Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с. 87-93

УДК 514

О построении матриц Адамара

А. И. Медяник

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

Обосновывается геометрический подход к построению матриц Адамара порядка $4n$ (n — натуральное число), базирующийся на понятии паратактического поворота E^{4n-1} специального вида вокруг оси. Доказывается также, что с помощью такого поворота, если он существует, в $4n-1$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.

Как известно, матрицей Адамара называется такая квадратная матрица с элементами, равными единице по абсолютной величине, все строки которой попарно ортогональны. Порядок матрицы Адамара кратен четырем или равен двум [1, гл. 14]. Предположение о существовании матрицы Адамара порядка $4n$ при любом натуральном n не доказано до сих пор. Для построения матриц Адамара используются различные методы, в том числе и геометрические. Еще в 1933 г. Г. Коксетер установил, что задача построения матрицы Адамара порядка r эквивалентна задаче выбора таких r вершин $(r-1)$-мерного куба, которые образовывали бы правильный симплекс, т.е. задаче о возможности *вписать в куб правильный симплекс той же размерности* [2, с. 319]. В представленной статье предлагается другой геометрический подход к построению матриц Адамара.

1. Пусть H — матрица Адамара порядка $4n$. Нормализуем ее так, чтобы все элементы первой строки и первого столбца были равны $+1$, чего можно легко добиться, умножая строки и столбцы, начинающиеся с -1, на -1. Нормализованную матрицу Адамара также будем обозначать через H. Обозначим H' прямоугольную матрицу, получающуюся из H отбрасыванием первого столбца (состоящего из $+1$). Так как строки H попарно ортогональны, то скалярное произведение векторов-строк H' равно -1. Первая строка H' состоит из $+1$. Отсюда следует, что в каждой из последующих строк число элементов, равных -1, постоянно и равно $2n$. Значит, сумма всех элементов одной строки равна -1.

Рассмотрим в E^{4n-1} куб с центром в начале координат и координатами вершин, равными $+1$ или -1. Строки матрицы H' являются координатами вершин этого куба. Расстояние между любыми двумя из вершин с координатами $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ равно

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^{4n-1}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{8n - 2 - 2\sum_{i=1}^{4n-1} x_i y_i} = \sqrt{8n}.$$

Следовательно, эти $4n$ вершин куба являются вершинами правильного симплекса с ребром $\sqrt{8n}$.

Отбросив у матрицы H' первую строку, получим квадратную матрицу H'' порядка $4n-1$, которая обладает следующими свойствами:

1) каждый элемент матрицы H'' равен $+1$ или -1;

2) сумма элементов каждой строки H'' равна -1;

3) скалярное произведение любых двух векторов-строк H'' равно -1.

Эта матрица получается из нормализованной матрицы Адамара. Верно и обратное, любую матрицу H'', обладающую указанными тремя свойствами, можно, очевидно, дополнить до матрицы Адамара. Поэтому для построения матрицы Адамара порядка $4n$ достаточно построить матрицу H'' порядка $N=4n-1$, обладающую свойствами 1)-3).

2. Пусть $\overline{H}$ — кососимметрическая матрица порядка N, элементы которой h_{ij} при $i \neq j$ равны $+1$ или -1, причем для $i, k = 1,2,\ldots,N$

$$\sum_{j=1}^{N} h_{ij} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} h_{ij} h_{kj} = -1 \qquad (i \neq k). \tag{1}$$

Матрица $\overline{H}$ очень просто связана с матрицей H'', рассмотренной выше. А именно, если положить все $h_{ii} = -1$, то, очевидно, выполняются все требования 1)-3) и, значит, $\overline{H}$ превратится в матрицу H''. Оказывается, что матрица $\overline{H}$ имеет определенный геометрический смысл, о чем и пойдет речь ниже.

3. Рассмотрим в E^N преобразование, задаваемое формулами

$$x_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j, \qquad i = 1,2,\ldots,N,$$

где

$$a_{ii} = \cos\theta + \frac{1}{N}(1-\cos\theta),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}} h_{ij} \sin\theta + \frac{1}{N}(1-\cos\theta), \ 0<\theta<2\pi. \tag{2}$$

Докажем, что это преобразование при условии, что h_{ij} — элементы матрицы $\overline{H}$, является движением.

Пусть $\overline{X}$ и $\widetilde{X}$ — две произвольные точки, а $\overline{X}\,'$ и $\widetilde{X}\,'$ точки, в которые они переходят при преобразовании (2). Тогда

$$\bar{x}_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \bar{x}_j, \qquad \tilde{x}_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \tilde{x}_j.$$

Квадрат расстояния между точками $\overline{X}\,'$ и $\widetilde{X}\,'$ равен

$$d'^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{x}_i' - \tilde{x}_i'\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\bar{x}_j - \tilde{x}_j) \right)^2.$$

Обозначим через A_{ll} и A_{km} $(k \neq m)$ коэффициенты при $(\bar{x}_l - \tilde{x}_l)^2$ и $(\bar{x}_k - \tilde{x}_k)(\bar{x}_m - \tilde{x}_m)$ в этом выражении. Используя (2), имеем

$$A_{ll}=\sum_{i=1}^{N}a_{il}^2=\sum_{i\neq l}\left(\frac{h_{il}\sin\theta}{\sqrt{N}}+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)^2+\left(\cos\theta+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)^2=$$

$$=\cos^2\theta+\left(1-\frac{1}{N}\right)\sin^2\theta+\frac{1}{N}\left((1-\cos\theta)^2+2\cos\theta\,(1-\cos\theta)\right)+c\sum_{i\neq l}h_{il}.$$

Так как матрица $\overline{H}$ — кососимметрическая, то $h_{ll}=0$, и поэтому согласно (1) $\sum\limits_{i\neq l}h_{il}=0$. После приведения подобных получаем

$$A_{ll}=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\frac{1}{N}(1-\sin^2\theta-\cos^2\theta)=1.$$

Значит, для любого $l=1,2,\ldots,N$ $A_{ll}=1$. Вычислим теперь A_{km} при $k\neq m$:

$$A_{km}=\sum_{i=1}^{N}2a_{ik}a_{im}=2\sum_{i\neq k,m}\left(\frac{h_{ik}\sin\theta}{\sqrt{N}}+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)\left(\frac{h_{im}\sin\theta}{\sqrt{N}}+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)+$$

$$+2\left(\cos\theta+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)\left[\left(\frac{h_{km}\sin\theta}{\sqrt{N}}+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)\left(\frac{h_{mk}\sin\theta}{\sqrt{N}}+\frac{1-\cos\theta}{N}\right)\right].$$

Так как при $k\neq m$ $h_{km}=-h_{mk}$ и, согласно (1), $\sum\limits_{i\neq k,m}h_{ik}=-h_{mk}$, $\sum\limits_{i\neq k,m}h_{im}=-h_{km}$, то

$$A_{km}=2\left(\sum_{i\neq k,m}\frac{h_{ik}h_{im}\sin^2\theta}{N}+\frac{(1-\cos\theta)^2}{N}+2\cos\theta\,\frac{1-\cos\theta}{N}\right).$$

Но $\sum\limits_{i\neq k,m}h_{ik}h_{im}=\sum\limits_{i=1}^{N}h_{ik}h_{im}=-1$. Поэтому

$$A_{km}=\frac{2}{N}(-\sin^2\theta+1-\cos^2\theta)=0.$$

Следовательно,

$$d'^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}'_i-\tilde{x}'_i\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}_i-\tilde{x}_i\right)^2=d^2,$$

т.е. *преобразование* (2) *сохраняет расстояние между точками и, значит, является движением.*

4. Выясним теперь, что представляет собой движение, задаваемое формулами (2). Прежде всего, легко проверить, что $\sum\limits_{j=1}^{N}a_{ij}=1$ и, следовательно, все точки, для которых $x_1=x_2=\ldots=x_N$, переходят в себя. Эти точки лежат на прямой, проходящей через начало координат O и образующей со всеми осями координат равные углы

$\arccos \frac{1}{\sqrt{N}}$. Поэтому (по аналогии с биссектрисой угла) эту прямую будем называть *полисектрисой* координатного угла.

Покажем, наконец, что движение (2) является поворотом вокруг полисектрисы координатного угла. Для этого рассмотрим произвольную точку X, не лежащую на полисектрисе. В соответствии с формулами (2) она переходит в точку X'. Обозначим через $\overline{X}$ ортогональную проекцию точки X на полисектрису. Каждая из координат точки $\overline{X}$ равна, очевидно, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$. По свойству движения $\overline{X}X' \perp O\overline{X}$. Пусть φ — угол между векторами $\overline{X}X$ и $\overline{X}X'$.

Координаты вектора $\overline{X}X$ равны $x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$, $i = 1,2,\ldots,N$. Найдем длину этого вектора (по предположению он ненулевой):

$$\overline{X}X = \sqrt{OX^2 - O\overline{X}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\Bigl(\sum_{j=1}^{N} x_j\Bigr)^2}.$$

Так как при нашем движении полисектриса переходит в себя, то $\overline{X}X' = \overline{X}X$. И, значит, косинус угла между вектрорами $\overline{X}X$ и $\overline{X}X'$равен

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{N}\Bigl(\sum_{j=1}^{N}\bigl(a_{ij} - \frac{1}{N}\bigr)x_j\Bigr)\Bigl(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\Bigr)}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\Bigl(\sum_{j=1}^{N} x_j\Bigr)^2}. \tag{3}$$

Обозначим через A_{ll} и A_{km} $(k \neq m)$ коэффициенты при x_l^2 и $x_k x_m$ в числителе правой части (3). Используя выражения для a_{ii} и a_{ij} из (2), имеем

$$A_{ll} = \Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr)^2 \cos\theta + \sum_{i \neq l} -\frac{1}{N}\left(\frac{h_{il}\sin\theta}{\sqrt{N}} - \frac{\cos\theta}{N}\right) =$$

$$= \Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr)^2 \cos\theta + \frac{1}{N}\Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr)\cos\theta = \Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr)\cos\theta,$$

$$A_{km} = \Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr)\left(-\frac{2}{N}\cos\theta + \left(\frac{h_{km}\sin\theta}{\sqrt{N}} + \frac{h_{mk}\sin\theta}{\sqrt{N}} - \frac{2\cos\theta}{N}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{i \neq k,m}\left[\left(\frac{h_{ik}\sin\theta}{\sqrt{N}} - \frac{\cos\theta}{N}\right) + \left(\frac{h_{im}\sin\theta}{\sqrt{N}} - \frac{\cos\theta}{N}\right)\right]\Bigl(-\frac{1}{N}\Bigr) =$$

$$= -\frac{4\cos\theta}{N}\Bigl(1 - \frac{1}{N}\Bigr) + \frac{2\cos\theta}{N^2}(N-2) = -\frac{2}{N}\cos\theta.$$

Поэтому числитель правой части (3) равен

$$\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\frac{2}{N}\sum_{k\neq m}x_kx_m\right]\cos\theta=\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}x_j\right)^2\right]\cos\theta,$$

и, следовательно, он равен знаменателю этой части, умноженному на $\cos\theta$, т.е. $\cos\varphi=\cos\theta$. Отсюда следует, что угол φ между векторами $\overline{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}$ и $\overline{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}'$ равен θ или $2\pi-\theta$. И значит, *движение, задаваемое формулами* (2), *является поворотом на угол θ вокруг полисектрисы координатного угла.*

5. Оказывается, что поворот типа (2) существует не для любой размерности N. Это следует из требований (1), предъявляемых к матрице $\overline{H}$. Именно, из первого условия следует, что числа единиц с плюсом и минусом в каждой строке матрицы $\overline{H}$ равны между собою и равны $(N-1)/2$ (в силу кососимметричности один элемент в каждой строке равен нулю). Второе условие можно представить в следующем виде:

$$h_{ii}h_{ki}+h_{ik}h_{kk}+PP-PM-MP+MM=-1, \tag{4}$$

где PP, PM, MP и MM — числа слагаемых, представляющих собой соответственно произведение $+1$ на $+1$, $+1$ на -1, -1 на $+1$ и -1 на -1. Без ограничения общности положим для определенности $h_{ki}=1$. Тогда $h_{ik}=-1$. Поэтому $PP+PM=(N-3)/2$, $PP+MP=(N-1)/2$, $PM+MM=(N-3)/2$. Сопоставляя первое соотношение поочередно с двумя другими, находим $MM=PP$, $MP=PM+1$. Подставляя эти значения в (4) и учитывая, что $h_{ii}=h_{kk}=0$, получим $PP=PM$. И так как $PP+PM=(N-3)/2$, то $PP=PM=MM=(N-3)/4$, а $MP=(N+1)/4$. Отсюда следует, что *число N должно иметь вид* $4N-1$, *где n натуральное число.*

6. Итак, преобразование (2) представляет собой поворот вокруг полисектрисы координатного угла в E^{4n-1}. Более того, в соответствии с доказанным в п. 4, для любого вектора $\overline{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}$ угол поворота — один и тот же, поэтому в гиперплоскости, перпендикулярной полисектрисе, каждый вектор поворачивается вокруг точки $\overline{X}$ на один и тот же угол и, значит, такой поворот является *паратактическим* [3, гл. IV]. То есть нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Если в E^{4n-1} существует паратактический поворот вокруг полисектрисы координатного угла, задаваемый формулами (2), то тогда существует матрица Адамара порядка $4n$ и в $4n-1$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

7. Полученный результат можно использовать для практического построения матриц Адамара с помощью ЭВМ. В связи с этим *покажем, как в куб с помощью паратактического поворота* (2) *можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Рассмотрим в E^{4n-1} правильный симплекс, одна из вершин S которого лежит на полисектрисе координатного угла, а остальные на координатных осях (одна координата равна 1, остальные — нули). Все координаты вершины S можно тогда считать равными $(1+2\sqrt{n})/(4n-1)$. В E^3 ($n=1$) все эти координаты равны 1 и, значит, данный симплекс является вписанным в куб с ребром 1, построенным на положительвых полуосях. Поэтому будем считать $n > 1$. Центр описанного вокруг симплекса шара находится на полисектрисе, и все его координаты равны $\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)/(4n-1)$.

Положим $\theta = \arccos \frac{-1}{2\sqrt{n}}$ и преобразуем исходный ортогональный базис $e_1, e_2, \dots, e_{4n-1}$ в новый $e_1', e_2', \dots$ по формулам $e_i' = \sum_{j=1}^{4n-1} a_{ij} e_j$, где коэффициенты a_{ij} те же, что и в формулах (2). Сами формулы (2) можно при этом рассматривать как формулы преобразования координат вектора x (как известно, они дают связь между координатами вектора x относительно исходного и нового базисов). Проведем, далее, через вершины данного правильного симплекса опорные гиперплоскости, перпендикулярные новым осям координат x_i'. Получим некоторый прямоугольный параллелепипед. Утверждается, что этот параллелепипед является кубом с ребром $1/\sqrt{n}$ и что все вершины симплекса служат его вершинами, т.е. исходный правильный симплекс вписан в этот куб. Для доказательства этого достаточно перенести центр описанного вокруг симплекса шара в начало координат с помощью параллельного переноса $x_i'' = x_i' - \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)/(4n-1)$ и показать, что при этом каждая из координат любой вершины симплекса равна $\pm \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Действительно, вершина S лежит на полисектрисе и, значит, при повороте остается неподвижной, поэтому для нее при любом i

$$x_i'' = \frac{1 + 2\sqrt{n}}{4n-1} - \frac{1}{4n-1}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{4n-1}\left(2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Для вершины симплекса, лежащей на i-ой оси, согласно формулам (2) имеем для i-ой и k-ой координат ($k \neq i$) соответственно:

$$x_i'' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1 + 1/(2\sqrt{n})}{4n-1}\right) - \frac{1}{4n-1}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

$$x_k'' = \left(\frac{h_{ki}}{2\sqrt{n}} + \frac{1 + 1/(2\sqrt{n})}{4n-1}\right) - \frac{1}{4n-1}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{h_{ki}}{2\sqrt{n}}.$$

Так как $h_{ki} = \pm 1$, то наше утверждение доказано.

Заметим, что при $n = 1$ поворот на угол $\theta = \arccos \frac{-1}{2\sqrt{n}} = 120°$ вокруг полисектрисы координатного угла, не изменяя его в целом, лишь переставляет местами координатные оси.

8. С паратактическим поворотом связано еще одно геометрическое свойство матрицы Адамара, которое можно использовать для ее построения.

Начнем с того, что все вершины нашего правильного симплекса, кроме S, лежат в гиперплоскости γ, задаваемой уравнением $\sum_{i=1}^{4n-1} x_i = 1$. Обозначим через O_1 точку пересечения этой гиперплоскости с полисектрисой. Все координаты точки O_1 равны $1/(4n-1)$. Рассмотрим в γ единичные векторы $q_i = (e_i - OO_1)\sqrt{(4n-1)/(4n-2)}$ и $q_j = (e_j - OO_1)\sqrt{(4n-1)/(4n-2)}$, где e_i и e_j — орты соответствующих осей координат. Пусть q_i' и q_j' — векторы, в которые переходят q_i и q_j при паратактическом повороте вокруг точки O_1, задаваемом формулами (2), на угол $\theta = \arccos \frac{-1}{2\sqrt{n}}$. Векторы q_i' и q_j' лежат в гиперплоскости γ и образуют с векторами q_i и q_j соответственно угол, равный θ.

Обозначим через α_i и β_i соответственно двумерные плоскости, натянутые на пары векторов q_i и q_i', q_j и q_j'. И пусть $a = \lambda q_i + \lambda' q_i'$, $b = \mu q_j + \mu' q_j'$ — произвольные векторы плоскостей α_i и β_j. Рассмолтрим углы между этими векторами. С помощью стандартных вычислений можно найти их экстремальные значения, следуя Жордану. Оказывается, что *стационарный угол* ψ — единственный, причем $\cos\psi = \sqrt{n}/(2n-1)$. Отсюда следует, что плоскости α_i и β_j — *изоклинные* [3, гл. III], т.е. для любого вектора одной из плоскостей в другой плоскости найдется такой вектор, что угол между ними равен ψ, причем этот вектор единственный с точностью до скалярного множителя. Поскольку при паратактическом повороте плоскости α_i и β_j являются инвариантными (переходит в себя), то угол ψ не зависит от выбора базиса в них и, значит, определяется самими плоскостями α_i и β_j. Для любых i и j $(i \neq j)$ плоскости α_i и β_j являются изоклинными, и стационарный угол между ними равен ψ. Поэтому *в гиперплоскости γ получается система из $4n-1$ попарно изоклинных, проходящих через точку O_1 двумерных плоскостей, стационарный угол между которыми постоянен и равен* $\arccos \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$.

Список литературы

1. *М. Холл*, Комбинаторика. Мир, Москва (1970), 424 с.
2. *Г. Коксетер*, Математические эссе и развлечения. Мир, Москва (1986), 472 с.
3. *Б. А. Розенфельд*, Многомерные пространства. Наука, Москва (1986), 647 с.

On construction of Hadamard matrices

A. I. Medianik

The geometric approach to construction of Hadamard matrices of order $4n$ (with n integer) based on the concept of paratactic rotation E^{4n-1} of a special form (around a axis) is substantiated. It is also proved that a regular hypersimplex can be inscribe into a $(4n-1)$-dimensional cube, using such a rotation (if it exists).

Про побудову матриць Адамара

А. Г. Медяник

Обгрунтовується геометричний підхід до побудови матриць Адамара порядку $4n$ (n — ціле), що базується на понятті паратактичного повороту в E^{4n-1} спеціального вигляду навколо осі. Доводиться також, що за допомогою такого повороту, якщо він існує, в $(4n-1)$-вимірний куб можна вписати правильний симплекс тієї ж вимірності.