Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т 2, № 1, с. 123-128 УДК 514

Точки раздела и сопряженные точки геодезических в лоренцевых и римановых пространствах

М. А. Улановский

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Рассмотрены точки раздела и сопряженные точки изотропных геодезических лоренцевых пространств с метрикой $dS^2 = dt^2 - dS'^2$.

Понятия "точка раздела" (по другой терминологии — "точка минимума") и "сопряженные точки" изотропных геодезических лоренцевых пространств играют ключевую роль в некоторых вопросах лоренцевой геометрии и общей теории относительности. Как известно, точка раздела геодезического луча, исходящего из некоторой точки O лоренцева V_n, расположена не дальше от точки O, чем первая сопряженная точка. В настоящей работе приведены некоторые утверждения, характеризующие более конкретно положение точек раздела и сопряженных точек изотропных геодезических лоренцевых V_{n+1}. Простая конструкция позволяет перенести эти утверждения на римановы пространства. Все рассматриваемые многообразия и фундаментальные формы предполагаются принадлежащими классу гладкости C^∞.

Существует некоторая связь между свойствами изотропных геодезических лоренцева V_{n+1} и геодезических римановых пространств. Пусть V_n — риманово пространство с фундаментальной формой ds_n^2. Рассмотрим декартово произведение V_n на вещественную ось R: $V_{n+1} = V_n \times R$. Определим на V_{n+1} "метрику" ds_{n+1}^2:

$$ds_{n+1}^2 = dt^2 - ds_n^2$$

($t \in R$). Метрика эта — лоренцева, и данное обстоятельство позволяет всякое общее утверждение, справедливое для изотропных геодезических лоренцева V_n, интерпретировать и для риманова V_n (обратное неверно: лоренцево V_{n+1} с метрикой ds_{n+1}^2 — лишь простейший частный случай в лоренцевой геометрии).

Рассмотрим эту ситуацию несколько подробнее. Пусть O — произвольная точка V_{n+1}, $O = (O_n; r)$, $O_n \in V_n$, $r \in R$, $\gamma(t)$ — луч изотропной геодезической, исходящий из точки O. Предполагая риманово V_n полным, с помощью стандартных рассуждений легко доказать справедливость следующих утверждений.

А) Точка $\gamma(t_0)$ изотропной геодезической $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = O$, $t \geq 0$) тогда и только тогда служит точкой раздела (относительно точки $\gamma(0) = O$), когда проекция этой точки на

V_n служит точкой раздела геодезического луча $np\,\gamma(t)$ (относительно точки $O_n \in V_n$).

Б) Совершенно аналогичное утверждение справедливо для сопряженных точек. В более общей форме: пусть V_{m+n} — декартово произведение псевдоримановых V_m и V_n, с композицией метрик вида

$$ds^2_{m+n} = ds^2_m \pm ds^2_n.$$

Точка геодезического луча $\gamma(t) \subset V_{m+n}$, исходящего из точки $O = (O_m;\, O_n)$, тогда и только тогда сопряжена с точкой $O \in V_{m+n}$, когда сопряжены вдоль соответствующего луча проекции на хотя бы один из множителей V_m, V_n.

По-видимому, во избежание разночтений здесь полезно привести определения точек раздела и сопряженных точек изотропных геодезических хронологически ориентированного лоренцева V_{n+1}. Точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ сопряжены вдоль изотропной геодезической $\gamma(t)$, если на $\gamma(t)$ существует якобиево поле $\xi(t)$, определенное на $[t_1;\, t_2]$, которое нетривиально (не имеет место тождество $\xi(t) \equiv 0 \pmod{\mathring{\gamma}(t)}$), причем $\xi(t_1) \equiv 0 \pmod{\dot\gamma(t_1)}$, $\xi(t_2) \equiv 0 \pmod{\dot\gamma(t_2)}$. Здесь сравнение $\xi \equiv 0 \pmod{\dot\gamma}$ означает, что вектор ξ колинеарен касательному вектору $\dot\gamma$ геодезической $\gamma(t)$. Заметим, что из этого определения легко получить утверждение: точка $\gamma(t_0)$ сопряжена с точкой $\gamma(0) = O$ тогда и только тогда, когда отображение dexp_0 — дифференциал экспоненциального отображения касательного $T_0(V_n)$ — вырождено при $t = t_0$, т.е. ядро $r(t_0)$ линейного отображения dexp_0 нетривиально. Точка $\gamma(t_0)$ служит точкой раздела изотропной геодезической $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = O$, $t \ge 0$) относительно точки O, если t — точная верхняя грань значений t' таких, что точка $\gamma(t')$ не принадлежит открытому множеству $E(O)$ — "хронологическому будущему" точки O.

Отметим также, что термины "сопряженная точка", "точка раздела" можно применять и для геодезического луча $\gamma(t)$ лоренцева V_{n+1}, и для его экспоненциального прообраза — прямолинейного луча (исходящего из векторного нуля) плоского касательного $T_0(V_n)$; это последнее и послужит основным "местом действия" в формулировках теорем.

Теорема 1. *Пусть $x(s)$, $s \in (a;\, b)$ — гладкая ($x(s) \in C^1$) дуга в $T_0(V_n)$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$x(s)$, $s \in (a;\, b)$ принадлежит изотропному полуконусу касательного $T_0(V_n)$, направленному "в будущее", причем $x(s)$ пересекает каждую образующую этого полуконуса не более чем в одной точке;*

2) *каждая точка $x(s)$, $s \in (a;\, b)$ сопряжена с началом O (т.е. $x(s)$ принадлежит множеству сопряженных точек U изотропного полуконуса);*

3) *для каждого $s \in (a;\, b)$ касательный вектор $\dot x(s)$ принадлежит сумме двух подпространств: ядра $r(s)$ отображения dexp_0 и "радиальной прямой" — касательной луча $Ox(s)$;*

4) *для каждого $s \in (a;\, b)$ касательный вектор $\dot x(s)$ не принадлежит ядру $r(s)$.*

Тогда каждая точка $x(s)$, $s \in (a; b)$, будучи сопряженной с началом O вдоль соответствующего луча, не совпадает с точкой раздела этого луча.

З а м е ч а н и е. Условие 4), в частности, выполнено для достаточно малой окрестности точки s_0, если оно выполнено в самой точке $s_0 \in (a; b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно экспоненциальному отображению $\exp_0$: $T_0(V_n) \to V_n$, фундаментальную форму ds^2 можно перенести в плоское $T_0(V_n)$; при этом в сопряженных с началом точках полученная квадратичная форма будет вырождена. Дальнейшие выкладки производятся в определенной таким образом "метрике" на $T_0(V_n)$; $|\xi|$ — модуль вектора ξ, (ξ, η) — скалярное произведение.

Согласно условию 3)

$$\dot{x}(s) = \xi(s) + \eta(s),$$

где $\xi(s)$ — радиальный вектор, $\eta(s) \in r(s)$. Далее

$$|\dot{x}(s)|^2 = |\xi|^2 + 2(\xi, \eta) + |\eta|^2.$$

Согласно условию 1) ξ — изотропный вектор, $|\xi|^2 = 0$. Очевидно, ядро отображения $r(s)$ — нулевое пространство определенной выше квадратичной формы (множество векторов, ортогональных ко всем векторам пространства). Поэтому $|\eta|^2 = (\eta, \eta) = (\eta, \xi) = 0$.

Итак, $|\dot{x}|^2 = 0$, $\mathrm{d}\exp_0 \dot{x}(s)$ — изотропный вектор. В то же время $\dot{x}(s) \notin r(s)$, т.е. $\mathrm{d}\exp_0 \dot{x}(s) \neq 0$. Как легко видеть, из этого следует, что экспонента дуги $\dot{x}(s)$ — $\exp_0 x(s)$ — невырожденная гладкая дуга (отличная от точки). Поскольку V_n хронологически ориентировано, ориентирована и дуга $\exp_0(s)$; для определенности предположим, что росту параметра s соответствует направление в будущее.

Точка $\exp_0(s)$, $s \in (a,b)$ может быть соединена с точкой $O \in V_n$ по крайней мере двумя непространственноподобными ориентированными в будущее (от O к $\exp_0 x(s)$) дугами: изотропной геодезической $(O, \exp_0 x(s))$ и "ломаной", состоящей из двух звеньев: отрезка изотропной геодезической $(O, \exp_0 x(s-\varepsilon))$ и отрезка дуги $(\exp_0 x(s-\varepsilon), \exp_0 x(s))$ (при достаточно малом $\varepsilon > 0$). Можно считать, что ломаная $(O, \exp_0 x(s-\varepsilon), \exp_0 x(s))$ не является отрезком изотропной геодезической (в противном случае достаточно произвольно изменить значение $\varepsilon > 0$). Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно применить следующее утверждение.

Теорема (см., например, [2]). *Если в хронологически ориентированном лоренцевом V_n две точки a и b можно соединить ориентированной (направленной, например, в будущее от a к b) дугой, отличной от отрезка изотропной геодезической, то точки a и b можно соединить и строго упорядоченной временоподобной дугой.*

Из этой теоремы следует, что точка $\exp_0 x(s)$ принадлежит открытому множеству — хронологическому будущему $E(O)$ точки $O \in V_n$; вместе с точкой $\exp_0 x(s)$ множеству

$E(O)$ принадлежит и некоторая окрестность этой точки на геодезической $\exp_0(O,x(s))$, следовательно, $x(s)$ заведомо не совпадает с точкой раздела луча $Ox(s)$.

Рассмотрим теперь интерпретацию теоремы 1 для римановых пространств. Итак, пусть V_n — полное риманово пространство с фундаментальной формой ds_n^2. Образуем, как было описано выше, лоренцево $V_{n+1} = V_n \times R$ с метрикой $ds_{n+1}^2 = dt^2 - ds_n^2$ (ориентированное условием: $dt > 0$ — направление в будущее). Любому геодезическому лучу $\gamma(t) \subset V_n$, $\gamma(0) = O_n$, $t \geq 0$ соответствует единственный изотропный луч $\gamma'(t)$, $\gamma'(0) = (O_n;0)$, проекция которого на V_n совпадает с лучом $\gamma(t)$: луч $\gamma'(t)$ — не что иное, как множество пар $(\gamma(t),t)$, если t — естественный параметр геодезической $\gamma(t)$. Применяя утверждения А), В), легко получим утверждение

Теорема 1′. *Пусть $x(s)$, $s \in (a; b)$ — гладкая дуга в $T_0(V_n)$, $O \in V_n$, удовлетворяющая условиям (V_n — полное риманово пространство):*

1) *дуга $x(s)$ пересекает каждый прямолинейный луч (содержащий в качестве начала векторный ноль 0) не более чем в одной точке;*

2) *каждая точка $x(s)$ сопряжена с началом вдоль содержащего ее луча;*

3) *касательный вектор $\dot{x}(s)$, $s \in (a; b)$ принадлежит минимальному линейному пространству, содержащему ядро $r(s)$ отображения dexp_0 и радиальную прямую;*

4) *для каждого $s \in (a; b)$ касательный вектор $\dot{x}(s)$ не принадлежит ядру $r(s)$.*

Тогда каждая точка $x(s)$ не совпадает с точкой раздела соответствующего луча.

Оставим теперь условия 1) и 2) теоремы 1 (соответственно теоремы 1′), а условия 3) и 4) заменим следующим: в каждой точке $x(s)$ касательный вектор $\dot{x}(s)$ принадлежит ядру $r(s)$. Легко видеть, что в этом случае экспонента дуги $x(s)$ — точка в V_n. Таким образом, лучи $Ox(s)$ касательного $T_0(V_n)$ образуют однопараметрическое семейство лучей, экспоненты которых, исходя из точки $O \in V_n$, сходятся в некоторой общей точке. Очевидно, справедлива

Теорема 2. *Пусть V_n — лоренцево (или риманово) пространство, O — точка V_n и в касательном $T_0(V_n)$ существует открытое множество изотропных лучей (любых лучей, исходящих из векторного нуля), каждый из которых содержит сопряженную точку; пусть U — множество первых сопряженных точек этих лучей. Предположим, что U удовлетворяет условиям:*

1) *U — гладкая поверхность (в римановом случае — гиперповерхность);*

2) *размерность ядра отображения dexp_0 постоянна на U;*

3) *каждая точка $u \in U$ одновременно является точкой раздела соответствующего луча.*

Тогда каждый луч, соединяющий ноль с точкой из U, принадлежит по меньшей мере однопараметрическому семейству лучей, экспоненты которых, исходя из точки $O \in V_n$, сходятся в некоторой общей точке.

З а м е ч а н и е. Термин "открытое множество лучей", разумеется, предполагает естественную топологию лучей изотропного полуконуса — топологию $(n-2)$-сферы ($(n-1)$-сферы в римановом случае).

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. В силу условий 1), 2) каждая точка $u \in U$ принадлежит окрестности, в которой можно определить векторное поле, принадлежащее гладкому распределению — радиальной проекции на U распределения ядер $r(u)$ (радиальное проектирование, как легко видеть, не вырождено на $r(u)$). Если хотя бы в одной точке $x(s)$ (интегральной дуги упомянутого векторного поля) касательный вектор $\dot{x}(s)$ не принадлежал ядру $r(s)$, то в силу теоремы 1 (1′) было бы нарушено условие 3) настоящей теоремы. Следовательно, дуга $x(s)$ и определяет упомянутое в утверждении теоремы семейство лучей.

З а м е ч а н и е. Как известно, в общем случае для точки раздела геодезического луча $\gamma(t)$ риманова V_n можно утверждать только следующее: либо точку раздела можно соединить с началом луча геодезической, отличной от $\gamma(t)$ (геодезический двуугольник), либо эта точка сопряжена с началом луча.

П р и м е р ы. Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 2 (впрочем весьма тривиальные). Прежде всего, это сфера (с любой точкой O в качестве центра). Далее, это декартовы произведения сфер со стандартными метриками: здесь подробно рассмотрим произведение $S'_2 \times S''_2 = V_4$. Ради краткости изложения воспользуемся терминами: южный и северный полюсы сферы S'_2 и S''_2 — A_1, B_1 и A_2, B_2, меридианы — минимальные дуги больших кругов, соединяющих полюсы. Каждая геодезическая $\gamma(t)$, исходящая из точки $O = (A_1; A_2)$, определяется парой меридианов и отношением $k = \mathrm{const}$ их дуг; иначе — 1) парой (B_1, C_2) (т.е. северным полюсом B_1 и собственной частью A_2C_2 какого-то меридиана на S''_2); 2) аналогично — точкой C_1 и северным полюсом B_2; 3) парой меридианов в S'_2 и S''_2. В первом случае каждая геодезическая принадлежит однопараметрическому пучку лучей, сходящихся в фиксированной точке $(B_1; C_2)$, во втором — совершенно аналогично, с общей точкой $(C_1; B_2)$ и в третьем — двухпараметрическому семейству лучей, сходящихся в точке $(B_1; B_2)$.

Для иллюстрации теоремы 1 приведем пример, ранее уже использованный автором с другой целью. Речь идет об односторонне инвариантной метрике:

$$ds^2 = (dz - ydx)^2 - dx^2 - dy^2,$$

заданной на группе

$$x' = x_1 + x_2, \quad y' = y_1 + y_2, \quad z' = z_1 + z_2 + y_2x_1, \quad (x;y;z) \in R \times R \times R.$$

Прямые выкладки (несколько громоздкие) показывают, что изотропный полуконус с вершиной в точке $x = y = z = 0$ содержит замкнутую изотропную дугу l:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = \frac{\pi}{2} + \sin 2t \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Легко видеть, что l — экспоненциальный образ дуги $x(s)$, упомянутой в теореме 1, и удовлетворяющий ее условиям. Из теоремы 1 следует, что точки раздела лучей изотропного полуконуса расположены ближе к точке $O(0;0;0)$, чем точки дуги $x(s)$. И действительно, точка раздела каждого луча совпадает с точкой $O(0;0;0)$, так как хронологическое будущее точки O — все пространство группы (это очевидно хотя бы из факта существования замкнутой дуги l, см. также [3]).

Список литературы

1. *М. А. Улановский*, Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа.— Укр. геометр. сб. (1974), вып. 16, с. 97—118.
2. *М. А. Улановский*, Упорядоченные псевдоримановы пространства.— Укр. геометр. сб. (1970), вып. 9, с. 96—110.
3. *М. А. Улановский*, Однородные лоренцовы пространства II.— Укр. геометр. сб. (1988), вып. 31, с. 25—31.

The cut locus and conjugate points of geodesics in Lorentz and Riemannian spaces

M. A. Ulanovskii

The cut locus and conjugate points of isotropic geodesics in Lorentz spaces has been studied.

Про точки розподілу і спряжені точки геодезичних у лоренцевих та риманових просторах

М. О. Улановський

Розглянуто точки розподілу і спряжені точки ізотропних геодезичних у лоренцевих просторах.