Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с. 94-107

УДК 517.944

Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи в областях со случайными тонкими каналами

Л. С. Панкратов

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 9 февраля 1994 года

Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца в областях, состоящих из полупространства с присоединенной системой случайных тонких каналов. Диаметры каналов и их количество зависят от параметра $\varepsilon > 0$ так, что при $\varepsilon \to 0$ их число растет, а диаметры стремятся к нулю. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ решения задачи по вероятности сходятся к неслучайной функции, являющейся решением третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Коэффициент в однородном краевом условии получен в явном виде через вероятностные характеристики каналов.

Введение. В работе рассмотрена задача об отражении акустических волн от пористого тела. В качестве модели пор рассматривается система случайных тонких каналов, прорезанных в полупространстве. Распространение акустических волн в такой среде описывается следующей краевой задачей :

$$\Delta u(x,k) + k^2 u(x,k) = f(x), \qquad x \in D^{(\varepsilon)}; \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,k) = 0, \qquad x \in \partial D^{(\varepsilon)}; \tag{0.2}$$

$$u \to 0, \qquad |x| \to \infty, \tag{0.3}$$

где $D^{(\varepsilon)}$ — области, состоящие из полупространства $R^+ \subset \mathrm{R}_3$ с присоединенной системой каналов $Q^{(\varepsilon)}$; $k \in \mathrm{C}^+$ $(\mathrm{Im}\, k > 0)$, $f(x)$ — непрерывная и финитная функция с носителем, сосредоточенным в R^+; граничное условие (0.2) понимается в обобщенном смысле.

Известно, что существует единственное решение задачи (0.1)-(0.3). Предположим, что диаметры каналов и их количество зависят от параметра $\varepsilon > 0$ так, что при $\varepsilon \to 0$ число каналов растет, а их диаметры стремятся к нулю, и изучим асимптотическое поведение решений $u^{(\varepsilon)}(x,k)$ задачи (0.1)-(0.3) при $\varepsilon \to 0$.

В работе показано, что влияние системы тонких каналов может быть учтено с помощью эквивалентного граничного условия. А именно, при определенных условиях, накладываемых на вероятностные характеристики каналов, последовательность решений $\{ u^{(\varepsilon)}(x,k) \}$ сходится по вероятности к неслучайной функции $u(x,k)$, которая является решением третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x,k) + k^2 u(x,k) = f(x), \quad x \in R^+; \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,k) + T(x,k)u(x,k) = 0, \quad x \in \partial R^{+}; \tag{0.5}$$

$$u \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{0.6}$$

где функция $T(x,k)$ в краевом условии (0.5) вычислена в явном виде и зависит от вероятностных характеристик каналов.

Выражение для $T(x,k)$ получено для двух модельных ситуаций:

1) множество $Q^{(\varepsilon)}$ при каждом $\varepsilon > 0$ представляет собой периодическую систему тонких каналов, боковые поверхности которых описываются посредством одномерного стационарного метрически транзитивного случайного процесса (шероховатые каналы);

2) множество $Q^{(\varepsilon)}$ при каждом $\varepsilon > 0$ представляет собой систему тонких каналов с гладкими стенками цилиндрического типа, имеющих случайную глубину, сечения которых случайным образом расположены на ∂R^{+} и имеют случайную площадь.

Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в работах [1, 2] для областей $D^{(\varepsilon)}$, которые состоят из двух полупространств R^{+} и R^{-}, разделенных плоским слоем толщины h и соединяющихся между собой системой каналов $Q^{(\varepsilon)}$.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата в случае каналов с шероховатыми стенками

Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство, а $R(t, \omega)$ — определенный на нем одномерный случайный процесс ($t \in \mathbf{R}_1$, $\omega \in \Omega$), удовлетворяющий следующим условиям:

а) $R(t, \omega)$ — строго стационарен и метрически транзитивен [3], т.е. с вероятностью 1:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} R(t,\omega)dt = \langle R(0) \rangle, \tag{1.1}$$

равномерно по α $(-\infty < \alpha < \infty)$, где $\langle\ \rangle$ — знак математического ожидания по мере P;

б) с вероятностью 1 существуют производные $\dfrac{d^k R}{dt^k}$ $(k = 1, 2, 3)$ и имеют место неравенства:

$$0 < a \le R(t,\omega) \le A < 1; \tag{1.2}$$

$$\left| \frac{d^k R}{dt^k} \right| \le B; \tag{1.3}$$

где числа a, A, B не зависят от $\omega \in \Omega$ и $t \in (-\infty, \infty)$.

Обозначим через $D^{(\varepsilon)} = D^{(\varepsilon)}(\omega_\varepsilon^N)$ область в трехмерном пространстве, состоящую из полупространства

$$R^{+} = \{ x = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}_1, x_3 > 0 \}$$

и присоединенной к нему системы $Q^{(\varepsilon)} = \bigcup_{i,j} Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ тонких каналов $(i = 1, 2,\dots, N_\varepsilon^1\,;\; j = 1, 2,\dots, N_\varepsilon^2)$ глубины h, где ω_ε^N — точка вероятностного пространства

$$\Omega_\varepsilon^N = \prod_{i=1}^{N_\varepsilon^1} \prod_{j=1}^{N_\varepsilon^2} \Omega_{ij}\,, \quad (\Omega_{ij} \equiv \Omega).$$

Боковые поверхности каналов описываются случайными функциями вида:

$$\vec{\xi}(\omega_{ij}) = 2(i,j)\varepsilon + \varepsilon R(\varepsilon^{-\gamma}\eta,\, \omega_{ij})(\cos\varphi,\, \sin\varphi), \tag{1.4}$$

где $\{\, \xi_1, \xi_2, \eta \,\}$ — локальные декартовы координаты в каждом канале, а $\{\, r, \varphi, \eta \,\}$ — отвечающая им локальная цилиндрическая система координат; $0 < \varepsilon << 1$, $0 < \gamma < \frac{2}{3}$, (i, j) — вектор с координатами i, j.

Будем обозначать границу полупространства R^+ через Γ. При этом каналы вырезают из Γ множества σ_{ij}. Предположим, что множества σ_{ij} сосредоточены в прямоугольнике P_L со сторонами L_1, L_2.

Рассмотрим в областях $D^{(\varepsilon)}(\omega_\varepsilon^N)$ краевую задачу (0.1)-(0.3). Как известно, существует единственное решение задачи (0.1)-(0.3), и это решение является случайной функцией ε, т.е.

$$u(x) = u^{(\varepsilon)}(x,k;\, \omega_\varepsilon^N), \qquad \{\, x \in D^{(\varepsilon)}(\omega_\varepsilon^N);\; k \in \mathrm{C}^+;\; \omega_\varepsilon^N \in \Omega_\varepsilon^N \,\}.$$

Изучим асимптотическое поведение решений задачи (0.1)-(0.3) при $u^{(\varepsilon)}(x,k;\omega_\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \to 0$ и, соответственно, $N_\varepsilon^m = [L_m/2\varepsilon\,] \to \infty$, где $m = 1, 2$, а $0 < L_m < \infty$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия а), б), тогда при любых x из произвольного множества $R_1 \subset R^+$, находящегося на положительном расстоянии от Γ, и любом k, лежащем в любой ограниченной области C_1^+ комплексной полуплоскости* $\operatorname{Im} k > 0$, *которая находится на положительном расстоянии от оси* $\operatorname{Im} k = 0$, *решения задачи* (0.1)-(0.3) *сходятся по вероятности при $\varepsilon \to 0$ к неслучайной функции $u(x,k)$, а именно, для любого $\delta > 0$:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon^N \Big\{ \sup_{\substack{x \in R_1 \\ k \in C_1^+}} \Big|\, u^{(\varepsilon)}(x,\, k;\, \omega_\varepsilon^N) - u(x,\, k) \,\Big| > \delta \Big\} = 0, \tag{1.5}$$

где P_ε^N — мера на вероятностном пространстве Ω_ε^N.

При этом $u(x,\, k)$ является решением краевой задачи (0.4)-(0.6), где

$$T(x,k) = T_1(\hat{k}) = -\frac{\pi}{4}\,\frac{\hat{k}\,\mathrm{tg}\,(\hat{k}h)}{\langle R^{-2}(0)\rangle}\,; \qquad \hat{k} = k\sqrt{\langle R^2(0)\rangle\langle R^{-2}(0)\rangle}\,.$$

Доказательство теоремы 1.1 проводится в пунктах 2-4 и состоит из двух частей. Вначале в пунктах 2-3 устанавливается "неслучайная" теорема 1.2 для фиксированного ω_∞, а затем в пункте 4 проводится доказательство теоремы 1.1. В свою очередь, для доказательства теоремы 1.2 вначале строится подходящее представление решения $u^{(\varepsilon)}(x, k; \omega_\varepsilon^N)$ при фиксированных ε и ω_ε^N и мнимых $k = i\kappa$ $(\kappa > 0)$. Затем с помощью этого представления делается предельный переход при $\varepsilon \to 0$, теорема 1.2 устанавливается при $k = i\kappa$ $(\kappa > 0)$ и, наконец, полученный результат переносится на произвольные комплексные $k \in \mathbb{C}^+$.

2. Аппроксимация решения в канале

Пусть ω_∞ — точка вероятностного пространства Ω_∞

$$\Omega_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} \equiv \Omega$$

такая, что для любой координаты ω_{ij} этой точки функции $R_{ij}(t) = R(t,\omega_{ij})$ удовлетворяют условиям а), б) (см. теорему 1.1), а ω_ε^N — проекция этой точки на вероятностное пространство Ω_ε^N. При этом боковые поверхности каналов описываются случайными функциями (1.4).

В каждом канале $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ введем локальную цилиндрическую систему координат

$$U = \{ (r,\varphi,\eta) : \ 0 \le r \le \varepsilon, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \eta \le h \}.$$

Введем теперь в каждом канале $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ криволинейную систему координат

$$H = \{ (l,\theta,t) : \ 0 \le l \le \varepsilon, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le t \le h \},$$

так чтобы боковые поверхности каналов совпадали с координатными поверхностями $l = \varepsilon$. Координатную систему H введем с помощью равенств:

$$\begin{cases} r - lR_{ij}(\varepsilon^{-\gamma}\eta) = 0; \\ \eta - \varepsilon^{\gamma} g_{ij}(\varepsilon^{-1}r, \varepsilon^{-\gamma} t, \varepsilon) = 0; \\ \varphi - \theta = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Полагая $\rho = \varepsilon^{-1} r$, $\tau = \varepsilon^{-\gamma} t$ и выбирая функцию $g_{ij}(\rho, \tau, \varepsilon)$ из условия ортогональности координатной ситемы H, получаем для этой функции диффереренциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \rho}(\rho,\tau,\varepsilon) = -\,\varepsilon^{2-2\gamma} \rho \, \frac{R'_{ij}(g_{ij})}{R_{ij}(g_{ij})}, \tag{2.2}$$

которое дополним начальным условием

$$g_{ij}(0,\tau,\varepsilon) = \tau. \tag{2.3}$$

Задача Коши (2.2)-(2.3) однозначно разрешима на полуоси $0 \le \rho < \infty$, т. к. в силу свойств функции $R_{ij}(g_{ij})$ правая часть уравнения (2.2) ограничена и удовлетворяет условию Липшица равномерно по $g_{ij} \in R_1$ и по ρ из любого конечного интервала $[0, N]$.

Лемма 2.1. *Пусть N — любое положительное число. Тогда равномерно по $\rho \in [0, N]$ и $\tau \in R_1$ для решения задачи (2.2)-(2.3) при $\varepsilon \to 0$ имеют место оценки:*

$$\frac{\partial^k g}{\partial \tau^k} = \tau^{1-k} + O(\varepsilon^{2-2\gamma}), \quad (k = 0, 1);$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial \rho}, \frac{\partial g^2}{\partial \rho \partial \tau}, \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} \right\} = O(\varepsilon^{2-2\gamma}).$$

Доказательство этой леммы вытекает из вида интегрального уравнения, соответствующего задаче (2.2)-(2.3) и ограниченности функции $R_{ij}(t) = R(t, \omega_{ij})$.

Рассмотрим представление оператора Лапласа в системе криволинейных ортогональных координат $\{ l, \theta, t \}$:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\sqrt{G}}{G_{11}} \frac{\partial u}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sqrt{G}}{G_{22}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{G}}{G_{33}} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right], \tag{2.4}$$

где

$$G_{11} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial l} \right); \quad G_{22} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \theta} \right); \quad G_{33} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right);$$

$$G = G_{11} G_{22} G_{33}; \qquad \xi_3 \equiv \eta.$$

Лемма 2.2. *Система (2.1) однозначно разрешима относительно переменных $\{ r, \eta, \varphi \}$, т.е. всюду в канале $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$:*

$$r = \overline{r}(l, \theta, t; \omega_{ij}; \varepsilon), \quad \eta = \overline{\eta}(l, \theta, t; \omega_{ij}; \varepsilon), \quad \varphi = \overline{\varphi}(l, \theta, t; \omega_{ij}; \varepsilon).$$

Причем при $\varepsilon \to 0$ имеют место оценки:

$$G_{11} = R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma} t) + O(\varepsilon^{2-2\gamma}); \qquad G_{22} = O(\varepsilon^2); \qquad G_{33} = 1 + O(\varepsilon^{2-2\gamma}); \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{11}}{\partial t} = \dfrac{d}{dt} R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma} t) + O(\varepsilon^{2-3\gamma}); \\ \dfrac{\partial G_{22}}{\partial t} = l^2 \dfrac{d}{dt} R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma} t) + O(\varepsilon^{2-3\gamma}); \\ \dfrac{\partial G_{33}}{\partial t} = O(\varepsilon^{2-3\gamma}). \end{cases} \tag{2.6}$$

Система (2.1) также однозначно разрешима относительно l, t, θ, причем при $\varepsilon \to 0$ справедлива оценка:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = 1 + O(\varepsilon^{2-3\gamma}). \tag{2.7}$$

Доказательство леммы 2.2 следует непосредственно из вида функций G_{11}, G_{22}, G_{33}, теоремы о неявных функциях и оценки:

$$\left| R_{ij}(\varepsilon^{-\gamma}\eta) - R_{ij}(\varepsilon^{-\gamma} t) \right| = O(\varepsilon^{2-3\gamma}),$$

при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим, далее, через $c(t, \omega_{ij}; \varepsilon) = c_{ij}(t; \varepsilon)$, $s(t, \omega_{ij}; \varepsilon) = s_{ij}(t; \varepsilon)$ решения уравнения:

$$R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma} t)\frac{d}{dt}\left\{R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma} t)\frac{du}{dt}\right\} + k^2 u = 0, \tag{2.8}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$c_{ij}(0; \varepsilon) = 1, \quad c'_{ij}(0; \varepsilon) = 0; \tag{2.9}$$

$$s_{ij}(0; \varepsilon) = 0, \quad s'_{ij}(0; \varepsilon) = R_{ij}^{-2}(0). \tag{2.10}$$

Лемма 2.3. *Пусть $k = i\kappa$, где $0 < \kappa < \kappa_1 < \infty$, $0 \le t \le h$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для функций $c_{ij}(t; \varepsilon)$ и $s_{ij}(t; \varepsilon)$ справедливы оценки:*

$$\begin{cases} 1 \le c_{ij}(t; \varepsilon) \le C; \quad A^{-2}t \le s_{ij}(t; \varepsilon) \le C; \\ | c'_{ij}(t; \varepsilon) | + | s'_{ij}(t; \varepsilon) | \le C; \quad | c''_{ij}(t; \varepsilon) | + | s''_{ij}(t; \varepsilon) | \le C\varepsilon^{-\gamma}; \end{cases} \tag{2.11}$$

где A — постоянная из условия б) (см. теорему 1.1), а постоянная C не зависит от i, j, ε.

При $\varepsilon \to 0$ справедливы равномерные по $t \in [0, h]$, $\kappa \in [\kappa_0, \kappa_1]$ и $i, j = 1, 2,\dots, N_\varepsilon^{1,2}$ оценки:

$$\left| c'_{ij}(t; \varepsilon) R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma}t) - \frac{\hat\kappa \operatorname{sh} \hat\kappa t}{\langle R_{ij}^{-2}(0) \rangle} \right| = o(1);$$

$$\left| s''_{ij}(t; \varepsilon) R_{ij}^2(\varepsilon^{-\gamma}t) - \operatorname{ch} \hat\kappa t \right| = o(1);$$

где $\hat\kappa = \kappa\sqrt{\langle R^2(0) \rangle \langle R^{-2}(0) \rangle}$.

Доказательство леммы 2.3 аналогично доказательству леммы 3 из [2].

Перейдем непосредственно к построению решения $u^{(\varepsilon)}(x, k)$ задачи (0.1)-(0.3). При достаточно малых ε и, следовательно, достаточно малых диаметрах каналов решение $u^{(\varepsilon)}(x, k)$ в области R^+ можно аппроксимировать функцией вида:

$$w^{(\varepsilon)}(x, k) = u_+(x,k) - \sum_{i,j} \int_{\sigma_{ij}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2\pi |x-y|} \varphi_{ij}(y)\, d\Gamma_y, \tag{2.12}$$

где

$$u_+(x, k) = \int_{R^+} \left\{ \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|} + \frac{e^{ik|x-y^*|}}{2\pi |x-y^*|} \right\} f(y)\, dy. \tag{2.13}$$

В равенстве (2.13) y^* обозначает точку в пространстве R_3 с координатами $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, если $y \in R_3$ имеет координаты: $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Рассмотрим, далее, в каждом канале $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ функцию вида:

$$w^\varepsilon_{ij}(x) = a_{ij}\, c_{ij}(t;\varepsilon) + b_{ij}\, s_{ij}(t;\varepsilon),$$

где

$$x = \left(2i\varepsilon + \bar{\xi}_1(l,\theta,t),\, 2j\varepsilon + \bar{\xi}_2(l,\theta,t),\, -\bar{\eta}(l,\theta,t)\right) \in Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij});$$

a_{ij}, b_{ij} — произвольные постоянные.

Подберем постоянную b_{ij} так, чтобы имело место равенство:

$$\frac{d}{dt}\left\{ a_{ij}\, c_{ij}(t;\varepsilon) + b_{ij}\, s_{ij}(t;\varepsilon) \right\}\Big|_{t=h} = 0;$$

тогда для $w^\varepsilon_{ij}(x)$ будет иметь место представление:

$$w^\varepsilon_{ij}(x) = a_{ij}\left(c_{ij}(t;\varepsilon) - \frac{c'_{ij}(h;\varepsilon)}{s'_{ij}(h;\varepsilon)} \right). \tag{2.14}$$

Таким образом, в силу свойств координатной системы H, эти функции на боковых поверхностях каналов удовлетворяют граничному условию (0.2), а на основании канала имеют нулевую производную по t.

Потребуем, чтобы в каких-либо точках верхнего основания каналов $x_{ij} = (2i\varepsilon, 2j\varepsilon, 0)$ значения функций $w^{(\varepsilon)}(x,k)$ и $w^\varepsilon_{ij}(x)$ и их нормальные производные совпадали. Тогда учитывая, что

$$\frac{\partial t}{\partial \eta}\Big|_{\rho=0} = 1$$

и обозначая

$$v(x) = \sum_{i,j} \chi_{ij} R_{ij}^{-2}(0)\frac{c'_{ij}(h;\varepsilon)}{s'_{ij}(h;\varepsilon)};\quad \sigma_\varepsilon = \bigcup_{ij}\sigma_{ij};\quad \varphi_\varepsilon(y) = \sum_{ij}\chi_{ij}(y)\varphi_{ij}(y),$$

где $\chi_{ij}(x)$ — характеристическая функция множеств σ_{ij}, приходим к равенству:

$$\varphi_\varepsilon(x_{ij}) + v(x_{ij})\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{e^{ik\,|x_{ij}-y|}}{2\pi\,|x_{ij}-y|}\,\varphi_\varepsilon(y)\, d\Gamma_y = v(x_{ij})u_+(x_{ij},k).$$

Рассмотрим связанное с полученным равенством интегральное уравнение:

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) + v(x)\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{e^{ik\,|x-y|}}{2\pi\,|x-y|}\,\widetilde{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\Gamma_y = v(x)u_+(x,k). \tag{2.15}$$

Имеет место следующая лемма:

Лемма 2.4. *Пусть $k = i\kappa$, $0 < \kappa_0 \le \kappa \le \kappa_1$. Тогда при достаточно малых ε ($\varepsilon \le \varepsilon_0(\kappa_0, \kappa_1, h, L_1, L_2)$) существует единственное решение $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \widetilde{\varphi}_\varepsilon(x;\omega^N_\varepsilon)$ уравнения (2.15), причем при любых x', $x'' \in \sigma_{ij}$ выполняются неравенства:*

$$\left| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(x') - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(x'') \right| \le C_1 \mid x' - x'' \mid \left| \ln \mid x' - x'' \mid \right|; \tag{2.16}$$

и при любых $x', x'' \in \sigma_{ij}$:

$$\left| \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{e^{ik \mid x' - y \mid}}{2\pi \mid x' - y \mid} \widetilde{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\Gamma_y - \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{e^{ik \mid x'' - y \mid}}{2\pi \mid x'' - y \mid} \widetilde{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\Gamma_y \right| \le$$

$$\le C_2 \mid x' - x'' \mid \left| \ln \mid x' - x'' \mid \right|, \tag{2.17}$$

где постоянные C_1, C_2 *не зависят от* ε *(*$\varepsilon \le \varepsilon_0(\kappa_0, \kappa_1, h, L_1, L_2)$*) и* ω_ε^N.

Доказательство. Перепишем уравнение (2.15) в виде:

$$(W - W_0)\widetilde{\varphi}_\varepsilon + (W_0 + G)\widetilde{\varphi}_\varepsilon = u_+(x, k), \tag{2.18}$$

где W и W_0 — операторы умножения, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\sigma_\varepsilon)$ на элементы:

$$\sum_{i,j} R_{ij}^2(0) \frac{s_{ij}'(h;\varepsilon)}{c_{ij}'(h;\varepsilon)} \chi_{ij}(x), \qquad \sum_{i,j} R_{ij}^2(0) \frac{\operatorname{cth} \widehat{\kappa} h}{\widehat{\kappa} \langle R^{-2}(0) \rangle} \chi_{ij}(x),$$

а G — интегральный оператор в (2.15). Ясно, что

$$C_1 \, \|\widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\sigma_\varepsilon)} \ge (W_0 \widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{\varphi}_\varepsilon) \ge C_2 \, \|\widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\sigma_\varepsilon)}$$

и, кроме того, $(G\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{\varphi}_\varepsilon) > 0$. Отсюда учитывая, что в силу леммы 2.3 при $\varepsilon \to 0$, $\| W - W_0 \| = o(1)$, получаем, что при достаточно малых ε ($\varepsilon \le \varepsilon_0(\kappa_0, \kappa_1, h, L_1, L_2)$) уравнение (2.15) имеет единственное решение.

Пользуясь леммой 2.3 и свойствами интегральных уравнений со слабой особенностью (см. [4]), получим, что

$$\max_{x \in \sigma_\varepsilon} \mid \widetilde{\varphi}_\varepsilon(x; \omega_\varepsilon^N) \mid \le C, \tag{2.19}$$

где постоянная C не зависит от ε и ω_ε^N.

С помощью оценки (2.19) известным способом [1] можно получить неравенства (2.16), (2.17). Лемма доказана.

Пусть $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ — решение уравнения (2.15). Положим:

$$\varphi_{ij}(x) = \widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)\chi_{ij}(x), \quad x \in \sigma_{ij},$$

а постоянные a_{ij} найдем из условия совпадения функций $w^{(\varepsilon)}(x, k)$ и $w_{ij}^\varepsilon(x)$ и их нормальных производных в точках x_{ij}. Тогда будут выполнены равенства, из которых следует уравнение (2.15), причем a_{ij} будут ограничены постоянной, не зависящей от ε, ω_ε^N.

Рассмотрим функцию $U^\varepsilon(x,k)$, которая определена в полупространстве R^+ посредством равенства (2.12), а в канале — (2.14). Сужение этой функции на области R^+ и

$Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ принадлежат пространствам $W_2^1(R^+)$ и $W_2^1\left(Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})\right)$, но пространству $W_2^1\left(D^{(\varepsilon)}(\omega_\varepsilon^N)\right)$ не принадлежат, т.к. при переходе из R^+ в $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ она имеет скачки

$$p_{ij}(x) = w^{(\varepsilon)} \Big|_{\sigma_{ij}} - w_{ij}^{(\varepsilon)} \Big|_{\sigma_{ij}}.$$

Ясно, что в силу леммы 2.4

$$| \, p_{ij}(x') - p_{ij}(x'') \, | \le C | \, x' - x'' \, | \; \big| \ln | \, x' - x'' \, | \, \big|, \quad x', \quad x'' \in \sigma_{ij}; \tag{2.20}$$

где постоянная C не зависит от ε, ω_ε^N.

Поскольку $p_{ij}(x_{ij}) = 0$ и $diam\ \sigma_{ij} \le C\varepsilon$, то из (2.20) имеем:

$$| \, p_{ij}(x) \, | \le C\varepsilon \, | \ln \varepsilon \, |, \quad x \in \sigma_{ij}. \tag{2.21}$$

Аналогично можно показать, что

$$\left| \left[\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial \eta} \right] \right| = \left| \left(\frac{\partial w^{(\varepsilon)}}{\partial \eta} - \frac{\partial w_{ij}^\varepsilon}{\partial \eta} \right) \Big|_{\sigma_{ij}} \right| \le C\varepsilon \, | \ln \varepsilon \, |. \tag{2.22}$$

По построению функция $U^\varepsilon(x,k)$ в полупространстве R^+ удовлетворяет уравнению :

$$\Delta U^\varepsilon(x,k) + k^2 U^\varepsilon(x,k) = f(x),$$

имеет нулевую производную на боковых границах каналов $Q^{(\varepsilon)}(\omega_{ij})$ и на основаниях каналов, а также на $\Gamma / U_{ij}\sigma_{ij}$.

Кроме того, пользуясь леммами 2.2, 2.3, уравнением (2.8) и равномерной ограниченностью постоянных σ_{ij} по i, j, ε, можно показать, что в каналах функция $U^\varepsilon(x,k)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^\varepsilon(x,k) + k^2 U^\varepsilon(x,k) = g_{ij}^{(\varepsilon)}(x),$$

причем для функции $g_{ij}^{(\varepsilon)}(x)$ имеет место оценка:

$$\max_{x \in Q_{ij}^{(\varepsilon)}} | \, g_{ij}^{(\varepsilon)}(x) \, | = O(\varepsilon^{2-2\gamma}). \tag{2.23}$$

В силу оценок (2.21)-(2.23), так же как в [1], получаем, что при $0 < \gamma < 2/3$ разность функций $U^\varepsilon(x,k) - u^\varepsilon(x,k)$ стремится к нулю равномерно по $x \in R^+$, находящемся на положительном расстоянии от Γ и по $\kappa \in [\kappa_0, \kappa_1]$.

Покажем, что функция $U^\varepsilon(x,k)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в R^+ к функции $u(x,k)$, определенной равенствами (0.4)-(0.6).

3. Предельный переход

Пусть $k = i\kappa$ $(\kappa \in [\kappa_0, \kappa_1])$. В пункте 2 было показано, что решения уравнения (2.15) равномерно ограничены по ε, ω_ε^N. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{ \varepsilon_k \to 0 \}$, такую что для любой непрерывной функции $g(x,\omega_\infty)$ существует предел:

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \to 0} \int\limits_{P_L} [\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,\omega_\varepsilon^N) - \varphi(x,\omega_\infty)] g(x,\omega_\infty) dx = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\omega_\infty \in \Omega_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_{ij} \quad (\Omega_{ij} \equiv \Omega);$$

$$P_L = \{ x_1, x_2 : 0 \le x_{1,2} \le L_{1,2} \},$$

а $\varphi(x,\omega_\infty)$ — ограниченные в прямоугольнике P_L функции. Покажем, что на самом деле $\varphi(x,\omega_\infty)$ не зависит от ω_∞ и получим для нее интегральное уравнение. Для этого необходимо перейти к пределу в уравнении (2.15) по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. В самом деле, умножая (2.15) на $g(x,\omega_\infty)$, интегрируя его по прямоугольнику P_L и пользуясь (3.1) и леммой 2.3, получим, что $\varphi(x)$ является решением уравнения:

$$\varphi(x) + T_1(\hat{k}) \int\limits_{P_L} \frac{e^{ik|x-y|}}{2\pi |x-y|} \varphi(y)\, d\Gamma_y = T_1(\hat{k}) u_+(x,k), \tag{3.2}$$

где

$$T_1(\hat{k}) = -\frac{\pi}{4} \frac{\hat{k} \operatorname{tg}(\hat{k}h)}{\langle R^{-2}(0) \rangle}; \tag{3.3}$$

а $\operatorname{th}(\hat{\kappa}h) = -i\operatorname{tg}(\hat{k}h)$, при $\hat{\kappa} = -i\hat{k}$.

Переходя, далее, к пределу в равенстве (2.12) по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, получаем, что предел $u(x,i\kappa)$ достигается равномерно по $x \in R^+$, находящемся на положительном расстоянии от Г, и определяется равенством:

$$u(x,i\kappa) = u_+(x,i\kappa) - \int\limits_{P_L} \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{2\pi |x-y|} \varphi(y)\, d\Gamma_y, \tag{3.4}$$

где $\varphi(y)$ — решение уравнения (3.2).

Поскольку (3.2) при $k = i\kappa$ ($\kappa > 0$) имеет единственное решение, отсюда следует, что пределы по любой подпоследовательности неслучайны и совпадают, т.е.

$$u(x, i\kappa) = \lim_{\varepsilon \to 0} U^\varepsilon(x, i\kappa).$$

Переход к произвольным комплексным $k \in \mathbb{C}^+$ производится так же, как в работе [1]. Нетрудно убедиться, что функция $u(x,k)$ является решением краевой задачи (0.4)-(0.6).

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. *Пусть ω_∞ — точка вероятностного пространства Ω_∞, для каждой координаты которой ω_{ij} функция $R_{ij}(t) = R(t,\omega_{ij})$ удовлетворяет условиям а), б) (см. теорему 1.1), а ω_ε^N — проекция ω_∞ на конечномерное пространство Ω_ε^N при* *каждом* $\varepsilon > 0$. *Тогда при любых* x *из произвольного множества* $R_1 \subset R^+$, *находящегося на положительном расстоянии от* Γ *и* k *и лежащем в любой ограниченной области комплексной плоскости* C^+, *находящейся на положительном расстоянии от оси* $\operatorname{Im} k = 0$, *решения задачи сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к функции* $u(x,k)$, *которая не зависит от* ω_{ij} *и является решением краевой задачи* (0.4)-(0.6), *где функция* $T(x, k)$ *определяется выражением* (3.3)..

4. Доказательство теоремы 1.1

Доказательство теоремы 1.1 будем вести от противного, а именно, предположим, что условия а), б) выполнены, а сходимости по вероятности в смысле (1.5) решений исходной задачи к $u(x,k)$ — решению задачи (0.4)-(0.6) тем не менее нет.

Известно, что если задана система согласованных мер, то всегда можно построить такую меру P_∞, заданную на вероятностном пространстве Ω_∞, чтобы она совпадала со своими проекциями P_ε^N — вероятностными мерами на конечномерных пространствах Ω_ε^N.

Обозначим через Z_{ij} множество функций $R_{ij}(t)$, для которых выполняются условия а), б) (см. теорему 1.1), и введем в вероятностном пространстве Ω_∞ следующие события:

$$B^{(\varepsilon)}(\delta) = \{ \omega_\infty \in \Omega_\infty \colon \sup_{\substack{x \in R_1 \\ k \in C_1^+}} | u^{(\varepsilon)}(x,k;\omega_\varepsilon^N) - u(x,k) | > \delta \};$$

$$A^{(\varepsilon)} = \{ \omega_\infty \in \Omega_\infty \colon R_{ij}(t) \in Z_{ij};\ i,j = 1,2,\dots \}.$$

Событие $A^{(\varepsilon)}$ заключается в одновременном выполнении событий A_{ij} вида:

$$A_{ij} = \{ \omega \in \Omega_{ij} \colon R_{ij} \in Z_{ij} \}.$$

Итак, пусть $u^{(\varepsilon)}(x,k)$ по вероятности не сходится к $u(x,k)$, тогда существует δ_0, $\theta > 0$ и подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, что

$$P_\infty(B^{(\varepsilon)}(\delta_0)) > \theta.$$

В вероятностном пространстве Ω_∞ рассмотрим событие

$$S^{(\varepsilon)} = B^{(\varepsilon)}(\delta_0) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{N_\varepsilon^1} \bigcap_{j=1}^{N_\varepsilon^2} A_{ij} \right].$$

Причем поскольку свойства а), б) выполняются для $R_{ij}(t)$ с вероятностью 1, то

$$P\{ \overline{A}_{ij} \} < \frac{\theta}{2^{i+j+1}},$$

и, значит,

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{N_\varepsilon^1} \bigcap_{j=1}^{N_\varepsilon^2} \overline{A}_{ij}\right\} < \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\theta}{2^{i+j}} < \frac{\theta}{2}.$$

Поэтому

$$P_\infty(A^{(\varepsilon)}) > 1 - \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, мы получаем, что событие $S^{(\varepsilon)}$ непусто. Согласно определения события $A^{(\varepsilon)}$ выполнены условия теоремы 1.2, а сходимости к функции $u(x,k)$ нет. Полученное противоречие и доказывает теорему 1.1.

5. Постановка задачи и формулировка основного результата в случае цилиндрических каналов со случайными параметрами

Рассмотрим теперь задачу (0.1)-(0.3) в ситуации 2) (см. Введение), а именно, изучим асимптотическое поведение при $s \to \infty$ решений задачи (0.1)-(0.3) в областях $D^{(s)} \subset R_3$, состоящих из верхнего полупространства R^+ и системы каналов $Q_j^{(s)}$ ($j = 1,2,\ldots,s$). Будем предполагать, что все каналы расположены в некоторой фиксированной конечной области $G \subset \Gamma$, ограниченной гладким контуром. Каналы $Q_j^{(s)}$ направлены по нормали к поверхности Γ и вырезают из нее множества $\sigma_j^{(s)}$.

Опишем вероятностные характеристики каналов $Q_j^{(s)}$. Будем считать, что множества $\sigma_j^{(s)}$ распределены на Γ случайным образом и заданы их m-частичные функции распределения ($m = 1,2,\ldots,s$). Это означает, что вероятность нахождения точки $x_j^{(s)} \in \sigma_j^{(s)}$ в элементарных объемах $dx^1,\ldots,dx^m$ в окрестности точек $x^1,\ldots,x^m$ задается выражением:

$$f_m^{(s)}(x^1,\ldots,x^m)dx^1,\ldots,dx^m.$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия :

1. $f_j^{(s)}(x^1,x^2) = 0$, $\min \mid x^1 - x^2 \mid \leq (2+\delta)\min(d_j^{(s)},d_l^{(s)})$,

где $x^1 \in \sigma_j^{(s)}$, $x^2 \in \sigma_l^{(s)}$, $\delta > 0$, $d_j^{(s)} = diam\ \sigma_j^{(s)}$.

2. Для любой области $G \subset \Gamma$:

$$\lim_{s\to\infty} \int_G \int_G \left| f_2^{(s)}(x^1,x^2) - f_1^{(s)}(x^1) f_2^{(s)}(x^2) \right| dx^1\, dx^2 = 0.$$

3. Предположим, что площади сечения каналов являются случайными величинами, плотность распределения которых задается условной функцией распределения $\psi^{(s)}(x,y) = s\psi(sx,y)$, т.е. вероятность того, что площадь $\mid \sigma_j^{(s)} \mid$ с "центром" в точке y примет значение d_j из интервала $\mid s_1,s_2 \mid$, задается выражением:

$$P\left\{(s_1 < \mid \sigma_j^{(s)} \mid < s_2) \Bigm| y\right\} = \int_{s_1}^{s_2} \psi^{(s)}(x,y)\, dx.$$

Глубина каналов также является случайной величиной с условной функцией распределения $\varphi(x,y)$, т.е. вероятность того, что глубина $h_j^{(s)}$ примет значение в интервале $[\alpha,\beta]$ при условии, что "центр" множества $\sigma_j^{(s)}$ находится в точке y, определяется выражением:

$$P\left\{(\alpha < h_j^{(s)} < \beta) \;\middle|\; \dot{y}\right\} = \int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\, dx.$$

При этом будем предполагать, что случайные величины, описывающие глубину и площадь сечения различных каналов являются независимыми.

Имеет место теорема:

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1-3, *тогда при любых x из произвольного множества $R_1 \subset R^+$, находящегося на положительном расстоянии от Γ и любом k, лежащем в любой ограниченной области комплексной плоскости C^+, находящейся на положительном расстоянии от оси* $\operatorname{Im} k = 0$, *решения задачи* (0.1)-(0.3) *по вероятности сходятся при $\varepsilon \to 0$ к неслучайной функции $u(x,k)$, которая является решением краевой задачи* (0.4)-(0.6), *где*

$$T(x,k) = -k \int_0^\infty \int_0^\infty z f_1(x)\psi(z,x)\varphi(y,x)\operatorname{tg}(ky)\, dydz.$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится в несколько этапов, вначале доказывается вспомогательная теорема 2.2 для каналов с неслучайными характеристиками, на основании которой выводится основной результат.

Теорема 2.2 *Пусть при $s \to \infty$ выполняются условия:*

а) $\lim\limits_{s\to\infty} \{ \max\limits_j d_j^{(s)} \} = 0;$

б) $R_j^{(s)} > a d_j^{(s)}, \quad j = 1,2,\ldots,s, \quad a > 0;$

в) для любой подобласти G_1 области G:

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{\sigma_j^{(s)} \subset G_1} \left[k \operatorname{tg}(k h_j^{(s)}) \mid \sigma_j^{(s)} \mid\right] = \int_{G_1} T(x,k)\, d\Gamma_x,$$

где $d_j^{(s)}$ — диаметры множеств $\sigma_j^{(s)}$, $h_j^{(s)}$ — глубина j-го канала; $R_j^{(s)}$ — расстояние от множества $\sigma_j^{(s)}$ до множества $\bigcup\limits_{i\neq j} \sigma_j^{(s)}$; $T(x,k)$ — непрерывная в области $G \subset \Gamma$ функция.

Тогда равномерно по k, из любой ограниченной области комплексной плоскости C^+, находящейся на положительном расстоянии от оси $\operatorname{Im} k = 0$, *в метрике пространства $C^1(R_1)$, где $R_1 \subset R^+$ — произвольное множество, лежащее на положительном расстоянии от $G \subset \Gamma$, существует предел при $s \to \infty$ решений $u^{(s)}(x,k)$ задачи* (0.1)-(0.3):

$$\lim_{s \to \infty} u^{(s)}(x,k) = u_+(x,k) - \int_G \frac{e^{ik\,|\,x-y\,|}}{2\pi\,|\,x-y\,|}\varphi(y)\,d\Gamma_y,\ \ x \in R^+;$$

где $u_+(x,k)$ *определяется равенством* (2.13), *а функция* $\varphi(y)$ *удовлетворяет на* G *интегральному уравнению*:

$$\varphi(x) + T(x,k)\int_G \frac{e^{ik\,|\,x-y\,|}}{2\pi\,|\,x-y\,|}\varphi(y)\,d\Gamma_y = u_+(x,k).$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится известными методами, изложенными в [1].

Список литературы

1. *В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов*, Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Наук. думка, Киев (1974), 280 с.
2. *И. Е. Егорова, Е. Я. Хруслов*, Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи в областях со случайными тонкими щелями.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), № 52, с. 91—103.
3. *Г. Крамер, М. Лидбеттер*, Стационарные случайные процессы. Мир, Москва (1969), 339 с.
4. *С. Г. Михлин*, Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, Москва (1959), 232 с.
5. *А. А. Боровков*, Теория вероятностей. Наука, Москва (1976), 352 с.

The second boundary value problem solutions asymptotic behaviour in the domains with random thin channels

L. S. Pankratov

The second boundary value problem for the Helmholtz equation in the domains, consisting of the halfspace and the system of random thin channels is considered. The diameters and number of the channels depend on the parameter $\varepsilon > 0$ so that as $\varepsilon \to 0$ their number increases and the diameters tend to zero. It is shown, that as $\varepsilon \to 0$ the boundary value problem solutions coverge by the probability to the nonrandom function, which is the solution of the third boundary value problem for the Helmholtz equation. The coefficient in the uniform boundary condition is calculated in the explicit form by the probabilistic characteristics of the channels.

Асимптотична поведінка рішень другої крайової задачі у областях з випадковими тонкими каналами

Л. С. Панкратов

Розглянуто другу крайову задачу для рівняння Гельмгольця у областях, складених з напівпростору та приєднаною системою випадкових тонких каналів. Діаметри каналів та їх кількість залежать від параметру $\varepsilon > 0$ так, що при $\varepsilon \to 0$ їх кількість зростає, а діаметри наближаються до нуля. Показано, що при $\varepsilon \to 0$ розв'язки задачі по ймовірності збігаються до невипадкової функції, що є розв'язком третьої крайової задачі. Коефіцієнт у однорідній крайовій умові одержано у явному вигляді за допомогою ймовірносних характеристик каналів.