Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 168–176

УДК 533.72

Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер

В. Д. Гордевский

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 13 апреля 1994 года

Для трехмерного нелинейного уравнения Больцмана в случае простого газа из твердых сфер построено бимодальное распределение в виде пространственно-неоднородной линейной комбинации двух максвеллианов, отвечающих разным массовым скоростям, но одинаковым плотностям и температурам, которое обеспечивает произвольную малость невязки между левой и правой частями уравнения в интегральной норме при низких температурах и больших числах Кнудсена и в то же время не является малым отклонением от равновесного распределения.

Эволюция простого (однокомпонентного) достаточно разреженного газа описывается нелинейным интегро-дифференциальным кинетическим уравнением Больцмана [1]. Значительный интерес представляет поиск точных решений этого уравнения. Хорошо известно такое решение в виде максвеллиана (максвелловского распределения, глобального и локального) [2]. В течение последних десятилетий для частного случая максвелловских молекул, а также для некоторых его обобщений ряду авторов удалось сконструировать некоторые новые точные решения (решение Бобылева-Крука-Ву, плоский сдвиговый поток, автомодельный разлет и т. п.) [3-10]. Однако для других моделей взаимодействия между молекулами, в частности, для твердых сфер, до сих пор не найдено ни одного точного решения, отличного от максвеллиана (дискретные модели уравнения Больцмана здесь не рассматриваем), и единственным методом аппроксимации истинного решения в нелинейном случае остаются разложения Гильберта или Чепмена-Энскога [11].

Целью настоящей работы является построение функций, отличных от максвелловских и приближенно удовлетворяющих уравнению Больцмана с любой наперед заданной точностью в L_1-норме при низких температурах и больших числах Кнудсена. Точная постановка задачи такова.

Рассмотрим трехмерное нелинейное уравнение Больцмана для твердых сфер

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$= \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha\, \left[f(t, v', x)\, f(t, v_1', x) - f(t, v, x) f(t, v_1, x) \right] \left| (v - v_1, \alpha) \right|, \qquad (1)$$

или коротко

$$D(f) = Q(f, f), \qquad (2)$$

где $t \in R^1$ — время, $x \in R^3$ — координата частицы, $v, v_1 \in R^3$ — скорости частиц до соприкосновения, а v', v_1' — после столкновения; $f(t, v, x)$ — искомая функция распределения частиц, $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla_x f$ — ее пространственный градиент; d — диаметр частиц;

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha);\ v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{3}$$

$\alpha \in \Sigma$, Σ — единичная сфера в R^3.

Будем искать аппроксимацию истинного решения уравнения (1) в виде пространственно-неоднородной линейной комбинации двух максвеллианов, отвечающих одинаковым температурам, но различным массовым скоростям (для удобства одна из массовых скоростей просто полагается равной 0), т.е. бимодального распределения

$$f(t, v, x) = \varphi(t, x)M(v) + [1 - \varphi(t, x)]M_0(v), \tag{4}$$

где

$$\varphi(t,x) = \left[1 + e^{\beta(x^1 - Dt)}\right]^{-1}, \tag{5}$$

β, D — произвольные параметры; x^1 — первая компонента вектора $x = (x^1, x^2, x^3)$;

$$M(v) = \left(\frac{c}{\pi}\right)^{3/2} e^{-cv^2}; \qquad M_0(v) = \left(\frac{c}{\pi}\right)^{3/2} e^{-c(v - v_0)^2}, \tag{6}$$

$c = \frac{1}{2T}$ — обратная температура газа. Очевидно, что при стремлении t или x^1 к $\pm\infty$ распределение (4) стремится к одному из максвеллианов (6), т.е. газ переходит в состояние равновесия.

Сразу же заметим, что распределение вида (4), (5) напоминает известное распределение Мотт–Смита [1] (И.Е. Тамм предложил его на несколько лет раньше), однако принципиальная разница между ними (это относится и к модификациям Холвея, Солвена, Грэда и др.) состоит в том, что массовая скорость v_0 в (6) не параллельна оси x^1, а произвольна (из дальнейшего видно, что ее, наоборот, удобно выбрать перпендикулярной к x^1). Другими словами, функция (4)-(6) описывает не ударную волну, направленную вдоль оси x^1, а совершенно иное течение газа, которое удобно назвать "заворачивающим потоком".

Определение 1. *Обозначим через L пространство функций $g(t, v, x)$ с нормой*

$$\|g\|_L = \sup_{(x,t) \in R^3 \times R^1} \int_{R^3} |g(t, v, x)|\, dv.$$

Определение 2. *Пусть $g_1(t, v, x, c)$, $g_2(t, v, x, c) \in L$; c — параметр. Будем писать $g_1 \underset{L}{\overset{c \to \infty}{\propto}} g_2$ (или просто $g_1 \propto g_2$), если*

$$\lim_{c \to +\infty} \|g_1 - g_2\|_L = 0.$$

Это же обозначение сохраним и для числовых функций от c, если их пределы при $c \to +\infty$ совпадают. Очевидно, что если $h \in L$ и $g_1 \propto g_2$, то $\| g_1 - h \|_L \propto \| g_2 - h \|_L$.

Задача состоит в исследовании поведения невязки

$$\Delta = \| D(f) - Q(f, f) \|_L , \tag{7}$$

где f — взято в виде (4)-(6), в зависимости от поведения параметров.

Прежде всего вычислим $D(f)$ и $Q(f, f)$. Подставляя (4)-(6) в левую и правую части (1), с учетом (3) получим

$$D(f) = -\varphi^2 e^{\beta(x^1 - Dt)} \beta(v^1 - D)(M - M_0).$$

Здесь v^1 — первая компонента скорости $v = (v^1, v^2, v^3)$;

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \varphi (1 - \varphi) \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \; |(v - v_1, \alpha)| \times$$

$$\times \left[M(v') M_0(v_1') + M_0(v') M(v_1') - M(v) M_0(v_1) - M_0(v) M(v_1) \right],$$

ибо члены, содержащие φ^2 и $(1 - \varphi)^2$, обращаются в 0 ввиду свойств максвеллианов.

Учитывая, что $\varphi (1 - \varphi) = \varphi^2 e^{\beta (x^1 - Dt)}$, имеем

$$D(f) - Q(f, f) = \varphi^2 e^{\beta (x^1 - Dt)} \left\{ \beta(v^1 - D)(M_0 - M) - \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \; |(v - v_1, \alpha)| \times \right.$$

$$\left. \times \left[M(v') M_0(v_1') + M_0(v') M(v_1') - M(v) M_0(v_1) - M_0(v) M(v_1) \right] \right\}.$$

Однако, как легко видеть, $\forall \beta, D, x^1, t$ величина $\varphi^2 e^{\beta(x^1 - Dt)}$ лежит между 0 и $\frac{1}{4}$, поэтому (7) принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{4} \int\limits_{R^3} dv \; |\beta (v^1 - D)(M_0 - M) - G(M, M_0) - G(M_0, M) + ML(M_0) + M_0 L(M)|, \tag{8}$$

где введены стандартные обозначения для "прибыточных" (G) и "затратных" (L) частей оператора столкновений $Q(f, f)$. Очевидно,

$$4\Delta \le I_1 + I_2 , \tag{9}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{R^3} dv \; \left| \beta (v^1 - D) M_0 - G(M, M_0) + M_0 L(M) \right|,$$

$$I_2 = \int\limits_{R^3} dv \; \left| \beta (v^1 - D) M + G(M_0, M) + ML(M_0) \right|. \tag{10}$$

Нас интересует, можно ли сделать I_1 и I_2 (а вместе с тем и Δ) сколь угодно малыми за счет выбора параметров $c > 0$, $v_0 \neq 0$ ($v_0 \in R^3$), $d^2 > 0$, D, β.

Прежде всего найдем низкотемпературную асимптотику величин I_1 и I_2 (т.е. предел при $c \to +\infty$) при фиксированных и произвольных значениях других параметров.

Теорема. *При любых фиксированных* v_0, d^2, D, β *существуют пределы:*

$$\lim_{c \to +\infty} I_1 = |(v_0^1 - D)\beta + \pi d^2 |v_0||| + \pi d^2 |v_0|,$$
$$\lim_{c \to +\infty} I_2 = \left| D\beta + \pi d^2 |v_0| \right| + \pi d^2 |v_0|, \tag{11}$$

где $|v_0|$ *— длина вектора* v_0.

Доказательство. Докажем, например, второе из равенств (11). Учитывая (10), вычислим отдельно $L(M_0)$, а затем и $G(M_0, M)$. Очевидно,

$$L(M_0) = \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw_1 \left| v - v_0 - \frac{w_1}{\sqrt{c}} \right| e^{-w_1^2} \tag{12}$$

(замена $w_1 = \sqrt{c}\,(v_1 - v_0)$; интегрирование по углам α тривиально).

Прибыточный член G для бимодальных распределений был вычислен в работах [12,13]. Для частного случая равных температур он имеет вид

$$G(M_0, M) = \frac{\pi^2 d^2}{2c^2 R} \left(\frac{c}{\pi}\right)^3 e^{-cv^2 - c(v - v_0)^2} \left[\Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q + R\right) - \Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q - R\right) \right], \tag{13}$$

где $\Phi(a,b,z)$ — конфлюэнтная (вырожденная) гипергеометрическая функция Куммера (у нас $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$), а величины Q и R таковы:

$$Q = \frac{1}{2} c(v^2 + (v - v_0)^2), \qquad R = c\sqrt{\frac{1}{4}(v^2 - (v - v_0)^2)^2 + |v \times (v - v_0)|^2}\,.$$

Величины Q, R, $Q + R$ и $Q - R$ в данном случае легко упрощаются:

$$Q = c\left[\left(v - \frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{v_0^2}{4}\right]; \qquad R = c|v_0| \cdot \left|v - \frac{v_0}{2}\right|,$$
$$Q + R = c\left(\left|v - \frac{v_0}{2}\right| + \frac{|v_0|}{2}\right)^2, \qquad Q - R = c\left(\left|v - \frac{v_0}{2}\right| - \frac{|v_0|}{2}\right)^2. \tag{14}$$

Далее, из (12) легко видеть, что (с учетом ограниченности M в пространстве L):

$$M\,L(M_0) \propto M\frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw_1 \left| v - v_0 \right| e^{-w_1^2} = M\pi d^2 \left| v - v_0 \right| \propto M\pi d^2 \left| v_0 \right|, \tag{15}$$

ибо при $c \to +\infty$ максвеллиан $M(v)$ ведет себя δ-образно, а $\left| v - v_0 \right|$ играет роль основной функции.

По тем же причинам имеем

$$\beta(v^1 - D)M \propto -D\beta M. \tag{16}$$

Значит (см. определение 2), из (10) и (13)-(16) имеем

$$I_2 \propto \int_{R^3} M(v)\,dv \cdot \left| B + \frac{\sqrt{\pi}\,d^2}{2\,|v_0|\,\left|v - \frac{v_0}{2}\right|\,c^{3/2}}\,e^{-c(v-v_0)^2} \times \right. \tag{17}$$

$$\left. \times \left[\Phi\left(1, \frac{1}{2}, c\left(\left| v - \frac{v_0}{2}\right| + \frac{|v_0|}{2}\right)^2\right) - \Phi\left(1, \frac{1}{2}, c\left(\left| v - \frac{v_0}{2}\right| - \frac{|v_0|}{2}\right)^2\right)\right]\right|,$$

где введено обозначение

$$B = -D\beta - \pi d^2 |v_0|. \tag{18}$$

Нетрудно показать, что выражение, содержащее $\Phi\left(1, \frac{1}{2}, c\left(\left| v - \frac{v_0}{2}\right| - \frac{|v_0|}{2}\right)^2\right)$, стремится к 0 при $c \to +\infty$ в смысле пространства L. Действительно, для функции $\Phi\left(1, \frac{1}{2}, z\right)$ справедлива асимптотика [14]: при $z > 1$

$$\Phi\left(1, \frac{1}{2}, z\right) = \sqrt{\pi z}\,e^z + O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{19}$$

а при $z \in [0,1]$ $\Phi\left(1, \frac{1}{2}, z\right)$ — ограничена.

Поэтому, если разбить интеграл по всему R^3 на сумму интегралов по $S(c)$ и $R^3 \setminus S(c)$, где $S(c)$ — шаровой слой:

$$S(c) = \left\{ u \in R^3 :\ c\left[|u| - \frac{|v_0|}{2}\right]^2 \le 1 \right\},$$

то оба они будут стремиться к 0 при $c \to +\infty$: один в силу малости объема $S(c)$ при больших c и ограниченности подынтегральной функции, другой — после замены функции Φ ее асимптотикой (19) — легко оценивается по методу Лапласа после перехода к сферической системе координат.

Итак, в (17) остается лишь $\Phi\left(1, \frac{1}{2}, c\left(\left| v - \frac{v_0}{2}\right| + \frac{|v_0|}{2}\right)^2\right)$; однако аргумент этой функции, очевидно, ограничен снизу, т.е. при больших c можно сразу во всем пространстве использовать асимптотику (19), причем $O\left(\frac{1}{z}\right)$ легко отбрасывается при больших c. Таким образом, мы доказали, что

$$I_2 \propto \int\limits_{R^3} M(v)\,dv \cdot \left| B + \frac{\sqrt{\pi}\,d^2}{2\,|v_0|\,\left|v - \frac{v_0}{2}\right| c^{3/2}}\, e^{-c(v-v_0)^2}\sqrt{\pi c}\ \times \right.$$
$$\left. \times \left(\left|v - \frac{v_0}{2}\right| + \frac{|v_0|}{2}\right) e^{c\left(\left|v-\frac{v_0}{2}\right| + \frac{|v_0|}{2}\right)^2} \right|. \tag{20}$$

Произведя последовательно несколько замен переменных в (20) (сначала переход к сферической системе с центром в точке $\frac{1}{2}v_0$ и осью z, направленной вдоль v_0: $\sqrt{c}\,(v - \frac{v_0}{2}) = r\,|v_0| \cdot (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$, затем $\sin\psi + 1 = s$), получим

$$I_2 \propto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^2 ds \int\limits_0^{+\infty} r^2\,dr\, e^{-\left(r - \sqrt{c}\frac{|v_0|}{2}\right)^2} \cdot \left| B\,e^{-sr|v_0|\sqrt{c}} + \frac{\pi d^2}{2|v_0|\,rc}\left(r + \frac{|v_0|\sqrt{c}}{2}\right)\right|.$$

Легко видеть, что $re^{-\left(r-\sqrt{c}\frac{|v_0|}{2}\right)^2} \propto \frac{|v_0|\sqrt{c}}{2}\, e^{-\left(r-\sqrt{c}\frac{|v_0|}{2}\right)^2}$, значит:

$$I_2 \propto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^2 ds \int\limits_0^{+\infty} r^2\,dr\, e^{-\left(r - \sqrt{c}\frac{|v_0|}{2}\right)^2} \cdot \left| B\,e^{-rs|v_0|\sqrt{c}} + \frac{\pi d^2}{2r\sqrt{c}}\right|. \tag{21}$$

Далее возможны два случая. Если $B \geq 0$, то модуль можно убрать и интеграл распадается на сумму двух, каждый из которых вычисляется явно (возможность перестановки интегрирования по r и s обосновывается тривиально), после чего легко находятся их пределы при $c \to +\infty$

$$\lim_{c \to +\infty} I_2 = B + \pi d^2\,|v_0|. \tag{22}$$

Если же $B < 0$, то в (21) модуль раскрывается по-разному в разных частях полосы интегрирования Π

$$\Pi = \{(r,s) \in R^2 :\ r \geq 0,\ 0 \leq s \leq 2\}.$$

Множество Π распадается на объединение двух: $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$, уравнение общей границы которых легко находится и имеет вид

$$s = \mu(r) = -\frac{1}{r\,|v_0|\sqrt{c}} \ln\left(-\frac{\pi d^2}{2rB\sqrt{c}}\right).$$

Кривая $s = \mu(r)$ пересекает границу области Π в точке $r_0 = -\dfrac{\pi d^2}{2B\sqrt{c}}$ и имеет единственный максимум при $r_{max} = -\dfrac{\pi d^2 e}{2B\sqrt{c}}$ величиной $s_{max} = -\dfrac{2B}{\pi d^2 e\,|v_0|}$. Заметим, что r_0 и r_{max} зависят от c и стремятся к 0 при $c \to +\infty$, а s_{max} не зависит от c, причем

$s_{\max}$ может быть как меньше, так и больше, чем 2. В обоих случаях удается, используя выражение для $\mu(r)$, явно вычислить двойные интегралы по Π_+ и Π_- отдельно, после чего можно найти их пределы при $c \to +\infty$, учитывая, что $r_0 \to 0$:

$$\lim_{c \to +\infty} \int\!\!\int_{\Pi_-} = -B, \quad \lim_{c \to +\infty} \int\!\!\int_{\Pi_+} = \pi d^2 |v_0|. \tag{23}$$

Поскольку в (22) $B \geq 0$, а в (23) $B < 0$, то при любом B имеем

$$\lim_{c \to +\infty} I_2 = |B| + \pi d^2 |v_0|. \tag{24}$$

С учетом (18) это означает, что теорема доказана. Из (11) вытекает такое очевидное следствие.

Следствие. *Для того чтобы величина невязки Δ стремилась к 0, достаточно, чтобы $c \to +\infty$ и выполнялось хотя бы одно из следующих условий*:

1. $v_0 \to 0$; $D \to 0$;
2. $v_0 \to 0$; $\beta \to 0$;
3. $\beta \to 0$; $d^2 \to 0$;
4. $D \to 0$; $v_0^1 \to 0$; $d^2 \to 0$.

Легко видеть, что варианты 1-3 тривиальны, ибо при $v_0 \to 0$ само распределение f стремится к максвеллиану, а при $\beta \to 0$ исчезает зависимость от x и t (однородный стационарный случай, который хорошо исследован). Вариант же 4 нетривиален. Дело в том, что при этом перпендикулярная составляющая массовой скорости $(v_0^2; v_0^3)$ не стремится к 0 и, вообще говоря, произвольна (стремление D к 0 не является серьезным ограничением). При этом распределение f не стремится к максвеллиану, т.е. бимодальная функция (4) не описывает малое отклонение от состояния равновесия. По-видимому, этот случай можно трактовать как приближенное описание "заворачивающего потока" при околосвободномолекулярном течении газа (малое d^2, т.е. большие числа Кнудсена) и низких температурах ($c \to +\infty$).

Замечание 1. Во всех случаях при $c \to +\infty$ левая и правая части уравнения Больцмана ($D(f)$ и $Q(f, f)$), равно как и само распределение f, не имеют предела в пространстве L, а лишь в слабом смысле (в пространстве обобщенных функций), в то время как величины I_1 и I_2, в силу доказанной теоремы, имеют конечный предел. Не требуя бесконечной малости Δ, т.е. зафиксировав все другие параметры, кроме c, мы можем добиться наименьшего значения невязки, наложив ограничения:

$$(v_0^1 - D)\beta + \pi d^2 |v_0| = 0,; \qquad D\beta + \pi d^2 |v_0| = 0, \tag{25}$$

что дает

$$\Delta \leq \frac{\pi}{2} d^2 |v_0|.$$

Легко видеть, что соотношения (25) непротиворечивы и выполняются, если

$$v_0^1 = 2D; \qquad \beta = -\frac{1}{D}\pi d^2 \mid v_0 \mid, \tag{26}$$

т.е. "фазовая скорость волны" D равна половине v_0^1. (Физический смысл второго из условий (26) не столь ясен).

З а м е ч а н и е 2. Мы рассматривали повторный предел (сначала $c \to +\infty$, затем $D, v_0^1, d^2 \to 0$). Изменение порядка предельного перехода в случаях 1-3 следствия также приводит к тривиальным ситуациям. Если же при конечном c устремить к нулю D, v_0^1, d^2, то $Q(f,f)$ устремится к 0 (кнудсеновский газ), а $D(f)$ — нет (значит, и Δ не стремится при этом к 0). Таким образом, в данном случае существенным является порядок, в котором производится предельный переход.

З а м е ч а н и е 3. При $c \to +\infty$ в смысле обобщенных функций распределение f стремится к линейной комбинации δ-функций

$$f(t,v,x) \to \varphi(t,x)\,\delta(v) + [1 - \varphi(t,x)]\delta(v - v_0). \tag{27}$$

Однако даже в слабом смысле распределение (27) не есть точное решение уравнения Больцмана. Подстановка (27) в (1) приводит к появлению невязки, зависящей от основной функции и стремящейся к нулю в тех же случаях, которые описаны в следствии из теоремы. Регулируя поведение параметров, можно повысить порядок малости этой невязки по отношению к бесконечно малой $\mid v_0 \mid$ (в случаях 1 и 2).

З а м е ч а н и е 4. Теорема и следствие дают лишь достаточные условия малости невязки Δ. Вопрос о существовании предела самой невязки при $c \to +\infty$ пока открыт. Кроме того, представляет интерес изучение поведения распределения типа (4) в более общем случае, когда температуры и плотности в максвеллианах M и M_0 различны. Эти и другие вопросы будут рассмотрены отдельно.

Список литературы

1. *К. Черчиньяни*, Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир, Москва (1978), 495 с.
2. *Т. Карлеман*, Математические задачи кинетической теории газов. Изд-во иностр. лит., Москва (1960), 118 с.
3. *А. В. Бобылев*, О точных решениях уравнения Больцмана.— Докл. АН СССР (1975), т. 225, № 6, с. 1296–1299.
4. *А. В. Бобылев*, Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана.— Докл. АН СССР (1976), т. 231, № 3, с. 571–574.
5. *M. Krook and T. T. Wu*, Exact solution of the Boltzmann Equation.— Phys. Fluids (1977), v. 20, N 10 (1), pp. 1589–1595.
6. *А. А. Никольский*, Простейшие точные решения уравнения Больцмана для движений разреженного газа.— Докл. АН СССР (1963), т. 151, № 2, с. 299–302.
7. *T. Ikenberry, C. Truesdoll*, On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory, I, II.— J. Ration Mech. and Anal. (1956), v. 5, N 1, pp. 1–129.
8. *В. С. Галкин*, Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. — Прикл. мат. и мех. (1956), т. 20, № 3, с. 445–446.
9. *Д. Я. Петрина, А. В. Мищенко*, О точных решениях одного класса уравнений Больцмана. — Докл. АН СССР (1988), т. 298, № 2, с. 338–342.
10. *А. В. Мищенко, Д. Я. Петрина*, О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана.— Теорет. и мат. физика (1988), т. 77, № 1, с. 135–153.
11. *С. Чепмен, Т. Каулинг*, Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., Москва (1960), 510 с.

12. *S. M. Deshpande, R. Narasimha*, The Bolzmann collision integrals for a combination of Maxwellians.— J. Fluid Mech. (1969), v. 36, N 3, pp. 545–554.
13. *R. Narasimha, S. M Deshpande*, Minimum error solutions of the Bolzmann equation for shock structure.— J. Fluid Mech. (1969), v. 36, N 3, pp. 555–570.
14. *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*, Специальные функции. Наука, Москва (1964), 344 с.

An approximate bimodal solution of the nonlinear Boltzmann equation for hard spheres

V. D. Gordevsky

For the three-dimensional nonlinear Boltzmann equation in the case of a simple gas of hard spheres the bimodal distribution is built as spatially-nonhomogeneous linear combination of two Maxwellians with different mass velocities but equal temperatures and densities. This distribution ensures that the difference between the left and the right sides of the equation is arbitrary small in the sense of integral norm if the temperature is satisfactory low and the Knudsen number is large. Nevertheless, it is not a small deviation from the equilibrium distribution.

Наближений бімодальний розв'язок нелінійного рівняння Больцмана для твердих куль

В. Д. Гордевський

Для тривимірного нелінійного рівняння Больцмана у випадку простого газу з твердих куль побудовано бімодальний розподіл у вигляді просторово-неоднорідної лінійної комбінації з двох максвелліанів, що відповідають різним масовим швидкостям, але однаковим густинам та температурам, котрий забезпечує довільну мализну нев'язки між лівою та правою частинами рівняння в інтегральній нормі при низьких температурах і великих числах Кнудсена і в той же час не є малим відхиленням від рівноважного розподілу.