varepsilon(x)\mid^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{g(h)}\sum_{k=1}^2\mid u_\varepsilon(x)-i\mid^2\frac{\chi_{\Omega_\varepsilon^k}}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)}\right\}\varepsilon^d, \tag{7}$$

где $g(h)=\max\left(\sqrt{\varphi(i/h)h},\,h^\gamma\right)$.

Минимум берется в классе сеточных функций, заданных на Ω_ε.

Сформулируем основной результат

Теорема 1. *Пусть множество Ω_ε имеет вид (5), выполнены условия 1.1), 1.2), 2.1) и*

1) Ω_ε^k *удовлетворяют условию p_ε-квазипродолжаемости,* 2) $u_\varepsilon^0(x)$ *сходится в* $L_{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon^k)$ *к функциям* u^i, *а* $u_\varepsilon^0(x)$ *сходится в* $L_{2,\varepsilon}(S_\varepsilon)$ *к нулю и* $\|u_\varepsilon^0\|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon}\le D$; 3) *существуют для всех* $y\in\overline{Q}$ *пределы:*

при некотором $\tau>2$

$$\lim_{h\to0}\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\frac{a_{ij}^k(y,\varepsilon,h,\tau)}{h^d}=\lim_{h\to0}\underline{\lim_{\varepsilon\to0}}\frac{a_{ij}^k(y,\varepsilon,h,\tau)}{h^d}=a_{ij}^k(y);$$

при некотором $\gamma>2$

$$\lim_{h\to0}\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}c(y,\varepsilon,h,\gamma)=\lim_{h\to0}\underline{\lim_{\varepsilon\to0}}c(y,\varepsilon,h,\gamma)=c(y)$$

и

$$\lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu(\Omega_\varepsilon^k\cap K_h(y))}{h^d}=b^k(y),$$

где предельные функции непрерывны, коэффициенты a_{ij}^k удовлетворяют условию равномерной эллиптичности.

Тогда $u_\varepsilon(x,t)$ сходятся при ε, стремящемся к нулю, в смысле определения 3 к функциям $u^k(x,t)$ на $\Omega_\varepsilon^{k,T}$, где вектор-функция $u=\{u^k(x,t)\}$, $k=1,2$, — обобщенное решение в $C\left([0,T];L_2(Q)\right)^2\cap L_2\left([0,T];W_2^1(Q)\right)^2$ задачи:

$$b^1(x)\frac{\partial u^1(x,t)}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^1(x)\frac{\partial u^1(x,t)}{\partial x_j}\right)-c(x)(u^2(x,t)-u^1(x,t))=0;$$

$$b^2(x)\frac{\partial u^0(x,t)}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^0(x)\frac{\partial u^0(x,t)}{\partial x_j}\right)-c(x)(u^1(x,t)-u^2(x,t))=0, \tag{8}$$

$$x\in Q,\qquad t\in(0,\infty);$$

$$b^k(x)u^k(x,0)=b^k(x)u_0^k(x),\qquad x\in Q;\qquad \frac{\partial u^k(x,t)}{\partial\nu}=0,\qquad x\in\partial Q,\qquad t>0 \tag{9}$$

при всех T. Здесь ν — соответствующая нормаль.

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью теоремы для стационарного случая и будет дано ниже.

Теорема 2. *Пусть u_ε —решение (3), выполнены условия теоремы 1, $f_\varepsilon(x)$ сходится к $f^k(x)$ в $L_{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon^k)$ и к нулю в $L_{2,\varepsilon}(S_\varepsilon)$, $c_\varepsilon(x)$ сходится к $c^k(x)$ равномерно по $x\in\Omega_\varepsilon^k$.*

Тогда u_ε сходятся при ε, стремящемся к нулю, в смысле определения 2, к функциям $u^k(x)$ на Ω_ε^k, причем $u(x)=\{u^1(x),u^2(x)\}$, — обобщенное решение в $W_2^1(Q)$ задачи

$$\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^1(x)\frac{\partial u^1(x)}{\partial x_j}\right)-b^1(x)c^1(x)u^1(x)-c(x)\left(u^1(x,t)-u^2(x,t)\right)=b^1(x)f^1(x),$$

$$\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^2(x)\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x_j}\right)-b^2(x)c^2(x)u^2(x)-c(x)\left(u^2(x,t)-u^1(x,t)\right)=0,\quad x\in Q, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=0,\qquad x\in\partial Q,\qquad t>0. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если пределы в условии теоремы существуют для каких-либо $\tau, \gamma > 2$, то они существуют и для всех $\tau, \gamma > 2$.

Без потеи общности можно будем считать, что пределы в условии теоремы достигаются равномерно по $y \in \overline{Q}$. Перед доказательством теорем докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для произвольной последовательности множеств* $G_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$, *для которой*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(G_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon^k)}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} = 0,$$

существуют множества B_ε, $G_\varepsilon \cup S_\varepsilon \subset B_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ *и функции* $v_\varepsilon^{i,k}$, $1 \le i \le d$, $k = 1,2$, *для которых справедливы следующие соотношения*:

$$1)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon^k)}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} = 0,$$

$$2)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\Omega_\varepsilon^k} |\, v_\varepsilon^{i,k}(x) - x_i \,| = 0,$$

$$3)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{(x,z) \in T_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z) |\, d_z v_\varepsilon^{i,k}(x) \,|^2 \varepsilon^d = 0;$$

здесь $T_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^2 \backslash (\Omega_\varepsilon \backslash B_\varepsilon)^2$.

4) *Для любой функции* $l \in C(\overline{Q})^d$

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sum_{x,z \in \Omega_\varepsilon^k} p_\varepsilon(x,z) \sum_{i,j=1}^{d} d_z v_\varepsilon^{i,k}(x) d_z v_\varepsilon^{j,k}(x) l_i(x) l_j(x) \varepsilon^d \le \sum_{i,j} \int_Q a_{ij}^k(x) l_i(x) l_j(x) dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции $w'_{i,k} \equiv w_{\varepsilon h}^{ik}$, на которых достигается минимум в функционале G_l^k при $l = e_i$. Из условий теоремы 1 следует, что равномерно по $y \in Q$ для любых $l \in R^d$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega_\varepsilon^k \cap K_h(y)} \Bigg\{ \sum_{z \in \Omega_\varepsilon^k \cap K_h(y)} p_\varepsilon(x,z) \sum_{i,j=1}^{d} d_z w'_{i,k}(x) d_z w'_{j,k}(x) l_i l_j +$$

$$+ h^{-\tau} \frac{1}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} \left(\sum_{i=1}^{d} w_i' l_i - (x - y, l) \right)^2 \Bigg\} \varepsilon^d = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^k(\varepsilon,h,y,\tau) l_i l_j h^d (1 + o(1))$$

и

$$\max_{x \in \Omega_\varepsilon^k \cap K_h(y)} |\, w_i' \,| \le \frac{h}{2}.$$

Кроме того, пусть $\rho = h - h'$, где $\rho = o(h)$, тогда в силу условий теоремы 1 имеем

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{(x,z)\in T^{y}_{\varepsilon h}} p_\varepsilon(x,z)\mid d_z w_i'\mid^2 + h^{-\tau}\frac{1}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)}\sum_{\Omega^k_\varepsilon\cap K_h(y)}\mid w_i' - (x_i - y_i)\mid^2\right\}\varepsilon^d \le$$

$$\le a^k_{ii}(\varepsilon,y,h) - a^k_{ii}(\varepsilon,y,h',\tau) + O(\rho h^{d-1}) = o(h^d). \tag{2.3}$$

Здесь $T^y_{\varepsilon h} = (\Omega^k_\varepsilon)^2\backslash(K_h(y)\backslash K'_h(y))^2$.

Пусть y^n образуют кубическую решетку с периодом h', K^n_h — куб с ребром h и центром в y^n. K^n_h образуют покрытие множества Q. Пусть φ^n — связанное с этим покрытием разбиение единицы, которое обладает следующими свойствами:

$$1)\ \ 0 \le \varphi^n \le 1, \qquad \sum_n \varphi^n \equiv 1;$$

$$2)\ \ \varphi^n = 1, \quad x\in K_{h'}, \qquad \varphi^n = 0, \quad x\in K_{(h+h')/2};$$

$$3)\ \ \mid\nabla\varphi^n\mid \le \frac{C}{\rho}.$$

Обозначим $w'^n_i = w^{iy}_{\varepsilon h}$ при $y = y^n$. Пусть

$$w^{i,y}_{\varepsilon h} = \sum_n \left(w'^n_i(x_i - y^n_i)\right)\varphi^n + x_i, \tag{2.4}$$

тогда оценки (2.1)-(2.3) при $\rho = \dfrac{h}{\mid\ln(h)\mid}$ позволяют получить для любой функции $l\in C(\overline{Q})^d$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\sum_{x,z\in\Omega^k_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z)\sum_{i,j=1}^{d} d_z v^{i,k}_{\varepsilon h}(x) d_z v^{j,k}_{\varepsilon h}(x) l_i(x) l_j(x)\varepsilon^d \le$$

$$\le \sum_{i,j}\int_Q a^k_{ij}(x) l_i(x) l_j(x)\,dx + o(1). \tag{2.5}$$

Выберем $h = h(\varepsilon)$, так чтобы выполнялась оценка (2.5) для достаточно малых ε, и определим $u^{i,k}_\varepsilon = w^{\,i,k}_{\varepsilon h(\varepsilon)} - x_i$. Поскольку Ω^k_ε удовлетворяют условию квазипродолжаемости, то существуют $S^{M,k}_\varepsilon$, $u^{i,k}_{\varepsilon M}$ и

$$\frac{\mu(S^{M,k}_\varepsilon)}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} \le \varphi(M), \qquad \frac{1}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)}\sum_{x\in S^{M,k}_\varepsilon}\mid u_\varepsilon(x)\mid^2\varepsilon^d = o(1), \qquad M\to\infty,$$

$u^{i,k}_{\varepsilon M} = u^{i,k}_\varepsilon$ на $\Omega^k_\varepsilon\backslash S^{M,k}_\varepsilon$, $u^{i,k}_{\varepsilon M}$ удовлетворяют условию Липшица на Q_ε с константой M.

Выбираем последовательность $M_n = n$. Затем положим

$$v^{j,k}_\varepsilon = u^{j,k}_{\varepsilon,M_n} + x_i, \quad B_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{2} S^{M_n,k}_\varepsilon \cup S_\varepsilon \cup G_\varepsilon, \quad \varepsilon(M_{n+1}) < \varepsilon \le \varepsilon(M_n).$$

Из свойств функций $u^{j,k}_{\varepsilon M}$ и оценки (2.5) следуют утверждения леммы 2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* 1-3 *теоремы* 1. *Тогда существуют функции* ψ_ε *и множества* B_ε:

$$1)\ 0 \le \psi_\varepsilon \le 1, \qquad \psi_\varepsilon(x) = \chi_{\Omega_\varepsilon}1(x), \qquad x \in \Omega_\varepsilon \backslash B_\varepsilon;$$

$$2)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon \bigcap \Omega^k_\varepsilon)}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} = 0.$$

3) *Для любой функции* $l \in C(\overline{Q})$

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sum_{x,z \in \Omega_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z \psi_\varepsilon(x) l(x) \mid^2 \varepsilon^d \le \int_Q c(x) l^2(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим покрытие кубами K^h_n множества Q и связанное с ним разбиение единицы, как в лемме 2 при $\rho = \sqrt{g(h)}$. Пусть $v^n_{\varepsilon h}$ — функция, на которой функционал $c(y_n, \varepsilon, h, \gamma)$ минимален. Тогда из условий теоремы 1, аналогично лемме 2, получаем

$$\frac{1}{2} \sum_{x,z \in \Omega_\varepsilon \bigcap K^n_h} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z v^n_{\varepsilon h}(x) \mid^2 \varepsilon^d +$$

$$+ \frac{1}{g(h)} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} \sum_{x \in \Omega^k_\varepsilon \bigcap K_h(y)} \mid v^n_{\varepsilon h}(x) - k \mid^2 \varepsilon^d = c(y_n) h^d + o(h^d) \tag{3.1}$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{(x,z) \in (\Omega_\varepsilon \bigcap K^n_h)^2 \backslash K^2_{h'}(y)} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z v^n_{\varepsilon h}(x) \mid^2 \varepsilon^d +$$

$$+ \frac{1}{g(h)} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} \sum_{x \in \Omega^k_\varepsilon \bigcap K_h(y) \backslash K_{h'(y)}} \mid v^n_{\varepsilon h}(x) - k \mid^2 \varepsilon^d = o(h^d). \tag{3.2}$$

Рассмотрим множества

$$G^n_{\varepsilon h} = \left\{ x \in \Omega_\varepsilon \bigcap K^n_h \;\Big|\; \sum_{k=1}^{2} \mid v^n_{\varepsilon h} - k \mid^2 \chi_{\Omega^k_\varepsilon} \ge h^2 \right\}.$$

Пусть $G_{\varepsilon h} = \bigcup\limits_n G'^n_{\varepsilon h}$. Из (3.1) получаем

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(G_{\varepsilon h} \bigcap \Omega^k_\varepsilon)}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} \le \frac{g(h)}{h^2}. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$w_{\varepsilon h}^n(x) = \begin{cases} 1, & v_{\varepsilon h}^n(x) \geq 1 - h \\ \dfrac{v_{\varepsilon h}^n(x) - h}{1 - 2h}, & h \leq v_{\varepsilon h}^n(x) \leq 1 - h \\ 0, & v_{\varepsilon h}^n(x) \leq h \end{cases} \cdot \tag{3.4}$$

Учитывая свойства функции $v_{\varepsilon h}^n$ и определение множества $G_{\varepsilon h}^n$, получаем

$$0 \leq w_{\varepsilon h}^n(x) \leq 1; \qquad \left| d_z w_{\varepsilon h}^n(x) \right| \leq \frac{1}{1 - 2h} \left| d_z v_{\varepsilon h}^n(x) \right|. \tag{3.5}$$

Положим

$$\psi_\varepsilon^h = \sum_n \varphi_n w_{\varepsilon h}^n. \tag{3.6}$$

Поскольку каждый из кубов покрытия пересекается не более чем с 3^d соседними кубами, то в силу (3.1-3.6), для достаточно малых ε, h имеем

$$\sum_{x \in \Omega_\varepsilon} | d_z \psi_\varepsilon^h(x) |^2 l^2(x) \varepsilon^d \leq \int_Q c(y) l(y)^2 dy. \tag{3.7}$$

Выбираем теперь последовательность $h = h(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялась оценка (3.7) для достаточно малых ε, и определим $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{h(\varepsilon)}$, $B_\varepsilon = G_{\varepsilon h(\varepsilon)}^{\cdot}$. В силу соотношений, приведенных выше, $\psi_\varepsilon(x)$ удовлетворяют всем требованиям леммы 3.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1-3 *теоремы* 1, $v^k \in Lip(\overline{Q})$. Тогда существует последовательность v_ε такая, что

$$1)\ \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \| v_\varepsilon \|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon}^2 \leq C \sum_{k=1}^2 \| v^k \|_{W_2^1(Q)}^2,$$

$$2)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^2 \| v_\varepsilon - v^k \|_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon^k}^2 = 0.$$

Доказательство. Пусть ψ_ε — функции,которые были построены при доказательстве леммы 3. Положим

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon^0(x)(1 - \psi_\varepsilon(x)) + v_\varepsilon^1(x)\psi_\varepsilon(x),$$

где $v_\varepsilon^k \in C^\infty(\overline{Q})$ и

$$\sum_{k=1}^2 \| v_\varepsilon^k - v^k \|_{W_2^1(Q)} + \| v_\varepsilon^k - v^k \|_{Lip(\overline{Q})} \leq \varepsilon.$$

С помощью оценок леммы 3 и условий теоремы 1 нетрудно получить утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1-3 *теоремы* 1, $u(x) \in (Lip(\overline{Q}))^2$ *и существует последовательность* v_ε, *заданная на* Q_ε:

$$\| u_\varepsilon \|^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le C.$$

Тогда существует подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon'$, *такая, что для всех* M *существуют функции* $u_\varepsilon^{M,k} \in Lip(\overline{Q})$, *норма* $u_\varepsilon^{M,k}$ *в* $Lip(\overline{Q})$ *не превосходит* M, *и множества* S_ε^M, $S_\varepsilon \subset S_\varepsilon^M$, *которые удовлетворяют соотношениям*

$$1)\ u_\varepsilon^{M,k}(x) = u_\varepsilon(x), \qquad x \in \Omega_\varepsilon^k \backslash S_\varepsilon^M;$$

$$2)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(S_\varepsilon^M \cap \Omega_\varepsilon^k)}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} \le \varphi(M),\ \forall\ \varepsilon \le \varepsilon(M);$$

$u_\varepsilon^{M,k}$ *равномерно на* $\overline{Q}$ *сходятся к* $u^{M,k} \in Lip(\overline{Q})$:

$$3)\ \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \sum_{(x,z) \in T_\varepsilon^M} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z u_\varepsilon(x) \mid^2 \varepsilon^d \ge$$

$$\ge \int_Q c(x)(u^{M,1} - u^{M,2})^2\, dx(1 + o(1)), \qquad M \to \infty;$$

здесь $T_\varepsilon^M = (\Omega_\varepsilon)^2 \backslash (\Omega_\varepsilon \backslash S_\varepsilon^M)^2$.

Доказательство. Из определения квазипродолжаемости следует, что для произвольного M существуют множества $S_\varepsilon^{M,k}$ и функции $u_{\varepsilon M}^k$:

$$\frac{\mu(S_\varepsilon^{M,k})}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} \le \varphi(M), \qquad \frac{1}{\mu(\Omega_\varepsilon)} \sum_{x \in S_\varepsilon^{M,k}} \mid u_\varepsilon(x) \mid^2 \varepsilon^d = o(1), \quad M \to \infty;$$

$u_{\varepsilon M}^k(x) = u_\varepsilon(x)$ на $\Omega_\varepsilon \backslash S_\varepsilon^{M,k}$, $u_{\varepsilon M}^k$, удовлетворяют условию Липшица с константой M, $\mid u_{\varepsilon M}^k(x) \mid \le M$. Следовательно, существует подпоследовательность $u_{\varepsilon M}^k$, которая сходится равномерно к u_M^k. Введем обозначение $S_\varepsilon^M = S_\varepsilon \cup S_\varepsilon^{M,1} \cup S_\varepsilon^{M,2}$. Таким образом, осталось показать, что выполнено утверждение 3) леммы.

Пусть K_n — кубы с центрами в x_n и ребрами h, образующие непересекающееся во внутренних точках покрытие Q. Рассмотрим функционалы

$$I_\varepsilon^n(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in T_\varepsilon^{M,n}} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z u_\varepsilon(x) \mid^2, \tag{5.1}$$

где $T_\varepsilon^{M,n} = T_\varepsilon \cap K_n^2$.

Пусть v_ε минимизирует (5.1) в классе сеточных функций, равных u_ε на $\Omega^1_\varepsilon \bigcup \Omega^2_\varepsilon \backslash S^M_\varepsilon$, тогда $v_\varepsilon = f_\varepsilon - w_\varepsilon$, где f_ε минимизирует (5.1) в классе функций, равных $u^{M,k}(x_n)$ на $\Omega^k_\varepsilon \backslash S^M_\varepsilon$, а w_ε — в классе функций, равных $u^{M,k}(x_n) - u_\varepsilon(x)$ на $\Omega^k_\varepsilon \backslash S^M_\varepsilon$. Рассмотрим

$$\widehat{w}^n_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{2} \left(u^{M,i}(x_n) - u_{\varepsilon M}(x)\right) \psi^i_\varepsilon(x),$$

где

$$\psi^i_\varepsilon(x) = \frac{f_\varepsilon(x) - u^{M,2}(x_n)}{u^{M,1}(x_n) - u^{M,2}(x_n)}, \qquad \psi^2_\varepsilon(x) = 1 - \psi^1_\varepsilon(x)$$

для тех значений n, при которых $K_n \subset Q_l = \{\, x \in Q \mid \mid u^{M,1}(x) - u^{M,2}(x) \mid \geq l \,\}$.

Далее из свойств $u^{M,k}$, S^M_ε и учета того факта, что $I^n_\varepsilon(\psi_\varepsilon) \leq \frac{1}{l^2} I^n_\varepsilon(f_\varepsilon)$,

$$I^n_\varepsilon(\widehat{w}_\varepsilon) \leq C \left[(y_\varepsilon + M^2 h^2) \frac{1}{l^2} I^n_\varepsilon(f_\varepsilon) + M^2 \varphi(M) \sum_{k=1}^{2} \frac{\mu(K^n_h \bigcap \Omega^k_\varepsilon)}{\mu(\Omega^k_\varepsilon)} \right], \tag{5.2}$$

где

$$y_\varepsilon = \max_{x \in \Omega_\varepsilon} \sum_{k=1}^{2} \mid u^k_{\varepsilon M}(x) - u^{M,k}(x) \mid^2.$$

Из определения функционала $c(\varepsilon,h,x_n)$ и условий теоремы 1 следует

$$I^n_\varepsilon(f_\varepsilon) \geq c(x_n) \left(u^{M,1}(x_n) - u^{M,2}(x_n)\right)^2 h^d - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\mu(\Omega^k_\varepsilon) g(h)} \sum_{x \in \Omega^k_\varepsilon} \mid f_\varepsilon(x) - u^{M,1}(x_n) \mid^2 \varepsilon^d. \tag{5.4}$$

Выберем h_M следующим образом :

$$h_M = o\left(\frac{1}{M}\right), \qquad \varphi(M) = o(g(h_M)), \qquad M \to \infty. \tag{5.5}$$

Из (5.1-5.5) окончательно получаем

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \sum_{(x,z) \in T^M_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z u_\varepsilon(x) \mid^2 \varepsilon^d \geq$$

$$\geq \int_{Q_l} c(x)(u^{M,1} - u^{M,2})^2 \, dx (1 + \alpha(l,M)),$$

где $\lim\limits_{M \to \infty} \varlimsup\limits_{l \to 0} \mid \alpha(l,M) \mid = 0$. Переходя к пределу при l, стремящемся к нулю, получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 2. Известно, что существует единственное решение u_ε задачи (3). Это решение является минимумом функционала

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sum_{x,z\in\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon(x,z)\mid d_z u_\varepsilon(x)\mid^2 \varepsilon^d + \sum_{x\in\Omega_\varepsilon}\left(c_\varepsilon(x)\mid u_\varepsilon(x)\mid^2 + 2f_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x)\right)\varepsilon^d. \tag{12}$$

Теорему достаточно доказать в том случае, когда $|f_\varepsilon| \le X$. Учитывая сходимость каждого слагаемого в правой части, получаем для решений равномерную оценку: $\|u_\varepsilon\|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le C$. В силу леммы 1, существует подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon'$, такая, что функции u_ε сходятся в смысле определения 2 к функциям u^k на Ω^k_ε. Ниже будет показано, что пара (u_1,u_2) является единственным минимумом функционала (13)

$$\begin{aligned} I(u) = \int_Q \Bigg(\sum_{k=1}^{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{d} a^k_{ij}(x)\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} + b^k(x)c_k(x)u_k^2(x)\right\} + \\ + c(x)(u_2(x)-u_1(x))^2 + 2f_0(x)b^0(x)u_2(x) + 2f_1(x)b^1(x)u_1(x)\Bigg)dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда будет следовать, что и вся последовательность имеет тот же предел.

Пусть $v^{i,k}_\varepsilon$, ψ_ε — функции, построенные согласно леммам 2, 3. Для произвольных $g_k \in C^\infty(\overline{Q})$ рассмотрим функции

$$w_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{2}\left\{g_k(x) + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i}(v^{k,i}_\varepsilon(x) - x_i)\right\}\psi^k_\varepsilon(x),$$

где

$$\psi^1_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x), \quad \psi^2_\varepsilon(x) = 1 - \psi_\varepsilon(x).$$

В соответствии с леммами 1, 2 и гладкостью g получаем для всех $g_k \in C^\infty(\overline{Q})$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, I_\varepsilon(u_\varepsilon) \le I(u). \tag{14}$$

Поскольку функционал $I(u)$ непрерывен на $W^1_2(Q)$, то (14) справедливо для любых $g_k \in W^1_2(Q)$.

Докажем, что

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, I_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge I(u). \tag{15}$$

Построим согласно лемме 5 функции $u^{M,k}_\varepsilon$ и множества S^M_ε по функциям u_ε, которые удовлетворяют свойствам 1)-3) этой леммы. Пусть $u^{M,k}_n \in C^\infty(\overline{Q})$:

$$\sum_{k=1}^{2}\|u^{M,k} - u^{M,k}_n\|_{W^1_2(Q)} \le \frac{1}{n}.$$

Построим с помощью леммы 4 последовательность функций g_ε:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \| g_\varepsilon \|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le \frac{C}{n}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \| g_\varepsilon - u_n^{M,k} + u^{M,k} \|_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} = 0.$$

Пусть y_m образуют кубическую решетку с периодом h, а K_m — куб с центром в y_n и ребром h. В каждом кубе рассмотрим функции

$$v_{\varepsilon h}^{k,m}(x) = u_\varepsilon^{M,k}(x) + g_\varepsilon(x) + u_n^{M,k}(y_m) - \sum_{2\le |s| \le l} D^s u_n^{M,k}(y_n)(x - y_n)^s,$$

где $l = \left[\frac{\tau - 1}{2}\right] + 1$. Из леммы 4, учитывая гладкость $u_n^{M,k}$, получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\mu(\Omega_\varepsilon^k)} \sum_{x\in\Omega_\varepsilon^k \cap K_m} \left| v_{\varepsilon h}^{k,m}(x) - (x - y_m, \nabla u_n^{M,k}(y_m)) \right|^2 \varepsilon^d = O(h^{d+2\tau+2}). \tag{16}$$

Воспользуемся определением функционала G_l и оценкой (16), чтобы получить соотношение

$$\frac{1}{2}\sum_{x,z\in\Omega_\varepsilon^k} p_\varepsilon(x,y) \left| d_z v_{\varepsilon h}^{k,m}(x) \right|^2 \varepsilon^d \ge \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^k(y_m,\varepsilon,h,\tau) \frac{\partial u_n^{M,k}(y_m)}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{M,k}(y_m)}{\partial x_j} h^d + o(h^d). \tag{17}$$

Таким образом, из (17), результатов лемм 4, 5, сходимости $u_\varepsilon^{M,k}$ в смысле определения 2 к $u_n^{M,k}$ и условий данной теоремы получаем

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} I_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge I(u^M)(1 + o(1)).$$

Принимая во внимание положительную определенность a_{ij}^k, имеем $\| u^M \|_{(W_2^1)^2} \le C$. Следовательно, $u^M \in (W_2^1)^2$ и выполняется соотношение (15). Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся энергетическим тождеством (см. [4]), чтобы получить

$$\sup_t \| u_\varepsilon(t) \|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le \| u_\varepsilon^0 \|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon}. \tag{18}$$

Рассмотрим стационарное уравнение для $\tilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)$, которое представляет собой преобразования Лапласа кусочно-постоянного по t восполнения функции $u_\varepsilon(x,t)$. Функции $u_\varepsilon(x,\lambda)$ — аналитические по λ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ и удовлетворяют уравнению (3) при

$$c_\varepsilon = \frac{\exp(\lambda\varepsilon^2) - 1}{\varepsilon^2}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1 - \exp(\lambda\varepsilon^2)}{\varepsilon^2\lambda} u_\varepsilon^0(x).$$

Отсюда следует, что при всех l больше нуля для $u_\varepsilon(x,\lambda)$ верны оценки

$$\sup_{\mu > l}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widetilde{u}(x,\mu + i\lambda) \|^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \, d\lambda < C_l , \tag{19}$$

$$\| \widetilde{u}_\varepsilon(\lambda) \|_{0,\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \le \frac{C}{|\lambda|} \tag{20}$$

равномерно по λ на компактном множестве в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Из теоремы 2 следует, что при $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ функции $u_\varepsilon(x,\lambda)$ сходятся по определению 2 к решению задачи (10), (11) с $c_k(x) = \lambda$, $f_k(x) = u_k^0(x)$, причем, согласно (19),

$$\sup_{\mu > l}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widetilde{u}(x,\mu + i\lambda) \|^2_{W_2^1(Q)} \, d\lambda < C_l . \tag{21}$$

Следовательно, в силу аналитичности $\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)$ получаем, что $\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)$ сходятся в смысле определения 2 к $\widetilde{u}(x,\lambda)$ равномерно на всяком компакте в полуплоскости к $\widetilde{u}(x,\lambda)$, причем $\widetilde{u}(x,\lambda)$ — аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Таким образом, существует функция $u(x,t)$ — обратное преобразование Лапласа $\widetilde{u}(x,\lambda)$, функции $u_\varepsilon(x,t)$ сходятся к $u(x,t)$ по определению 3, и $u(x,t)$ является решением (8), (9).

Приведем несколько характерных примеров.

Пример 1. Пусть x_j^ε образуют кубическую решетку с периодом $\delta = 4N_\varepsilon\varepsilon$, δ^3/ε стремится к единице, $d = 3$. Коэффициенты $p_\varepsilon(x,y)$ при $x \ne y$ определены следующим образом: $p_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{6}$ при $|x - y| = \varepsilon$ и ; в остальных случаях $p_\varepsilon(x,y) = 0$, а $p_\varepsilon(x,x) = 1 - \sum_{x \ne y} p_\varepsilon(x,y)$. Решетки Ω_ε имеют структуру:

$$\Omega_\varepsilon^1 = \bigcup_j (x_j^\varepsilon + \delta W_1^\varepsilon), \qquad \Omega_\varepsilon^2 = Q_\varepsilon \backslash \Omega_\varepsilon^1 \backslash F_\varepsilon,$$

где

$$F_\varepsilon = \bigcup_j \left[x_j^\varepsilon + \delta(W_1^\varepsilon \backslash W_2^\varepsilon) \right], \qquad S_\varepsilon = \bigcup_j (x_j^\varepsilon + \delta G_\varepsilon)$$

и

$$W_i^\varepsilon = \frac{1}{4N_\varepsilon} Z^3 \cap W_i, \; G_\varepsilon = \left\{ x \in K_1^\varepsilon \;\middle|\; x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = x_3 = \varepsilon(1 + [\tfrac{1}{3\varepsilon}]) \right\},$$

$$W_1 = K_1 \backslash \bigcup_{i,j=1}^{3} \{ x \in K_1 \mid |x_i| \le \tfrac{1}{4}, |x_j| \le \tfrac{1}{4} \},$$

$$W_2 = \bigcup_{i,j=1}^{3} \{ x \in K_1 \mid |x_i| < \tfrac{1}{4}, |x_j| < \tfrac{1}{4} \}.$$

Предельные коэффициенты имеют вид

$$a_{ij}^k = \frac{\delta_{ij}}{6} \int\limits_P \left| \nabla(u_k - x_1) \right|^2 dx, \qquad b_k(x) = \frac{1}{2},$$

$$c(x) = \frac{1}{12(G(0) + G(e_1) + 1)},$$

где $G(x)$ — минимальное неотрицательное решение уравнения (см. [5])

$$\sum_{i=1}^{3} \left(G(x \pm e_j) - G(x)\right) = -\delta(x,0), \qquad x \in Z^d,$$

а функции u_k — периодические решения следующих задач:

$$\Delta u_k = 0, \quad x \in W_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial n} = (n,e_1)x \in \partial W_k \backslash \{x \in K_1 \mid x_1 = \pm \tfrac{1}{2}\}, \quad \int\limits_{W_k} u_k(x)\, dx = 0.$$

Пример 2.

$$\Omega_\varepsilon^1 = Z_\varepsilon \cap \overline{Q}, \qquad \Omega_\varepsilon^2 = (Z_\varepsilon + \varepsilon e) \cap \overline{Q}, \qquad Z_\varepsilon = 2\varepsilon Z^2 \cup (2\varepsilon Z^2 + e),$$

где $e = e_1 + e_2$, $S_\varepsilon = F_\varepsilon = \emptyset$,

$$G_{1\varepsilon} = \delta Z^2 \cap \Omega_\varepsilon^1, \qquad G_{2\varepsilon} = (\delta Z^2 + \varepsilon e_1) \cap \Omega_\varepsilon^2;$$

здесь $\delta = \left[1/\sqrt{|\ln \varepsilon|\, \varepsilon}\right]\varepsilon$. Выбираем коэффициенты $p_\varepsilon(x,y)$ при $x \neq y$ следующим образом: $p_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{8}$ при $x \in \Omega_\varepsilon^k$ и $|x - y| = \varepsilon$; $p_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2}$ при $x \in G_{1\varepsilon}$, $y \in G_{2\varepsilon}$; в остальных случаях $p_\varepsilon(x,y) = 0$, а $p_\varepsilon(x,x) = 1 - \sum\limits_{x \neq y} p_\varepsilon(x,y)$.

Коэффициенты усредненного уравнения равны:

$$a_{ij}^k = \frac{\delta_{ij}}{8}, \qquad c(x) = \frac{\pi}{4}, \qquad b_k(x) = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.

$$\Omega_\varepsilon^2 = \delta Z^2 \cap \overline{Q}, \qquad \Omega_\varepsilon^1 = \varepsilon Z^2 \cap \overline{Q} \backslash \Omega_\varepsilon^2, \qquad S_\varepsilon = F_\varepsilon = \emptyset$$

где $\delta = \left[1/\sqrt{|\ln \varepsilon|\, \varepsilon}\right]\varepsilon$.

Коэффициенты $p_\varepsilon(x,y)$ следующие: $p_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{8}$ при $x \in \Omega_\varepsilon^1$, $|x - y| = \varepsilon$ и $x \in \Omega_\varepsilon^2$, $|x - y| = \delta$. Для остальных $x \neq y$ $p_\varepsilon(x,y) = 0$ и $p_\varepsilon(x,x)$ выбирается так, как в примерах 1, 2. В этом случае коэффициенты усредненного уравнения равны:

$$a_{ij}^k = \frac{\delta_{ij}}{8}, \qquad c(x) = \frac{\pi}{4}, \qquad b_0(x) = 1, \qquad b_1(x) = 0.$$

Поскольку $\mu(\Omega_\varepsilon^1)$ стремится к нулю, то $u_\varepsilon(x,t)$ сходится к u_1 в $L_{2\varepsilon}(Q_\varepsilon^T)$, причем $u_1(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{8}\Delta u_1(x,t) + \int\limits_Q G(x,y)(u_1(x) - u_1(y))\,dy, \quad x \in Q, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial Q,$$

где

$$-\frac{1}{8}\Delta_x G(x,y) + \frac{\pi}{4}G(x,y) = (\frac{\pi}{4})^2\delta(x,y), \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_x} = 0, \ x \in \partial Q.$$

Список литературы

1. *М. Б. Краснянский*, Усреднение случайного блуждания с отражающими узлами.— Докл. НАН Украины (1994), № 8, с. 36–39
2. *М. Б. Краснянский*, Усреднение случайного блуждания на решетках с ловушками.—Докл. НАН Украины (1994), № 9, с. 15–19
3. *В. Н. Фенченко, Е. Я. Хруслов*, Асимптотика решений дифференциальных уравнений с сильно осциллирующей матрицей коэффициентов, не удовлетворяющих условию равномерной ограниченности.— Докл. АН УССР. Сер А. (1981), № 4, с. 24—27.
4. *А. А. Самарский*, Теория разностных схем. Наука, Москва (1989), 616 с.
5. *Ф. Спицер*, Принципы случайного блуждания, Мир, Москва, (1969), 472 с.

Homogenization of random walk on lattices with weak connections

M. B. Krashyanskiy

Random walk with weak connections is considered. The asymptotical behavior of the random walk is studied if the jump time and lattice size go to zero. The conditions when the limiting behavior is described of some systems of partial differential equations are stated. Different weak connections are considered as examples, which include nonlocal model as well.

Усереднення випадкового блукання на гратах з слабкими зв'язками

М.Б. Краснянський

Вивчається асимптотична поведінка випадкового блукання на гратах з слабкими зв'язками, коли час між стрибками та параметр грат збігаються до нуля. Сформульовано умови, при дотриманні яких гранична поведінка описується деякою системою рівнянь у часткових похідних параболичного типу. Як приклади розглянуто різноманітні реалізації слабких зв'язків, які містять також нелокальну модель.