Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 152–167

УДК 517.983.53

О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов второго порядка, не подчиненных условию полноты риманова многообразия

А. Г. Брусенцев

Белгородская Государственная Академия строительных материалов,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

Статья поступила в редакцию 13 мая 1994 года

Для симметрического эллиптического оператора L второго порядка общего вида, действующего в пространстве $L_2(G)$ $(D_L = C_0^2(G)$, G — открытое множество в $R^n)$ получены условия, при которых полуограниченность L влечет его самосопряженность в существенном без предположения полноты G в метрике риманова многообразия, определенной матрицей $A^{-1}(x)$, где $A(x)$ — матрица старших коэффициентов оператора L.

Пусть G — открытое множество в R^n. Через $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ обозначим скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве $L_2(G)$, а через $(\cdot , \cdot)$, $| \cdot |$ — скалярное произведение и норму в унитарном пространстве $E(\dim E < \infty)$. Рассмотрим в пространстве $L_2(G)$ дифференциальный оператор

$$Lu = - \nabla (A(x) \nabla u) + i [\nabla (\mathrm{b}(x)u) + (\nabla u, \mathrm{b}(x))] + q(x)u, \ D_L = C_0^2(G). \tag{1}$$

Здесь $A(x)$ — положительная эрмитова матрица-функция, $\mathrm{b}(x)$ — n-компонентная вектор-функция с вещественными компонентами, $q(x)$ — вещественная функция. Коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $q(x)$ выражения (1) считаются настолько гладкими, чтобы максимальный оператор L^*, порожденный в $L_2(G)$ выражением L, удовлетворял условию

$$D_{L^*} = \{ u: u \in L_2(G) \cap W^2_{2\mathrm{loc}}(G), \ Lu \in L_2(G) \}.$$

Последнее имеет место, например, если

$$a_{ij}(x) \in C^2(G); \ b_j(x) \in C^1(G); \ q(x) \in C(G).$$

При исследовании условий самосопряженности оператора L удобно использовать введенное в [1] понятие полумаксимального оператора. Симметрический оператор T в гильбертовом пространстве H называется полумаксимальным, если для любого $u \in D_{T^*}$ такого, что $\operatorname{Im} \langle T^*u, u \rangle = 0$, найдется последовательность $\{ u_k \}_{k=1}^{\infty}$ элементов D_T такая, что $u_k \to u$ в H и

$$\lim_{k \to \infty} \langle Tu_k, u_k \rangle = \langle T^*u, u \rangle. \tag{2}$$

Как показано в [1] для полумаксимальных операторов полуограниченность влечет за собой самосопряженность в существенном, а всякий максимальный в существенном симметрический оператор полумаксимален.

В настоящей работе получены достаточные условия полумаксимальности оператора L, а также просто условия, гарантирующие самосопряженность L в случае его полуограниченности.

Известная теорема Березанского [2] показывает, что полуограниченность L влечет самосопряженность в существенном, если локальное волновое возмущение, распространение которого в области G описывается уравнением $u''_{tt} + Lu = 0$, не может достигнуть границы области за конечное время. В случае $G = R^n$ это требование изучалось в ряде работ (см., например, [3,4]) и, как показано в [4,5], оно равносильно полноте риманова многообразия R^n с метрикой, определенной матрицей $A^{-1}(x)$. Это условие полноты является типичным для работ о самосопряженности дифференциальных операторов на многообразиях (см., например, [6]), и его нарушение может приводить к потере самосопряженности полуограниченного оператора L в случае $G = R^n$, $b_j(x) = q(x) = 0$ (см. [7, 8]) и даже в случае оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(-\infty, \infty)$ (см. [9], замечание 1). В настоящей работе требований, подобных полноте риманова многообразия, нет, и суть результатов состоит в том, что для произвольной матрицы-функции $A(x)$ старших коэффициентов оператора L найдется непрерывная в G функция $q_A(x)$, для которой из полуограниченности L вытекает полумаксимальность оператора $L + q_A(x)$ (последний может оказаться и неограниченным снизу). Функцию $q_A(x)$ естественно назвать исправляющим потенциалом для $A(x)$ в области G. Физически исправляющий потенциал $q_A(x) \geq 0$ играет роль добавочного потенциального барьера, удерживающего квантовую частицу в пределах области G, когда полуограниченный оператор энергии $L \neq L^*$. Доказанная ниже теорема 2 позволяет получать различные конструкции исправляющих потенциалов как полуограниченных снизу, так и неполуограниченных (следствия 1-4). При этом для построенных ниже в конкретных примерах $q_A(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ функции $(1-\varepsilon)q_A(x)$ исправляющими потенциалами уже не являются.

Идея работы подсказана известной теоремой Вальтера [10], которая при достаточной гладкости оценочных функций является частным случаем наших результатов.

Первым признаком самосопряженности без требования полноты можно считать теорему Г. Вейля [11] для оператора Штурма-Лиувилля, многомерное обобщение которой получено в [12] (а также в [21]). Ряд обобщений теоремы Березанского для операторов с сингулярными коэффициентами в R^n содержатся в обзоре [2]. Условия совпадения расширений Дирихле и Неймана для эллиптического оператора в ограниченной области получены в [13].

1. Обозначим через $\rho(x)$ и $\sigma(x)$ такие функции из $C^2(G)$, что

$$0 \leq \rho(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \partial G, \qquad 0 \leq \sigma(x) \leq \text{const}. \tag{3}$$

Условие (3) на $\rho(x)$ означает, что для любого $N > 0$ найдется такой компакт $K'_N \subset G$, что при $x \in G \setminus K_N$ выполнено неравенство $\rho(x) > N$. Пусть выполнено условие

$$\sigma^2(A\nabla\rho, \nabla\rho) + (A\nabla\sigma, \nabla\sigma) \le C\rho^m e^{2\alpha\rho}, \tag{4}$$

где константы C, $m > 0$, $\alpha \ge 0$. Введем функцию

$$Q_{\alpha,\varepsilon}(x) = (\alpha + \varepsilon)e\,\sigma(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2} + (A\nabla\sigma, \nabla\sigma)^{1/2},$$

где $\alpha \ge 0$, ε — произвольные константы, e — основание натуральных логарифмов.

Пусть также выполнено операторное неравенство ($\varphi \in C_0^2(G)$)

$$\langle L(\sigma\varphi),(\sigma\varphi)\rangle + C_1\|\sigma\varphi\|^2 + C_2\|\varphi\|^2 \ge \|Q_{\alpha,\varepsilon}\varphi\|^2, \tag{5}$$

где константы C_1, $C_2 \ge 0$, $\varepsilon > 0$, а константа α совпадает с одноименной константой в (4). Условия (4) и (5) могут быть удовлетворены для любого оператора L (например, при $\sigma(x) \equiv 0$). Они обеспечивают справедливость следующих априорных оценок для $u(x) \in D_{L^*}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда для каждого* $u \in D_{L^*}$ *сходится интеграл*

$$\int_G \sigma^2(A\nabla\rho, \nabla\rho)\,|u|^2 dx < \infty. \tag{6}$$

Если же при этом в неравенстве (5) *константа* $C_2 = 0$, *то для всякого решения* $u(x)$ *уравнения* $L^*u = -\lambda u$, *с* $\lambda \ge C_1$, *почти всюду в* G

$$\sigma(A\nabla\rho, \nabla\rho)\,|u| = 0. \tag{7}$$

Иные априорные оценки для $u \in D_{L^*}$ содержатся в [14]. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5).

1°. *Если найдется функция* $\mu(x) \in C^2(G)$, $0 \le \mu(x) \to \infty$ *при* $x \to \partial G$, *для которой*

$$\sigma^2(A\nabla\rho, \nabla\rho) \ge (A\nabla\mu, \nabla\mu), \tag{8}$$

то оператор L *полумаксимален, а потому из полуограниченности* L *следует его самосопряженность в существенном.*

2°. *Если в неравенстве* (5) $C_2 = 0$ *и найдется* $\mu(x) \in C^2(G)$, $0 \le \mu(x) \to \infty$ *при* $x \to \partial G$, *для которой*

$$\operatorname{mes}\{x\colon \sigma^2(A\nabla\rho, \nabla\rho) = 0;\ (A\nabla\mu, \nabla\mu) > 0\} = 0, \tag{9}$$

то из полуограниченности L *вытекает его самосопряженность в существенном.*

Прежде чем доказывать теоремы 1 и 2, приведем ряд следствий из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $\eta(x)$, $\rho(x) \ge 0$ — *функции из* $C^2(G)$ *такие, что* $\rho(x) \to \infty$ *при* $x \to \partial G$ *и с константами* C, $m > 0$ *выполнено неравенство*

$$(A\nabla\rho, \nabla\rho) + (A\nabla\eta, \nabla\eta) \le C\rho^m e^{2\eta}. \tag{10}$$

Если при некоторых $K \ge 0$, $\delta > 0$ *и всех* $\varphi \in C_0^2(G)$ *выполнено операторное неравенство*

$$\langle L\varphi, \varphi \rangle + K \|\varphi\|^2 \ge \int\limits_G \left[\delta(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2} + (A\nabla\eta, \nabla\eta)^{1/2}\right]^2 |\varphi|^2 dx,$$

то оператор L самосопряжен в существенном.

Доказательство состоит в проверке условий пункта 2° теоремы с $\sigma(x) = e^{-\eta(x)}$ и одноименным $\rho(x)$. Условие (4) выполнено с $\alpha = 0$. Неравенство (5), очевидно, выполнено с $\varepsilon = \delta/e$, $\alpha = 0$, а условие (9) — с $\mu(x) = \rho(x)$.

Из следствия 1 вытекает более удобное для использования и содержащее результат [10]

Следствие 2. *Пусть функция $0 \le \theta(\tau) \in C^1([0,\infty))$ такова, что $\int\limits_0^\infty \theta(\tau)\,d\tau = \infty$. Если при некоторой константе $K \ge 0$ и всех $\varphi \in C_0^2(G)$ выполнено неравенство*

$$\langle L\varphi, \varphi \rangle + K \|\varphi\|^2 \ge \int\limits_G (1 + \theta(\eta))^2 (A\nabla\eta, \nabla\eta)\, |\varphi|^2\, dx$$

с некоторой функцией $\eta(x) \in C^2(G)$, $0 \le \eta(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$, такой, что при константах $C, m > 0$

$$(A\nabla\eta, \nabla\eta) \le C \left(\int\limits_0^{\eta(x)} \theta(\tau)\, d\tau \right)^m e^{2\eta}, \tag{11}$$

то оператор L самосопряжен в существенном.

Доказательство состоит в проверке условий следствия 1 при

$$\rho(x) = \int\limits_0^{\eta(x)} \theta(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 1. *Если оператор $T = L + p^2(x)$, где $p(x) \in C^2(G)$, самосопряжен в существенном и для некоторого $N \ge 0$ и всех $\varphi \in C_0^2(G)$*

$$\langle L(p\varphi), p\varphi \rangle - \int\limits_G (A\nabla p, \nabla p)\, |\varphi|^2\, dx \ge -\frac{1}{2} \|L\varphi\|^2 - N \|\varphi\|^2,$$

то оператор L также самосопряжен в существенном.

Доказательство. Для $\varphi \in C_0^2(G)$ справедливо тождество

$$\langle L(p\varphi), p\varphi \rangle = \int\limits_G (A\nabla p, \nabla p)\, |\varphi|^2\, dx + \operatorname{Re} \langle p^2\varphi, L\varphi \rangle.$$

Поэтому при наших условиях

$$2\mathrm{Re}\,\langle p^2\varphi, L\varphi\rangle \geq -\|L\varphi\|^2 - 2N\|\varphi\|^2.$$

Следовательно

$$\|T\varphi\|^2 + 2N\|\varphi\|^2 = \|L\varphi\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle p^2\varphi, L\varphi\rangle + 2N\|\varphi\|^2 + \|p^2\varphi\|^2 \geq \|p^2\varphi\|^2,$$

то есть оператор умножения на $-p^2(x)$ T-ограничен с T-гранью 1. Поэтому (см. [15], гл. 5, § 4.2) $L = T - p^2$ самосопряжен в существенном.

Следствие 3. *Если при некотором $K \geq 0$ и всех $\varphi \in C_0^2(G)$ выполнено неравенство*

$$\langle L\varphi, \varphi\rangle + K\|\varphi\|^2 \geq \int\limits_G (A\nabla\eta, \nabla\eta)\,|\varphi|^2 dx$$

с функцией $\eta(x) \in C^2(G)$, $0 < \eta(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$, такой, что при $C > 0$

$$(A\nabla\eta, \nabla\eta) \leq Ce^{2\eta}, \tag{12}$$

то оператор L самосопряжен в существенном.

Доказательство. При условии (12) выполнено (11) с $\theta(\tau) = \delta > 0$. Из следствия 2 вытекает самосопряженность в существенном оператора $T\varphi = L\varphi + K\varphi + \varepsilon\, e^{2\eta}\varphi$ с произвольным $\varepsilon > 0$. Применим к оператору $L + K$ лемму 1 с $p^2(x) = \varepsilon\, e^{2\eta}$. При наших условиях

$$\varepsilon\,\langle (L+K)(e^{\eta}\varphi), e^{\eta}\varphi\rangle - \varepsilon\int\limits_G (A\nabla\eta, \nabla\eta)\,|e^{\eta}\varphi|^2\,dx \geq 0,$$

поэтому оператор $L + K$, а значит, и L самосопряжены в существенном. Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Пусть $r(\tau) \geq \delta > 0$ такая функция из $C^2([0,\infty))$, что $r'(\tau) = o(r^2(\tau))$ при $\tau \to \infty$, а функция $\mu(x) \in C^2(G)$ такова, что $0 \leq \mu(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$. Пусть при $x \in G$ выполнено неравенство*

$$(A\nabla\mu, \nabla\mu) \leq C\left(\int\limits_0^{\mu(x)} r(\tau)\,d\tau\right)^m \exp\left(2\int\limits_0^{\mu(x)} r(\tau)\,d\tau\right) \tag{13}$$

с константами C, $m > 0$. Если при некоторых K, $k \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\varphi \in C_0^2(G)$ выполнено операторное неравенство

$$\langle L\varphi, \varphi\rangle + k\|\varphi\|^2 \geq \int\limits_G r^2(\mu)\left[(e^2+\varepsilon)(A\nabla\mu, \nabla\mu) - K\right]|\varphi|^2 dx, \tag{14}$$

то оператор L полумаксимален.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий теоремы 2 с

$$\rho(x) = \int\limits_0^{\mu(x)} r(\tau)\, d\tau, \ \ \sigma(x) = |r(\mu(x))|^{-1}.$$

Оценим при этих $\rho(x)$ и $\sigma(x)$ функцию $Q_{\alpha,\varepsilon_1}(x)$ с $\alpha = 1$, $\varepsilon_1 > 0$:

$$Q^2_{\alpha,\varepsilon_1}(x) = \left[(1+\varepsilon_1)\,\mathrm{e}\,(A\nabla\mu,\nabla\mu)^{1/2} + \frac{|r'_\mu(\mu)|}{(r(\mu))^2}(A\nabla\mu,\nabla\mu)^{1/2}\right]^2 \le$$

$$\le (\mathrm{e}^2 + \varepsilon)(A\nabla\mu,\nabla\mu) + C_\varepsilon\,.$$

Последнее неравенство справедливо при любом $\varepsilon > (2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)\,\mathrm{e}^2$. Согласно неравенству (14)

$$\langle L(\sigma\varphi),\sigma\varphi\rangle + k\,\|\sigma\varphi\|^2 \ge \int\limits_G \left[(\mathrm{e}^2+\varepsilon)(A\nabla\mu,\nabla\mu) - K\right] |\varphi|^2 dx \ge$$

$$\ge \|Q_{\alpha,\varepsilon_1}\varphi\|^2 - C_\varepsilon\,\|\varphi\|^2 - K\|\varphi\|^2.$$

Таким образом, выполнено неравенство (5) с $C_1 = k$ и $C_2 = K + C_\varepsilon$. Неравенство (4) вытекает из условия (13). Поскольку здесь

$$\sigma^2(A\nabla\rho,\nabla\rho) = (A\nabla\mu,\nabla\mu),$$

то выполнены все условия пункта 1° теоремы. Следствие 4 доказано.

Отметим, что следствие 4 описывает исправляющие потенциалы, которые могут быть неограниченными снизу.

З а м е ч а н и е 1. *Следствия 1-4 дают конструкции исправляющего потенциала $q_A(x)$ для $A(x)$, удовлетворяющей одному из условий (10)-(13). Эти условия надлежащим выбором оценочных функций можно удовлетворить для любой непрерывной матрицы-функции $A(x) > 0$.*

Построим, например, функцию $\eta(x)$, для которой выполнено (12). Пусть $\nu(x) \in C^2(G)$ — произвольная функция, такая, что $0 < \nu(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$. В качестве $\nu(x)$ можно взять функцию $(\Delta(x))^{-1} + \delta_0^2(x)$, где $\delta_0(x)$ — расстояние точки x от фиксированной точки $x_0 \in G$, а $\Delta(x)$ — регуляризованное расстояние точки x от замкнутого множества $R^n \setminus G$ (см. [16], с. 203). Функция

$$R_1^2(\tau) = \sup_{x\in G^\tau}(A\nabla\nu,\nabla\nu),$$

где $G^\tau = \{x\colon \nu(x) < \tau\}$, является неубывающей, причем можно считать, что $R_1(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$. В противном случае (12) выполнено с $\eta(x) = \nu(x)$. Найдется функция $R(\tau) \in C^\infty([0,\infty))$ такая, что $R(\tau) \ge R_1(\tau) + 1$ и $|R'(\tau)| \le \mathrm{const}\, R^2(\tau)$. Положим

$$\eta(x) = 2 \ln R(\nu(x)).$$

Тогда

$$(A\nabla\eta, \nabla\eta) \le CR^2(\nu)\,(A\nabla\nu, \nabla\nu) \le CR^4(\nu) = Ce^{2\eta},$$

что и доказывает (12).

2. Рассмотрим оператор

$$Mu = -\nabla(A(x)\,\nabla u) + q(x)u, \qquad D_M = C_0^2(G), \tag{15}$$

с симметрической (вещественной) матрицей-функцией $A(x)$.

Справедливо следующее обобщение на многомерный случай неравенства Харди ([17], § 9.8).

Лемма 2. *Пусть $A(x)$ — симметрическая неотрицательная матрица-функция размера $n\times n$ определенная и непрерывная в области $G \subsetneq R^n$, а $\mathrm{f}(x)$ — вектор-функция с n вещественными компонентами из $C^1(G)$, причем $\nabla\, \mathrm{f} \ge 0$. Если при $x \in G$ выполнено неравенство*

$$(\nabla\, \mathrm{f}(x))(A(x)h,h) \ge |\,(\mathrm{f}(x),h)\,|^2 \tag{16}$$

при любом $h \in E^n$, то для всякой функции $\varphi \in C_0^1(G)$

$$\int_G (A\,\nabla\varphi, \nabla\varphi)\,dx \ge \frac{1}{4}\int_G (\nabla\mathrm{f})\,|\,\varphi\,|^2\,dx. \tag{17}$$

Доказательство. Покажем сначала, что из (16) следует неравенство (17) для вещественных функций $\varphi \in C_0^1(G)$.

$$\int_G (\nabla\mathrm{f})\,\varphi^2\,dx = -\int_G (\mathrm{f}, \nabla\varphi^2)\,dx \le \int_G |\,(\mathrm{f}, \nabla\varphi^2)\,|\,dx \le$$

$$\le \int_G (A\,\nabla\varphi^2, \nabla\varphi^2)^{1/2}(\nabla\,\mathrm{f})^{1/2}\,dx = 2\int_G (A\,\nabla\varphi, \nabla\varphi)^{1/2}\,|\,\varphi\,|\,(\nabla\,\mathrm{f})^{1/2}\,dx \le$$

$$\le 2\left(\int_G (A\,\nabla\varphi, \nabla\varphi)dx\right)^{1/2}\left(\int_G (\nabla\mathrm{f})\,|\,\varphi\,|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Здесь последовательно использовано условие (16) и неравенство Буняковского. Из полученного неравенства следует (17).

Если $\varphi(x)$ — комплекснозначная функция, т.е. $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, то в силу симметричности матрицы A

$$(A\,\nabla\varphi, \nabla\varphi) = (A\,\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) + (A\,\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_2),$$

откуда становится очевидным справедливость неравенства (17) для всякой функции $\varphi \in C_0^1(G)$. Лемма 2 доказана.

Иное многомерное обобщение неравенства Харди содержится в [18].

Лемма 3. *Если потенциал* $q(x)$ *оператора* M (15) *удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \geq q_A(x) - \frac{1}{4} \nabla \mathrm{f}(x),$$

где $q_A(x)$ — *некоторый исправляющий потенциал для матрицы* $A(x)$ *в области* G, *а вектор-функция* $\mathrm{f}(x) \in C^1(G)$ *удовлетворяет условию* (16), *то оператор* M *полумаксимален. Если, кроме того,*

$$q_A(x) \geq \mathrm{const},$$

то оператор M *самосопряжен в существенном.*

Доказательство. В силу леммы 2 оператор $M - q_A(x)$ неотрицателен, откуда получаем полумаксимальность M. Поскольку

$$\langle M\varphi, \varphi \rangle \geq \langle q_A \varphi, \varphi \rangle,$$

в случае $q_A(x) \geq \mathrm{const}$ оператор M самосопряжен в существенном.

В качестве примера рассмотрим оператор

$$Su = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_j^{2k_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(x)u, \quad D_S = C_0^2(G),$$

где область $G = \{ x;\ x_j > 0,\ j = \overline{1,n} \}$, числа $k_j > 1$, $(j = \overline{1,n})$.

Следствие 5. *Если потенциал* $q(x)$ *оператора* S *удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \left(-k_j + \frac{3}{4} \right) x_j^{2k_j - 2} - K \tag{18}$$

с некоторым $K \geq 0$, *то оператор* S *самосопряжен в существенном.*

Доказательство. Здесь $A(x) = \mathrm{diag}\left\{ x_1^{2k_1}, x_2^{2k_2}, \ldots, x_n^{2k_n} \right\}$. В качестве $\mathrm{f}(x)$ выберем вектор-функцию с компонентами

$$f_j(x) = (2k_j - 1) x_j^{2k_j - 1}.$$

Условие (16) выполнено. Действительно,

$$\nabla \mathrm{f} = \sum_{j=1}^{n} (2k_j - 1)^2 x_j^{2k_j - 2}; \qquad |(\mathrm{f},h)|^2 = \left| \sum_{j=1}^{n} (2k_j - 1) x_j^{k_j - 1} x_j^{k_j} \bar{h}_j \right|^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} (2k_j - 1)^2 x_j^{2k_j - 2} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k_j} |h_j|^2 \right) = (\nabla \mathrm{f})(Ah,h).$$

Согласно следствию 3 в качестве исправляющего потенциала можно взять $q_A(x) = (A \nabla\eta, \eta) - K$, где $\eta(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$ и удовлетворяет условию (12). Рассмотрим функцию

$$\eta_1(x) = \sum_{j=1}^{n} (k_j - 1) \mid \ln x_j \mid + 1,$$

которая имеет разрывные частные производные. Положим

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{n} (k_j - 1) \int_1^{x_j} \theta(t) \frac{d}{dt} \mid \ln t \mid dt + 1,$$

где $\theta(t)$ — достаточно гладкая функция, такая, что $0 \le \theta(t) \le 1, \theta(1) = 0, \theta(t) = 1$ при t, лежащем вне окрестности точки $t = 1$. Определенная так $\eta(x)$ достаточно гладкая, и $\eta_1(x) \le \eta(x) + \mathrm{const}$; $(A\,\nabla\eta, \nabla\eta) \le (A\,\nabla\eta_1, \nabla\eta_1)$. Условие (12) будет выполнено для функции $\eta(x)$, если оно выполнено для $\eta_1(x)$. Далее,

$$(A\,\nabla\eta_1, \nabla\eta_1) = \sum_{j=1}^{n} (k_j - 1)^2 x_j^{2k_j - 2}, \qquad e^{2\eta_1} = e^2 \prod_{j=1}^{n} x_j^{(2k_j - 2)\operatorname{sign}(x_j - 1)}.$$

Нетрудно видеть, что $(A\,\nabla\eta_1, \nabla\eta_1) \le ne^2 \max\limits_j (k_j - 1)^2 e^{2\eta_1}$. Тем самым условие (12) для $\eta(x)$ выполнено. Таким образом,

$$q_A(x) - \frac{1}{4}\nabla f(x) = (A\,\nabla\eta, \nabla\eta) - \frac{1}{4}\nabla f - K \le$$

$$\le (A\,\nabla\eta_1, \nabla\eta_1) - \frac{1}{4}\nabla f - K = \sum_{j=1}^{n} (-k_j + \frac{3}{4})\, x_j^{2k_j - 2} - K.$$

Из (18) и леммы 3 заключаем, что S самосопряжен в существенном. Следствие 5 доказано.

Отметим, что константы $-k_j + \frac{3}{4}$ в следствии 5 не могут быть уменьшены. В случае $n = 1$ это следует из того, что уравнение

$$-(x^{2k}u')' + \gamma x^{2k-2}u = 0$$

при $k > 1, \gamma < \frac{3}{4} - k$ имеет два решения из $L_2([1,\infty))$. Поэтому оператор

$$Su = -(x^{2k}u')' + \gamma x^{2k-2}u, \;\; D_S = C_0^2([0,\infty))$$

имеет в $L_2([0,\infty))$ индексы дефекта $(1,1)$.

О точности следствия 3 можно судить и на примере оператора Шредингера

$$H = -\Delta + q(x), \;\; D_H = C_0^2(G).$$

Следствие 6. *Если потенциал $q(x)$ оператора H удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \ge \frac{|\nabla\rho|^2}{(1+\rho)^2} - \left(\frac{1}{4}\nabla f + K\right),$$

где константа $K \geq 0$, *функция* $\rho(x) \in C^2(G)$, $0 < \rho(x) \to \infty$ *при* $x \to \partial G$, *такова, что* $|\nabla\rho| \leq \text{const}\cdot\rho^2$; $\mathbf{f}(x)$ *— векторное поле с компонентами из* $C^1(G)$, *удовлетворяющее условию* $\nabla\mathbf{f} \geq |\mathbf{f}|^2$, *то оператор* H *самосопряжен в существенном.*

Доказательство. Здесь A — единичная матрица. Полагая $\eta(x) = \ln(1+\rho)$, нетрудно проверить, что условия следствия 3 выполнены и в качестве $q_A(x)$ можно взять функцию $|\nabla\rho|^2/(1+\rho)^2 - K$. Из леммы 3 вытекает самосопряженность $\overline{H}$. Следствие 6 доказано.

В случае $G = R^n \setminus \{0\}$, полагая $\rho(x) = |x|^{-1}$ при малых $|x|$ и $\rho(x) = |x|$ при больших $|x|$, а также $\mathbf{f}(x) = (n-2)\dfrac{\mathbf{x}}{|x|^2}$, из следствия 6 получаем для достаточно гладких потенциалов $q(x)$ теорему X.30 из [19, с. 210]. Фигурирующая в этой теореме константа

$$-n(n-4)/4$$

неуменьшаема. Для ограниченной области G в качестве $\rho(x)$ можно взять $[\Delta(x)]^{-1}$, где $\Delta(x)$ — регуляризованное расстояние точки x от границы области G. Отметим, что следствие 6 содержит полностью теорему [20, с. 522].

3. Для доказательства теоремы 1 понадобятся две леммы.

Лемма 4. *Пусть* $f(\tau)$ *заданная при* $\tau \in [0,\infty)$ *функция, удовлетворяющая неравенствам*

$$0 \leq f(\tau) \leq C\tau^l(\ln\tau)^m$$

с константами C, l, $m \geq 0$. *Тогда для любых чисел* $r > 1$, $\delta > 0$ *найдется такая последовательность точек* $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\tau_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *для которой выполнено неравенство*

$$f(\tau_k) \leq r^l(1+\delta)f\left(\frac{\tau_k}{r}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Предположив противное, то есть что при некоторых $r_0 > 1$, $\delta_0 > 0$ и при всех $\tau \geq \tau_0 > 0$

$$f(\tau) > r_0^l(1+\delta_0)f\left(\frac{\tau}{r_0}\right).$$

Тогда для последовательности $\tau_k' = \tau_0 r_0^k$ будем иметь неравенство

$$f(\tau_0 r_0^k) > r_0^{kl}(1+\delta_0)^k f(\tau_0).$$

Из условия леммы получаем неравенство

$$C\tau_0^l r_0^{kl}(\ln\tau_0 + k\ln r_0)^m > r_0^{kl}(1+\delta_0)^k f(\tau_0),$$

которое невозможно при достаточно больших k, если $f(\tau_0) \neq 0$. В случае, когда существуют сколь угодно большие τ_0, такие, что $f(\tau_0) \neq 0$, получаем противоречие, и утверждение леммы справедливо. В противном случае оно очевидно. Лемма 4 доказана.

Введем функцию

$$\psi_\gamma(x,\tau) = \left[1 - \left(\frac{e^{\rho(x)}}{\tau}\right)^\gamma\right]_+ . \tag{20}$$

Носитель этой функции определяется значением параметра $\tau > 0$, γ — произвольная положительная константа. Рассмотрим интеграл

$$J_\gamma(\tau) = \int\limits_{\Omega^\tau} \left[\gamma\,\sigma\,(A\nabla\rho,\nabla\rho)^{1/2} + \psi_\gamma(A\nabla\sigma,\nabla\sigma)^{1/2}\right]^2 |\,u\,|^2 dx, \tag{21}$$

где $\Omega^\tau = \{\, x : e^{\rho(x)} < \tau \,\}$, $u(x) \in L_2(G)$.

Лемма 5. *Если выполнено условие (4), то для любых $u(x) \in L_2(G)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$, $0 < \tau_k \to \infty$ и число $\gamma > 0$ такие, что*

$$J_\gamma(\tau_k) \le \| Q_{\alpha,\varepsilon}(x)\,\psi_\gamma(x,\tau_k) u(x) \|^2.$$

Доказательство. Интеграл $J_\gamma(\tau)$ можно представить в виде

$$J_\gamma(\tau) = \int\limits_{\Omega^\tau} (A\nabla\sigma,\nabla\sigma)\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^\tau} \left[2\gamma\,\sigma\,\psi_\gamma\,(A\nabla\sigma,\nabla\sigma)^{1/2}(A\nabla\rho,\nabla\rho)^{1/2} + \gamma^2\sigma^2(A\nabla\rho,\nabla\rho)\right] |\,u\,|^2\, dx = J_1(\tau) + J_2(\tau).$$

В силу условия (4) имеем

$$J_2(\tau) \le C \int\limits_{\Omega^t} \left[\sigma^2(A\nabla\rho,\nabla\rho) + (A\nabla\sigma,\nabla\sigma)\right] |\,u\,|^2 dx \le C_u\,\tau^{2\alpha}(\ln\tau)^m.$$

Согласно лемме 4 для произвольных $r > 1$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ найдется последовательность $\{\tau_k\}$, для которой будет справедливо неравенство

$$J_2(\tau_k) \le r^{2\alpha}(1+\delta)\,J_2\left(\frac{\tau_k}{r}\right) =$$

$$= r^{2\alpha}(1+\delta)\int\limits_{\Omega^{\tau_k/r}} \left[2\gamma\,\sigma\,\psi_\gamma\left(x,\frac{\tau_k}{r}\right)(A\nabla\sigma,\nabla\sigma)^{1/2}(A\nabla\rho,\nabla\rho)^{1/2} + \gamma^2\sigma^2(A\nabla\rho,\nabla\rho)\right] |\,u\,|^2 dx. \tag{22}$$

При $x \in \Omega^{\tau_k/r}$ имеем

$$\psi_\gamma\left(x,\frac{\tau_k}{r}\right) = \left[1 - \frac{r^\gamma e^{\gamma\rho}}{\tau_k^\gamma}\right]_+ \le \left(1 - \frac{e^{\gamma\rho}}{\tau_k^\gamma}\right) = \psi_\gamma(x,\tau_k). \tag{23}$$

Кроме того, поскольку при $x \in \Omega^{\tau_k/r}$ $e^{\gamma\rho} \le \left(\frac{\tau_k}{r}\right)^{\gamma}$, получаем

$$\psi_\gamma(x, \tau_k) = \left[1 - \frac{e^{\gamma\rho}}{\tau_k^\gamma}\right]_+ \ge \frac{r^\gamma - 1}{r^\gamma}. \tag{24}$$

Из (22) — (24) следует неравенство

$$J_2(\tau_k) \le r^{2\alpha}(1+\delta)\int\limits_{\Omega^{\tau_k/r}} \psi_\gamma^2(x,\tau_k)\left[2\gamma\sigma\frac{r^\gamma}{r^\gamma - 1}(A\nabla\sigma, \nabla\sigma)^{1/2}(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \gamma^2\sigma^2\frac{r^{2\gamma}}{(r^\gamma - 1)^2}(A\nabla\rho, \nabla\rho)\right] | u |^2 dx,$$

из которого с учетом того, что $\Omega^{\tau_k/r} \subset \Omega^{\tau_k}$, получаем

$$J_\gamma(\tau_k) = J_1(\tau_k) + J_2(\tau_k) \le \int\limits_{\Omega^{\tau_k}} \psi_\gamma^2(x,\tau_k)\left[\frac{\gamma r^{\gamma+\alpha}(1+\delta)}{r^\gamma - 1}\sigma(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + (A\nabla\sigma, \nabla\sigma)^{1/2}\right]^2 | u |^2 dx.$$

При фиксированном $\gamma > 0$ найдем минимум функции $\beta(r) = \gamma\, r^{\gamma+\alpha}/(r^\gamma - 1)$. Очевидно, $\beta_{\min} = \alpha\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1+\frac{\alpha}{\gamma}}$ при $\alpha > 0$ и $\beta_{\min} = \gamma$ при $\alpha = 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $r > 1$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ такие, что

$$\frac{\gamma r^{\gamma+\alpha}(1+\delta)}{r^\gamma - 1} \le (\alpha + \varepsilon)e.$$

Для этих фиксированных r, δ, γ существует последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой выполнено неравенство

$$J_\gamma(\tau_k) \le \int\limits_{\Omega^{\tau_k}} Q_{\alpha,\varepsilon}^2(x)\,\psi_\gamma^2(x,\tau_k)\, | u(x) |^2 dx,$$

что и требовалось доказать. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u \in D_{L^*}$. Нетрудно проверить, что для всякой вещественной функции $\psi \in C_0^2(G)$ справедливо равенство

$$\langle L(\psi u), \psi u \rangle = \int\limits_G (A\nabla\psi, \nabla\psi) | u |^2 dx + \mathrm{Re}\int\limits_G \psi^2 (Lu)\bar{u}\, dx. \tag{25}$$

Поскольку $\sigma\cdot\psi \in C_0^2(G)$, то в силу неравенства (5) получим

$$\int\limits_G (A\nabla(\sigma\psi), \nabla(\sigma\psi)) | u |^2 dx + \mathrm{Re}\int\limits_G \sigma^2\psi^2(Lu)\,\bar{u}\, dx +$$

$$+ C_1 \|\sigma\cdot\psi\cdot u\|^2 + C_2 \|\psi\cdot u\|^2 \geq \int_G Q^2_{\alpha,\varepsilon}(x)\,|\,\psi u\,|^2 dx. \qquad (26)$$

Последнее неравенство справедливо для всякой функции $\psi \in C(G)$, имеющей компактный носитель в G и удовлетворяющей условию Липшица. В этом нетрудно убедиться, производя аппроксимацию такой функции функциями из $C^2_0(G)$. Положим в неравенстве (26) $\psi = \psi_\gamma(x,\tau)$, где $\psi_\gamma(x,\tau)$ определена в (20).

При $x \in \Omega^\tau = \{\, x\colon \exp\rho(x) < \tau \,\}$ имеем

$$(A\nabla(\sigma\psi_\gamma), \nabla(\sigma\psi_\gamma)) = (A\nabla\sigma, \nabla\sigma)\,\psi_\gamma^2 + \gamma^2\sigma^2\tau^{-2\gamma}\,e^{2\gamma\rho}\,(A\nabla\rho, \nabla\rho) -$$

$$- 2\,\psi_\gamma\,\gamma\,\sigma\,\tau^{-\gamma}\,e^{\gamma\rho}\,\mathrm{Re}\,(A\nabla\sigma, \nabla\rho).$$

При $x \in \Omega^\tau$ $e^{\gamma\rho}\tau^{-\gamma} \leq 1$. Кроме того,

$$\left|\,\mathrm{Re}\,(A\nabla\sigma, \nabla\rho)\,\right| \leq (A\nabla\sigma, \nabla\sigma)^{1/2}\,(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2}.$$

Поэтому

$$(A\nabla(\sigma\psi_\gamma), \nabla(\sigma\psi_\gamma)) \leq \left[\psi_\gamma\,(A\nabla\sigma, \nabla\sigma)^{1/2} + \gamma\sigma\,(A\nabla\rho, \nabla\rho)^{1/2}\right]^2.$$

Отсюда и из неравенства (26) получим неравенство ($J_\gamma(\tau)$ определено в (21))

$$J_\gamma(\tau) + \mathrm{Re}\int_{\Omega^\tau} \sigma^2\psi_\gamma^2(Lu)\,\bar{u}\,dx + C_1 \|\sigma\psi_\gamma u\|^2 + C_2\|\psi_\gamma u\|^2 \geq$$

$$\geq \int_{\Omega^\tau} \psi_\gamma^2\, Q^2_{\alpha,\varepsilon}(x)\,|\,u\,|^2 dx.$$

В силу леммы 5 для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется последовательность $\{\,\tau_k\,\}$ и число $\gamma > 0$, для которых выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega^{\tau_k}} \sigma^2\psi_\gamma^2(Lu)\,\bar{u}\,dx + C_1 \|\sigma\psi_\gamma u\|^2 + C_2\|\psi_\gamma u\|^2 + \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon_1}(x)\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon}(x)\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx. \qquad (27)$$

Поскольку $\psi_\gamma \leq 1$, $\sigma \leq \mathrm{const}$, то при некотором $C > 0$

$$C + \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon_1}(x)\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx \geq \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon}(x)\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx.$$

При $\varepsilon_1 < \varepsilon$ отсюда следует, что для всякого $u \in D_{L^*}$ сходится интеграл (6).

В случае $C_2 = 0$ из (27) следует, что при $\lambda \geq C_1$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega^{\tau_k}} \sigma^2\psi_\gamma^2(Lu + \lambda u)\,\bar{u}\,dx + \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon_1}\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx \geq \int_{\Omega^{\tau_k}} Q^2_{\alpha,\varepsilon}\,\psi_\gamma^2\,|\,u\,|^2 dx.$$

Если $u(x)$ является решением уравнения $L^*u = -\lambda u$, то из последнего неравенства при $\varepsilon_1 < \varepsilon$ получим справедливость равенства (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства полумаксимальности оператора L при условиях 1° достаточно доказать, что для всякого $u \in D_{L^*}$ найдется последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in D_{\overline{L}}$ такая, что $u_k \to u$ в $L_2(G)$ и

$$\langle Lu_k, u_k \rangle \to \operatorname{Re} \langle Lu, u \rangle. \tag{28}$$

Очевидно,

$$u_k = \left(1 - \frac{\mu(x)}{k}\right)_+^4 u(x) \in D_{\overline{L}}.$$

В силу тождества (25) с $\psi = \left(1 - \frac{\mu(x)}{k}\right)_+^4$ получим равенство

$$\langle Lu_k, u_k \rangle - \operatorname{Re} \int\limits_{G^k} \left(1 - \frac{\mu(x)}{k}\right)^8 (Lu) \cdot \overline{u}\, dx =$$

$$= \frac{16}{k^2} \int\limits_{G^k} \left(1 - \frac{\mu(x)}{k}\right)^6 (A\nabla\mu, \nabla\mu) \mid u \mid^2 dx, \tag{29}$$

где $G^k = \{ x: \mu(x) < k \}$. В силу теоремы 1 и условия (8) для $u \in D_{L^*}$ конечен интеграл

$$\int\limits_G (A\nabla\mu, \nabla\mu) \mid u \mid^2 dx < \infty. \tag{30}$$

Отсюда и из (29) следует, что при $k \to \infty$ имеет место (28), то есть выполнено (2) и оператор L полумаксимален. Пункт 1° доказан.

Предположим, что при условиях 2° оператор L полуограничен. В силу теоремы 1 и условия (9) справедливо равенство

$$(A\nabla\mu, \nabla\mu) \mid u \mid^2 = 0 \tag{31}$$

для каждого решения $u(x) \in L_2(G)$ уравнения $L^*u + \lambda u = 0$ с $\lambda \geq C_1$. Выберем настолько большое $\lambda \geq C_1$, чтобы было выполнено неравенство $\langle L\varphi + \lambda\varphi, \varphi \rangle \geq \|\varphi\|^2$ для всех $\varphi \in D_{\overline{L}}$. Предположим, что оператор L несамосопряжен в существенном. Тогда существует $u(x) \not\equiv 0$, $u \in D_{L^*}$ такая, что $Lu + \lambda u = 0$. Рассмотрим теперь последовательность

$$\varphi_k = \left(1 - \frac{\mu(x)}{k}\right)_+^4 u(x)$$

элементов из $D_{\overline{L}}$ и равенство (29) с $u_k = \varphi_k$ для дифференциального выражения $L + \lambda$. В силу (31) получим $\langle L\varphi_k + \lambda\varphi_k, \varphi_k \rangle = 0 \geq \|\varphi_k\|^2$. Таким образом, $u(x) \equiv 0$, что противоречит несамосопряженности оператора L. Теорема 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. *Если существует функция $\mu(x) \in C^2(G)$ такая, что $0 \le \mu(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$, для которой $(A\nabla\mu, \nabla\mu) \le const$ при $x \in G$, то оператор L' полумаксимален без дополнительных условий.*

Действительно, полумаксимальность является следствием условия (30), которое здесь выполнено автоматически. Отметим, что R^n полно в метрике рассмотренного выше риманова многообразия при условиях замечания 2.

Автор выражает благодарность Ф. С. Рофе-Бекетову за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

1. *А. Г. Брусенцев*, О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов высших порядков.— Дифференц. уравнения (1985), т. 21, № 4, с. 668–677.
2. *Ю. М. Березанский, В. Г. Самойленко*, Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения.— Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 5, с. 3–56.
3. *Ю. Б. Орочко*, О свойстве глобальной конечной скорости распространения эллиптического дифференциального выражения второго порядка.— Дифференц. уравнения (1982), т. 18, № 10, с. 1764–1772.
4. *Ф. С. Рофе-Бекетов*, Необходимые и достаточные условия конечной скорости распространения для эллиптических операторов.— Укр. мат. журн. (1985), т. 37, № 5, с. 668–670.
5. *А. А. Чумак*, Самосопряженность оператора Бельтрами–Лапласа на полном паракомпактном римановом многообразии без края.— Укр. мат. журн. (1973), т. 25, № 6, с. 784–791.
6. *И. М. Олейник*, О существенной самосопряженности оператора Шредингера на полных римановых многообразиях.— Мат. заметки (1993), т. 54, № 3, с. 89–97.
7. *Н. Н. Уральцева*, О самосопряженности в $L_2(R^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами.— Зап. науч. семинаров, ЛОМИ АН СССР (1969), т. 149, с. 288–294.
8. *С. А. Лаптев*, О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле.— Дифференц. уравнения (1971), т. 7, № 4, с. 727–736.
9. *А. Г. Брусенцев, Ф. С. Рофе-Бекетов*, Условия самосопряженности сильно-эллиптических систем произвольного порядка.— Мат. сб. (1974), т. 95(137), № 1(9), с. 108–129.
10. *J. Walter*, Note on a paper by Stetkaer-Hansen concerning essential selfadjointness of Schroedinger operators.— Math. Scand. (1969), № 25, p. 94–96.
11. *H. Weyl*, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktion.— Göttinger Nachrichten (1909), s. 37–64.
12. *Ф. С. Рофе-Бекетов*, Замечание в связи с многомерным обобщением теоремы Г. Вейля о самосопряженности.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), вып. 52, с. 88–90.
13. *М. О. Отелбаев*, Критерий совпадения расширений эллиптического оператора, соответствующих задачам Дирихле и Неймана.— Мат. заметки (1981), т. 29, № 6, с. 867–875.
14. *Ф. С. Рофе-Бекетов*, Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем R^n. I. Второй порядок.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1990), вып. 54, с. 3–16.
15. *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов. Мир, Москва (1972), 740 с.
16. *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва (1973), 342 с.
17. *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литлвуд, Г. Полиа*, Неравенства. Иностр. лит., Москва (1948), 456 с.
18. *H. Kalf*, On the characterization of the Friedrichs extension of ordinary or elliptic differential operators with a strongly singular potential.— J. Funct. Anal. (1972), № 10, p. 230–250.
19. *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Мир, Москва (1978), т. 2, 395 с.
20. *Х. Трибель*, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, Москва (1980), 664 с.
21. *A. Devinatz*, Essential self-adjointness of Schrödinger-type operators.— J. Funct. Anal. (1977), vol. 25, № 1, p. 58–69.

On essential self-adjointness of semi-bounded elliptic second order operators without requirement of completeness of the Riemannian manifold

A. G. Brusentsev

Conditions have been obtained for the general type symmetric elliptic second-order operator L in the space $L_2(G)$ ($D_L = C_0^2(G)$, G is an open set in R^n) at which semi-boundedness involves its essential self-adjointness without assumption of completeness of G in the Riemannian manifold metric, which is specified by the matrix $A^{-1}(x)$, where $A(x)$ is a matrix of higher-order coefficients of the operator L.

Про самоспряженість в істотному півобмежених еліптичних операторів другого порядку, не підпорядкованих умові повноти рімановoго многовиду

О. Г. Бруссінцев

Для симетричного еліптичного оператору L другого порядку загального виду, діючого в просторі $L_2(G)$ ($D_L = C_0^2(G)$, G — відкрита множина в R^n) одержані умови, при яких півообмеженість L тягне його самоспряженість в істотному без припущення повноти G у метриці рімановoго моновиду, визначеної матрицею $A^{-1}(x)$, де $A(x)$ – матриця старших коефіцієнтів оператору L.