Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 177–193

УДК 517.535.4

Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. Часть 2

А. Ф. Гришин

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 12 октября 1993 года

Предлагается критерий существования системы кругов линейной плотности нуль, вне которой данная субгармоническая в верхней полуплоскости функция конечного порядка будет асимптотически непрерывна.

В этой части работы будет рассмотрен вопрос об асимптотической непрерывности вне исключительных множеств субгармонических функций конечного порядка в верхней полуплоскости *.

Теорема 22. *Пусть λ — конечная мера в плоскости, сосредоточенная в полукольце $\{ z : 1 \le |z| \le R, \ \operatorname{Im} z \ge 0 \}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество F, являющееся объединением счетного числа кругов с суммой радиусов, не превышающей ε, такое, что функция*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\int K(z, \zeta) \, d\lambda(\zeta)$$

будет равномерно непрерывной на множестве $\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus F$. Эта теорема доказана в [1].

Теорема 23. *Пусть $v(z) \in SHF(\rho(r))$,*

$$v(z,h) = \frac{1}{V(r)} \left(v(z + hz) - v(z) \right).$$

Пусть существует C_0-множество F_1 такое, что

$$\lim v(z,h) = 0 \ \ (h \to 0, \ z \to \infty, \ z, \ z + hz \overline{\in} F_1 \ ).$$

Тогда существует C_0-множество F такое, что $v(z,h) \rightrightarrows 0$ $(h \to 0, z, z + hz \overline{\in} F)$.

Доказательство. Пусть λ — полная мера функции $v(z)$,

$$K_n = \{ \zeta : 2^{n-1} < |\zeta| < 2^{n+2}, \ \operatorname{Im} \zeta \ge 0 \},$$

---

* И в 1-й, и во 2-й частях работы использована единая нумерация формул и теорем.

$$w_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{K_n} K(z, \zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

По теореме 22 существует множество кругов с как угодной малой суммой радиусов, вне которого функция $w_n(z)$ равномерно непрерывна. Тогда существует множество кругов с конечной суммой радиусов, вне которого каждая из функций $w_n(z)$ равномерно непрерывна. Обозначим это множество F_2. Пусть $F = F_1 \cup F_2 \cup C(0,3)$. Покажем, что F — искомое множество. Пусть ε — произвольное строго положительное число. По условию теоремы существуют числа $\beta(\varepsilon) > 0$ и $R(\varepsilon) > 0$ такие, что при $|h| < \beta(\varepsilon)$, $r > R(\varepsilon)$, $z, z + hz \overline{\in} F$ будет выполняться неравенство $|v(z,h)| < \varepsilon$. Пусть число n_0 таково, что $2^{n_0 - 1} > R(\varepsilon)$. Пусть $r = |z| \in (2^n, 2^{n+1}]$. Согласно теореме 10,

$$v(z,h) = u_n(z,h) + \frac{1}{V(r)}(w_n(z + hz) - w_n(z)),$$

где $|u_n(z,h)| \le M|h|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $V(r) \ge 1$. По построению множества F функция $w_n(z)$ равномерно непрерывна вне множества F. Поэтому найдется число $\delta_n(\varepsilon)$ такое, что при $|h| < \delta_n(\varepsilon)$, $z, z + hz \overline{\in} F$ будут выполняться неравенства $M|h| < \varepsilon/2$, $\left| w_n(z + hz) - w_n(z) \right| < \varepsilon$. Тогда, если

$$\delta(\varepsilon) = \min(\beta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_{n_0}(\varepsilon)),$$

то при $z, z + hz \overline{\in} F$, $|h| < \delta(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $|v(z,h)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Доказательство следующих двух теорем представлено в [1].

Теорема 24. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $v(t)$ — функция на вещественной оси такая, что*

$$\frac{v(t + ht) - v(t)}{V(|t|)} \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0, \quad h \text{ — вещественное},$$

$$P(z,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{t - z} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2}, \quad z = x + iy,$$

$$v_1(z,h) = \frac{1}{V(r)} \int_{\frac{3}{4}r}^{\frac{5}{4}r} \left(P(z + hz,t) - P(z,t)\right) v(\pm t)\, dt.$$

Тогда $v_1(z,h) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0$, h — комплексное, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im}(z + hz) > 0$.

Теорема 25. *Пусть $v(z) \in SHF(\rho(r))$, λ — полная мера функции $v(z)$. Пусть мера $|\lambda|$ имеет минимальный тип относительно уточненного порядка $\rho(r) + 1$. Тогда существует C_0-множество F такое, что при z, $z + hz \overline{\in} F$ функция $v(z,h)$ равномерно стремится к нулю при $h \to 0$.*

Пусть μ — положительная мера в C, $A(r)$ и $\varphi(\alpha)$ непрерывные строго возрастающие функции при $r \in [0, \infty)$, $\alpha \in [0,1]$, причем $A(0) \geq 1$, $\varphi(0) = 0$. Исключительным множеством F для меры μ, построенным с помощью функций $A(r)$ и $\varphi(\alpha)$ называется множество $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых существует $\alpha \in (0,1]$ такое, что

$$\mu(B(z, \alpha r)) \geq A(r)\, \varphi(\alpha).$$

Пусть $\eta(r)$ — непрерывная строго убывающая функция, причем $\lim\limits_{r \to \infty} \eta(r) = 0$.

Следуя [2], можно доказать такую теорему.

Теорема 26. *Пусть μ — положительная мера формального порядка $\rho(r)$. Пусть F — исключительное множество для меры μ, построенное с помощью функций $A(r) = \dfrac{V(r)}{\eta(r)}$ и $\varphi(\alpha) = \alpha$. Тогда F есть C_0-множество.*

В следующей теореме устанавливается связь между двумя функциями, играющими важную роль при изучении асимптотической непрерывности субгармонической в $\mathbb{C}_+$ функции $v(z)$. Если функция $\Psi(z, \delta)$ более тесно связана с функцией $v(z)$, то функция $\Psi_1(\theta, \delta)$ — более простая по сравнению с функцией $\Psi(z, \delta)$. Аналогичные функции ранее рассматривал М. Л. Содин [3].

Теорема 27. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = \lim\limits_{r \to \infty} \rho(r) > 0$. Пусть λ — положительная мера формального порядка $\rho(r)$, носитель которой расположен в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. Пусть*

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_0^{\delta} \frac{\lambda(B(z, tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt, \qquad z = re^{i\theta},$$

$$\Psi_1(\theta, \delta) = \lim_{\eta \to +0}\ \overline{\lim_{r \to \infty}}\ \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_{\eta}^{\delta} \frac{\lambda(B(z, tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt.$$

Для того, чтобы функция $\Psi_1(\theta, \delta)$ равномерно относительно $\theta \in (0, \pi)$ стремилась к нулю при $\delta \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало C_0-множество F такое, что

$$\lim \Psi(z, \delta) = 0 \quad (\delta \to 0, \quad z \to \infty, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \overline{\in} F).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть F — C_0-множество и пусть $\Psi(z, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $z \to \infty$, $z \overline{\in} F$. Тогда для любого $\eta > 0$ найдется число $R = R(\eta)$ такое, что при $r \geq R$ в каждом интервале $((1 - \eta) re^{i\theta}, (1 + \eta) re^{i\theta})$ найдется точка w такая, что $w \overline{\in} F$, $\dfrac{V(|w|)}{V(r)} \leq \dfrac{5}{4}$. Далее имеем

$$\frac{\sin\theta}{V(r)}\int\limits_{8\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt \le \frac{\sin\theta}{V(r)}\int\limits_{8\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(w,(t+4\eta)\mid w\mid))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt =$$

$$=\frac{V(\mid w\mid)}{V(r)}\,\frac{\sin\theta}{V(\mid w\mid)}\int\limits_{8\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(w,(t+4\eta)\mid w\mid))}{(t+4\eta)(t+4\eta+\sin\theta)^2}\,\frac{(t+4\eta)(t+4\eta+\sin\theta)^2}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt \le$$

$$\le 5\,\frac{\sin\theta}{V(\mid w\mid)}\int\limits_{8\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(w,(t+4\eta)\mid w\mid))}{(t+4\eta)(t+4\eta+\sin\theta)^2}\,dt = 5\,\frac{\sin\theta}{V(\mid w\mid)}\int\limits_{12\eta}^{\delta+4\eta}\frac{\lambda\,(B(w,u\mid w\mid))}{u\,(u+\sin\theta)^2}\,du \le$$

$$\le 5\,\frac{\sin\theta}{V(\mid w\mid)}\int\limits_{0}^{\delta+4\eta}\frac{\lambda\,(B(w,u\mid w\mid))}{u\,(u+\sin\theta)^2}\,du.$$

Так как $w\,\overline{\in}\,F$, то из полученного неравенства следует, что равномерно относительно $\theta\in(0,\pi)$ функция $\Psi_1\,(\theta,\delta)$ стремится к нулю при $\delta\to 0$. Достаточность доказана.

Н е о б х о д и м о с т ь. Эта более трудная часть теоремы доказывается в несколько этапов.

Первый этап. Пусть

$$\Delta(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\lambda([0,r,0,\theta])}{V(r)}\,,$$

где

$$[R_1,R_2,\varphi_1,\varphi_2]=\{\,z:\ R_1\le\mid z\mid\le R_2,\ \varphi_1\le\arg z\le\varphi_2\,\}.$$

Покажем, что из условия $\Psi_1\,(\theta,\delta)\underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} 0$ следует равенство $\lim\limits_{\theta\to+0}\Delta(\theta)=0$. Имеем

$$\sin\theta\int\limits_{\delta}^{2\delta}\frac{dt}{t(t+\sin\theta)^2}\ge\frac{\sin\theta}{\delta}\int\limits_{\delta}^{2\delta}\frac{dt}{(t+\sin\theta)^2}=\frac{\sin\theta}{2(\delta+\sin\theta)(\delta+2\sin\theta)}=\frac{2}{45\delta}$$

при $\sin\theta=\frac{1}{4}\,\delta$. Тогда при таких θ справедливо неравенство

$$\frac{2\lambda\,(B(re^{i\theta},\delta r))}{45\delta V(r)}\le\frac{\lambda\,(B(re^{i\theta},\delta r))}{V(r)}\int\limits_{\delta}^{2\delta}\frac{\sin\theta\,dt}{t(t+\sin\theta)^2}\le\frac{\sin\theta}{V(r)}\int\limits_{\delta}^{2\delta}\frac{\lambda\,(B(re^{i\theta},tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\lambda\,(B(re^{i\theta},\delta r))}{\delta V(r)}\le\frac{45}{2}\,\Psi_1\,(\arcsin\frac{1}{4}\,\delta,\,2\delta)=\Psi_2(\delta),$$

где $\lim\limits_{\delta\to 0}\Psi_2(\delta)=0$. В результате мы получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\lambda([(1-\delta/2)r,\,(1+\delta/2)r,\,0,\,\delta/4\,])}{V(r)}\le\delta\,\Psi_2(\delta).$$

Отсюда следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\lambda([r,(1+\delta)r,0,\delta/4])}{V(r)}\le \delta\,\Psi_3(\delta),$$

где $\lim\limits_{\delta\to 0}\Psi_3(\delta)=0$. Тогда

$$\Delta(\delta/4)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\lambda([0,(1+\delta)r,0,\delta/4])}{V((1+\delta)r)}\le$$

$$\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\lambda([0,r,0,\delta/4])}{V((1+\delta)r)}+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\lambda([r,(1+\delta)r,0,\delta/4])}{V((1+\delta)r)}\le$$

$$\le(1+\delta)^{-\rho}\,\Delta(\delta/4)+\delta\,\Psi_3(\delta).$$

Получаем, что

$$\Delta(\delta/4)\le\frac{\delta}{1-(1-\delta)^{-\rho}}\,\Psi_3(\delta).$$

Тем самым равенство $\lim\limits_{\theta\to+0}\Delta(\theta)=0$ доказано.

Аналогично доказываем, что $\lim\limits_{\theta\to+0}\Delta_1(\theta)=0$, где

$$\Delta_1(\theta)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\lambda([0,r,\pi-\theta,\pi])}{V(r)}.$$

Второй этап. Покажем, что из условия $\Psi_1(\theta,\delta)\underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows}0$ при $\theta\in(0,\pi)$ следует, что сходимость функции

$$\frac{\sin\theta}{V(r)}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt$$

к своему верхнему пределу при $r\to\infty$ обладает некоторым свойством равномерности. Будет приведено доказательство, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta_0>0$ такое, что если $\delta\in(0,\delta_0)$, то для любого $\eta\in(0,\delta)$ существует число $R=R(\eta)$ такое, что для всех $r\ge R$ и для всех $\theta\in(0,\pi)$ будет выполняться неравенство

$$\frac{\sin\theta}{V(r)}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt\le\varepsilon. \tag{17}$$

В дальнейшем сформулированное утверждение будем называть утверждением (17). Если оно ложно, то существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $\delta>0$ существуют число $\eta\in(0,\delta)$ и последовательности $r_n\to\infty$, $\theta_n\in(0,\pi)$ такие, что

$$\frac{\sin\theta_n}{V(r_n)}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\theta_n},tr_n))}{t(t+\sin\theta_n)^2}\,dt\ge\varepsilon_0. \tag{18}$$

Будем считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0$. Допустим вначале, что $\theta_0=0$. Найдется число $\varphi_0=\varphi_0(\eta)\in(0,\eta)$ такое, что при $\theta\in(0,\varphi_0)$, $t\in[\eta,\delta]$ будет иметь место включение $B(re^{i\theta},tr)\subset B(re^{i\varphi_0},2tr)$. Функция $s/(s+t)^2$ является возрастающей функцией переменной s на сегменте $[0,t]$. Тогда при $t\in[\eta,\delta]$, $\varphi_0\in(0,\eta)$ она будет возрастающей функцией на сегменте $[0,\varphi_0]$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$, то можно считать, что выполняется неравенство $\theta_n\le\varphi_0$. Таким образом,

$$\frac{\sin\theta_n}{(t+\sin\theta_n)^2}\le\frac{\sin\varphi_0}{(t+\sin\varphi_0)^2},$$

$$\frac{\sin\theta_n}{V(r_n)}\int_\eta^\delta\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\theta_n},tr_n))}{t(t+\sin\theta_n)^2}\,dt\le\frac{\sin\varphi_0}{V(r_n)}\int_\eta^\delta\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\varphi_0},2tr_n))}{t(t+\sin\varphi_0)^2}\,dt=$$

$$=\frac{4\sin\varphi_0}{V(r_n)}\int_{2\eta}^{2\delta}\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\varphi_0},ur_n))}{u(u+2\sin\varphi_0)^2}\,du\le\frac{4\sin\varphi_0}{V(r_n)}\int_{2\eta}^{2\delta}\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\varphi_0},ur_n))}{u(u+\sin\varphi_0)^2}\,du.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_0}{V(r_n)}\int_\eta^\delta\frac{\lambda\,(B(r_ne^{i\theta_n},tr_n))}{t(t+\sin\theta_n)^2}\,dt\le4\,\Psi_1\,(\varphi_0\,,2\delta).$$

Поскольку $\Psi_1\,(\theta,\delta)\underset{\delta\to0}{\rightrightarrows}0$, то при соответствующем выборе числа δ полученное неравенство будет противоречить неравенству (18). Точно так получим противоречие при $\theta_0=\pi$. Если $\theta_0\in(0,\pi)$, то при $t\in[\eta,\delta]$ можно считать, что выполняются соотношения

$$B(r_ne^{i\theta_n},\,tr_n)\subset B(r_ne^{i\theta_0},\,2tr_n),$$

$$\frac{\sin\theta_n}{(t+\sin\theta_n)^2}\le2\,\frac{\sin\theta_0}{(t+\sin\theta_0)^2}.$$

Далее, повторяя приведенную выше оценку, вновь получим противоречие с неравенством (18). Тем самым утверждение (17) доказано.

Третий этап. Пусть

$$f(t,\theta,r)=\frac{\sin\theta\,\lambda\,(B(z,\,tr))}{t(t+\sin\theta)^2V(r)}.$$

Докажем, что существует функция $\eta_1(r)\downarrow0$ $(r\to\infty)$ такая, что

$$\int_{\eta_1(r)}^{\delta}f(t,\theta,r)\,dt\rightrightarrows0\quad(\delta\to0,\ r\to\infty),\ \theta\in(0,\pi).\tag{19}$$

Чтобы не усложнять обозначения, на этом этапе доказательства положим, что если нижний предел интегрирования больше верхнего, то величина, изображаемая интегралом, равна нулю. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Тогда по утверждению (17) существует последовательность $\delta_n \downarrow 0$ такая, что для любого $\eta \in (0, \delta_n)$ существует число $R = R(\eta)$ такое, что при $r \geq R(\eta)$ и для любых $\theta \in (0, \pi)$ будет выполняться неравенство

$$\int_{\eta}^{\delta_n} f(t, \theta, r)\, dt < \varepsilon_n .$$

Пусть $\eta_k \downarrow 0$, а $R_{n,k} \uparrow \infty$ $(k \to \infty)$ такая последовательность, что при $r \geq R_{n,k}$, $\theta \in (0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_k}^{\delta_n} f(t, \theta, r)\, dt < \varepsilon_n .$$

Заметим, что если найдется последовательность $R_{n,k}$, обладающая указанным выше свойством, а $\widetilde{R}_{n,k} \geq R_{n,k}$, то последовательность $R_{n,k}$ может быть заменена на последовательность $\widetilde{R}_{n,k}$. Поэтому можно считать, что последовательность $R_{n,k}$ является возрастающей по каждому из индексов n и k. Пусть теперь $\eta_1(r) = \eta_k$ при $r \in [R_{k,k}, R_{k+1,k+1})$. Тогда $\eta_k \downarrow 0$ $(r \to \infty)$. Покажем, что

$$\int_{\eta_1(r)}^{\delta} f(t, \theta, r)\, dt \rightrightarrows 0 \quad (\delta \to 0,\ r \to \infty),\ \theta \in (0, \pi).$$

Пусть ε — произвольное строго положительное число. Пусть n_0 таково, что $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Пусть $\delta \leq \delta_{n_0}$, $r \geq R_{n_0, n_0}$. Предположим, например, что $r \in [R_{n,n}, R_{n+1,n+1})$, где $n \geq n_0$. Тогда

$$\int_{\eta_1(r)}^{\delta} f(t, \theta, r)\, dt \leq \int_{\eta_n}^{\delta_{n_0}} f(t, \theta, r)\, dt .$$

Имеем $r \geq R_{n,n} \geq R_{n_0, n}$. В этом случае в силу выбора числа $R_{n_0, n}$ выполняется неравенство

$$\int_{\eta_n}^{\delta_{n_0}} f(t, \theta, r)\, dt \leq \varepsilon_{n_0} < \varepsilon .$$

Таким образом, при $\delta \leq \delta_{n_0}$, $r \geq R_{n_0, n_0}$ получаем

$$\int_{\eta_1(r)}^{\delta} f(t, \theta, r)\, dt < \varepsilon.$$

Тем самым равенство (19) доказано. Если $\eta_2(r) \geq \eta_1(r)$, то

$$\int_{\eta_2(r)}^{\delta} f(t, \theta, r)\, dt < \varepsilon.$$

Поэтому можно считать, что $\eta_1(r)$ непрерывная и даже дифференцируемая функция.

Четвертый, заключительный этап доказательства. Пусть $\eta(r) = \sqrt[3]{\eta_1(r)}$. Построим теперь с помощью функций $A(r)\dfrac{V(r)}{\eta(r)}$, $\varphi(\alpha) = \alpha$ исключительное множество F_1 для меры λ. По теореме 26 F_1 есть C_0-множество. Пусть P_1 — та часть полуплоскости $\mathbb{C}_+$, где выполняется неравенство $\sin \arg z \geq 3\,\eta(r)$, а P_2 — оставшаяся часть этой полуплоскости. Пусть λ_1 — ограничение λ на множество P_1, а λ_2 — на множество P_2. Тогда $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Далее имеем

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_0^{\delta} \frac{\lambda\,(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_{\eta_1(r)}^{\delta} \frac{\lambda\,(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt + \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_0^{\eta_1(r)} \frac{\lambda_1\,(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\sin\theta}{V(r)} \int_0^{\delta} \frac{\lambda_2\,(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt = I_1(z, \delta) + I_2(z) + I_3(z, \delta).$$

В силу выбора функции $\eta_1(r)$ справедливо соотношение

$$I_1(z, \delta) \rightrightarrows 0 \quad (r \to \infty,\ \delta \to 0) \text{ при } \theta \in (0, \pi).$$

Если $\sin \arg z < \eta(r)$, то при $t \in [0, \eta_1(r)\,]$ круг $B(z,tr)$ не пересекается со множеством P_1. Так как мера λ_1 сосредоточена на множестве P_1, то $\lambda_1(B(z,tr)) = 0$, $I_2(z) = 0$. В противном случае

$$I_2(z) \leq \frac{1}{\sin\theta\, V(r)} \int_0^{\eta_1(r)} \frac{\lambda_1(B(z,tr))}{t}\, dt \leq \frac{1}{\eta(r)\, V(r)} \int_0^{\eta_1(r)} \frac{\lambda_1(B(z,tr))}{t}\, dt.$$

При $z \overline{\in} F_1$ справедливо неравенство

$$\lambda_1(B(z,tr)) \leq \lambda(B(z,tr)) \leq \frac{t}{\eta(r)}\, V(r).$$

Тогда при таких z получаем $I_2(z) \leq \dfrac{\eta_1(r)}{\eta^2(r)} = \eta(r)$. Таким образом, при $z \overline{\in} F_1$, $\theta \in (0, \pi)$ $I_2(re^{i\theta}) \rightrightarrows 0$ $(r \to \infty)$.

Для любого $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ множество P_2, за исключением некоторого ограниченного подмножества, целиком помещается в множестве $\{ z: \leq \sin \arg z \leq \sin \varepsilon \}$. Теперь из равенств $\lim\limits_{\theta \to +0} \Delta(\theta) = \lim\limits_{\theta \to +0} \Delta_1(\theta) = 0$ следует равенство

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda_2(B(0,r))}{V(r)} = 0 .$$

Известно, что существует уточненный порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda_2(B(0,r))}{V_1(r)} = 0, \quad \lim_{r \to \infty} \frac{V_1(r)}{V(r)} = 0, \quad \text{где} \quad V_1(r) = r^{\rho_1(r)}.$$

Пусть $\eta_2(r) = \left(\dfrac{V_1(r)}{V(r)} \right)^{1/2}$. Тогда $\eta_2(r) \to 0$ $(r \to \infty)$. Пусть $\eta_3(r)$ непрерывная убывающая мажоранта $\eta_2(r)$ такая, что $\eta_3(r) \to 0$ $(r \to \infty)$. Пусть теперь F_2 — исключительное множество для меры λ_2, построенное с помощью функций $A(r) = \dfrac{V_1(r)}{\eta_3(r)}$, $\varphi(\alpha) = \alpha$. По теореме 26 F_2 есть C_0-множество. При $z \overline{\in} F_2$ выполняется неравенство

$$\lambda_2(B(z,tr)) < \frac{V_1(r)}{\eta_3(r)} t .$$

При таких z получаем оценку

$$I_3(z, \delta) \leq \frac{\sin\theta}{\eta_3(r)} \frac{V_1(r)}{V(r)} \int_0^\delta \frac{dt}{(t + \sin\theta)^2} = \frac{\eta_2^2(r)}{\eta_3(r)} \frac{\delta}{\delta + \sin\theta} < \eta_2(r).$$

Тогда, если $F = F_1 \cup F_2$, то при $z \overline{\in} F$, $\theta \in (0, \pi)$ функция $\Psi(re^{i\theta}, \delta) \rightrightarrows 0$ $(r \to \infty$, $\delta \to 0)$. Теорема доказана.

Одно из утверждений, полученное при доказательстве теоремы 27, выделим в качестве самостоятельной теоремы.

Теорема 28. *Пусть λ — положительная мера, сосредоточенная в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geq 0$, *$\rho(r)$ — ее формальный порядок,* $\rho = \lim\limits_{r \to \infty} \rho(r) > 0$. *Тогда, если* $\Psi_1(\theta, \delta) \rightrightarrows 0$ $(\delta \to 0)$ *при* $\theta \in (0, \pi)$, *то* $\lim\limits_{\theta \to +0} \Delta(\theta) = \lim\limits_{\theta \to +0} \Delta_1(\theta) = 0$.

Теорема 29. *Пусть* $v(z) \in SHF(\rho(r))$, *μ — риссовская мера функции $v(z)$,* $d\mu_1(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im} \zeta \, d\mu(\zeta)$, $v(t) = \overline{\lim\limits_{y \to +0}} v(t + iy)$ — *граничные значения функции $v(z)$, σ — сингулярная граничная мера функции $v(z)$. Пусть* $v(z,h) = \dfrac{1}{V(r)} (v(z + hz) - v(z))$.

Для того, чтобы существовало C_0-множество F такое, что функция $v(z,hz)$ равномерно относительно z, $z + hz \in \mathbb{C}_+ \setminus F$ стремилась к нулю при $h \to 0$ (h — комплексное), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие четыре условия.

1) *На вещественной оси существует множество E_1 линейной плотности нуль такое, что равномерно относительно t, $t + ht \in (-\infty, \infty) \setminus E_1$ функция $v(t, h)$ стремится к нулю при $h \to 0$ (h — вещественное).*

2) *Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ линейной плотности нуль мера γ_E, $d\gamma_E(t) = \chi_E(t)\, v_-(t)\, dt$ имеет нулевой тип относительно уточненного порядка $\rho(r) + 1$.*

3) *Мера σ имеет нулевой тип относительно уточненного порядка $\rho(r) + 1$.*

4) *Существует C_0-множество F_1 такое, что*

$$\lim \Psi(z, \delta) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \,\overline{\in}\, F_1,\ \delta \to 0),$$

где

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\sin\theta}{rV(r)} \int_0^{\delta} \frac{\mu_1(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt.$$

З а м е ч а н и е 1. По теореме 3 мера σ является отрицательной.

З а м е ч а н и е 2. По теореме 27 условие 4) эквивалентно условию $\Psi_1(\theta, \delta) \rightrightarrows 0$ ($\delta \to 0$) при $\theta \in (0, \pi)$, где

$$\Psi_1(\theta, \delta) = \lim_{\eta \to 0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\sin\theta}{rV(r)} \int_{\eta}^{\delta} \frac{\mu_1(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $E_1 = F \cap (-\infty, \infty)$. Тогда E_1 — множество линейной плотности нуль и при t, $t + ht \,\overline{\in}\, E_1$ $v(t,h) \rightrightarrows 0$ ($h \to 0$). Необходимость первого условия доказана.

Пусть $\delta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin\theta \ge \sin\delta_1$, $q \in (0,1)$, $\alpha \le q \sin\theta$. Тогда по формуле Иенсена

$$\Phi(z, \alpha) = \frac{1}{V(r)} \int_0^{\alpha r} \frac{\mu(B(z,t))}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi V(r)} \int_0^{2\pi} \left(v(z + \alpha r e^{i\varphi}) - v(z)\right) d\varphi. \tag{20}$$

Пусть теперь $z \,\overline{\in}\, F$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\beta > 0$ такое число, что при $|h| < \beta$, z, $z + hz \,\overline{\in}\, F$ выполняется неравенство $|v(z,h)| < \varepsilon$. Пусть R_1 такое число, что для каждого z, $|z| \ge R_1$ существует число $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\beta, \beta\right]$ такое, что окружность $|w - z| = \alpha r$ не пересекается с множеством F. Пусть теперь $|z| \ge R_1$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\beta\right)$, а число α в равенстве (20) выбрано таким образом, что $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\beta, \beta\right]$ и окружность $|w - z| = \alpha r$ не пересекается с множеством F. Тогда из равенства (20) следует

$$\Phi(z, \delta) \leq \Phi(z, \alpha) < \varepsilon.$$

Таким образом, если $\sin\theta \geq \sin\delta_1$, то $\lim \Phi(z, \delta) = 0$ $(\delta \to 0, z \to \infty, z \overline{\in} F)$. При $\sin\theta \geq \sin\delta_1$, $\delta < q\sin\theta$, $q \in (0,1)$ по аналогии с (16) можно получить неравенство

$$M_1(q, \delta_1)\,\Phi(z, \delta) \leq \Psi(z, \delta) \leq M_2(q, \delta_1)\,\Phi(z, \delta),$$
$$0 < M_1(q, \delta_1) < M_2(q, \delta_1) < \infty. \tag{21}$$

Отсюда следует равенство

$$\lim \Psi(z, \delta) = 0 \quad (\delta \to 0,\ z \to \infty,\ z \overline{\in} F,\ \sin\theta \geq \sin\delta_1). \tag{22}$$

Далее рассмотрим меру λ_1, $d\lambda_1(\zeta) = d\mu_1(\zeta) - d\sigma(t) + \chi_{E_1}(t)\,v_-(t)\,dt$ и функцию

$$\Psi_3(z, \delta) = \frac{\sin\theta}{rV(r)} \int_0^{\delta} \frac{\lambda_1(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\,dt.$$

Заметим, что $\Psi(z, \delta) \leq \Psi_3(z, \delta)$. Множество E_1 можно считать открытым. Тогда

$$E_1 = \bigcup_n (a_n, b_n),$$

где $(a_n, b_n)_1^{\infty}$ — система непересекающихся интервалов. Определим непрерывную на всей оси $(-\infty, \infty)$ функцию $v_1(t)$, считая что $v_1(t) = v(t)$ при $t \overline{\in} E_1$ и $v_1(t)$ — линейная функция на каждом интервале (a_n, b_n). Функция $v_1(t)$ обладает следующим свойством:

$$v_1(t,h) = \frac{1}{V(|t|)}\left(v_1(t + ht) - v_1(t)\right) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0, \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{23}$$

В частности,

$$|v_1(t)| \leq MV(|t|). \tag{24}$$

Далее, в силу теоремы 10,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_{C(z, \frac{1}{2}r)} K(z, \zeta)\,d\lambda(\zeta) + \sin\theta\, d(z) V(r), \tag{25}$$

где $d(z)$ — ограниченная функция при $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $\sin\theta < \frac{1}{2}$ и

$$I = \left[\left(\cos\theta - \sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2\theta}\right)r,\ \left(\cos\theta + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2\theta}\right)r\right].$$

Тогда из равенства (25) следует, что

$$A(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(z,\frac{1}{2}r)}\int K(z,\zeta)\,d\lambda_1(\zeta) = \left(\frac{y}{\pi}\int\limits_I \frac{v_1(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - v_1(r)\right) + (v_1(r) - v_1(r_1)) +$$

$$+ (v(r_1) - v(z)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_I K(z,t)\chi_{E_1}(t)(v_1(t) - v_+(t))\,dt + \sin\theta\, d(z)\, V(r) = \sum_{k=1}^{5} A_k(z),$$

где r_1 — точка, не принадлежащая множеству E_1, и ближайшая к точке r. Из равенства (23) и теоремы 24 получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}A_1(z) = 0 \quad (r\to\infty,\ \theta\to 0).$$

Так как множество E_1 имеет линейную плотность нуль, то из равенства (23) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}A_2(z) = 0.$$

Поскольку $r_1 \in E_1$, то $r_1 \overline{\in} F$. Тогда, из условия теоремы,

$$\lim\frac{1}{V(r)}A_3(z) = 0 \quad (r\to\infty,\ \theta\to 0,\ z\overline{\in} F).$$

Пусть γ — положительная мера, $d\gamma(t) = \chi_{E_1}(t)\,\left|\,v_1(t) - v_+(t)\,\right|\,dt$. Так как $v_+(t) \le MV(|\,t\,|)$, $|\,v_1(t)\,| \le MV(|\,t\,|)$, E_1 — множество линейной плотности нуль, то мера γ имеет минимальный тип относительно уточненного порядка $\rho(r)+1$. Следовательно, если

$$\Psi_2(\theta,\delta) = \lim_{\eta\to 0}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\sin\theta}{rV(r)}\int\limits_{\eta}^{\delta}\frac{\gamma(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt,$$

то $\Psi_2(\theta,\delta) \rightrightarrows 0$ при $\delta\to 0$, $\theta\in(0,\pi)$. Согласно теореме 27, существует C_0-множество F_2 такое, что если

$$\Psi_2(z,\delta) = \frac{\sin\theta}{rV(r)}\int\limits_0^{\delta}\frac{\gamma(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt,$$

то

$$\lim\Psi_2(z,\delta) = 0 \quad (z\to\infty,\ z\overline{\in} F_2,\ \delta\to 0).$$

Из последнего равенства следует

$$\lim\Psi_2(z,\delta) = 0 \quad (z\to\infty,\ z\overline{\in} F_2,\ \theta\to 0). \tag{26}$$

Если $t - z = ure^{i\psi}$, то, используя утверждение II теоремы 6 и оценку для $\varphi'(u)$, полученную при доказательстве теоремы 17, находим, что

$$\frac{1}{V(r)}\mid A_4(z)\mid \le \frac{1}{2\pi V(r)}\int\limits_I \mid K(z,t)\mid d\gamma(t)\le$$

$$\le \frac{M}{rV(r)}\int\limits_0^{1/2}\frac{1}{u+\sin\theta}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{u}\right)d\gamma\,(B(z,ur))\le$$

$$\le \frac{M}{rV(r)}\frac{2}{1+2\sin\theta}\ln\,(1+4\sin\theta)\,\gamma\,(B(z,ur))+\frac{M\sin\theta}{rV(r)}\int\limits_0^{1/2}\frac{\gamma\,(B(z,ur))}{u(u+\sin\theta)^2}\,du.$$

Из приведенного неравенства и равенства (26) следует, что

$$\lim\frac{1}{V(r)}A_4(z)=0\quad(z\to\infty,\ z\overline{\in}F_2\,,\ \theta\to 0).$$

Принимая во внимание ограниченность $d(z)$, находим

$$\lim\frac{1}{V(r)}A_5(z)=0\quad(z\to\infty,\ \theta\to 0).$$

Пусть $F_1=F\bigcup F_2$. Тогда F_1 есть C_0-множество. Из полученных оценок функций $A_k(z)$ следует, что

$$\lim\frac{1}{V(r)}A(z)=0\quad(z\to\infty,\ z\overline{\in}F_1\,,\ \theta\to 0).$$

Точно так получается аналогичное равенство, в котороом соотношение $\theta\to 0$ заменяется на соотношение $\theta\to\pi$. Поэтому справедливо равенство

$$\lim\frac{1}{V(r)}A(z)=0\quad(z\to\infty,\ z\overline{\in}F_1\,,\ \sin\theta\to 0).\tag{27}$$

Если $\zeta-z=tre^{i\psi}$, то из утверждения II теоремы 6 и определения $A(z)$ вытекает, что

$$A(z)\ge\frac{1}{2\pi r}\int\int\limits_{C(z,\frac{1}{2}r)}\frac{1}{t+\sin\theta}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{t}\right)d\lambda_1(\zeta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{1/2}\frac{1}{t+\sin\theta}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{t}\right)d\lambda_1(B(z,tr))\ge\frac{\sin\theta}{2\pi r}\int\limits_0^{1/2}\frac{\lambda_1(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt.$$

Из последнего неравенства и равенства (27) следует, что

$$\lim\Psi_3(z,\delta)=0\quad(z\to\infty,\ z\overline{\in}F_1\,,\ \sin\theta\to 0).\tag{28}$$

Из равенств (22) и (28) получаем, что

$$\lim\Psi_3(z,\delta)=0\quad(z\to\infty,\ z\overline{\in}F_1\,,\ \delta\to 0).\tag{29}$$

Так как $\Psi(z,\delta)\le\Psi_3(z,\delta)$, то необходимость условия 4 теоремы доказана. Пусть

$$\Psi_3(\theta,\delta)=\lim_{\eta\to+0}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\sin\theta}{rV(r)}\int\limits_\eta^\delta\frac{\lambda_1(B(z,tr))}{t(t+\sin\theta)^2}\,dt.$$

Из равенства (29) по теореме 27 находим, что $\Psi_3(\theta,\delta) \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} 0$ при $\theta \in (0,\pi)$. Далее из теоремы 28 следует, что ограничение меры λ_1 на вещественную ось есть мера нулевого типа относительно уточненного порядка $\rho(r)+1$. В частности, мерами нулевого типа относительно $\rho(r)+1$ являются меры $-\sigma$ и γ_{E_1}. Пусть теперь E — произвольное измеримое множество линейной плотности нуль на вещественной оси. Пусть $E_2 = E \cap E_1$, $E_3 = E\backslash E_1$. Поскольку $\gamma_{E_2} \le \gamma_{E_1}$, то мера γ_{E_2} имеет нулевой тип относительно $\rho(r)+1$. Далее, множество E_3 имеет нулевую линейную плотность. Кроме того, при $t \overline{\in} E_1$ справедливы неравенства $|v(t)| \le MV(|t|)$, $v_-(t) \le MV(|t|)$. Тогда мера γ_{E_3}, $d\gamma_{E_3}(t) = \chi_{E_3}(t)\, v_-(t)\, dt$ имеет нулевой тип относительно уточненного порядка $\rho(r)+1$. То же самое справедливо и для меры $\gamma_E = \gamma_{E_2} + \gamma_{E_3}$. Необходимая часть теоремы доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия 1-4 теоремы. Предположим вначале, что $\sin\theta \ge \sin\delta_1$, $\delta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $t \le q\sin\theta$, $q \in (0,1)$. Тогда, в соответствии с теоремой 10, справедливо равенство

$$v(z,h) = \frac{1}{2\pi V(r)} \iint\limits_{C(z,tr)} (K(z+hz,\zeta) - K(z,\zeta))\, d\mu_1(\zeta) + \frac{|h|}{t^2} d(r,\theta,h,t), \tag{30}$$

где $d(r,\theta,h,t)$ — ограниченная функция при $|h| \le \frac{1}{2}t$. Обозначим первое слагаемое в правой части равенства (30) через $v_1(z,h)$. Так как при $\zeta \in C(z,tr)$ $\operatorname{Im}\zeta \ge r(1-q)\sin\delta_1$, то

$$v_1(z,h) = \frac{1}{2\pi V(r)} \iint\limits_{C(z,tr)} \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln\left|\frac{(\zeta - z - hz)(\bar\zeta - z)}{(\bar\zeta - z - hz)(\zeta - z)}\right| d\mu_1(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi V(r)} \iint\limits_{C(z,tr)} \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln\left|1 + \frac{hz(\bar\zeta - \zeta)}{(\bar\zeta - z - hz)(\zeta - z)}\right| d\mu_1(\zeta) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi(1-q)\sin\delta_1}\frac{1}{rV(r)} \iint\limits_{C(z,tr)} \ln\left(1 + \frac{2|h|r}{|z-\zeta|}\right) d\mu_1(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-q)\sin\delta_1}\frac{1}{rV(r)} \int_0^t \ln\left(1 + \frac{2|h|}{u}\right) d\mu_1(B(z,ur)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-q)\sin\delta_1}\frac{1}{rV(r)} \ln\left(1 + \frac{2|h|}{t}\right) \mu_1(B(z,tr)) +$$

$$+ \frac{2|h|}{2\pi(1-q)\sin\delta_1}\frac{1}{rV(r)} \int_0^t \frac{\mu_1(B(z,ur))}{u(u+2|h|)}\, du = A_1(z,h) + A_2(z,h).$$

Для величины $A_1(z,h)$ справедлива оценка $A_1(z,h) \le M|\,h\,|$. Поскольку $t \le q \sin\theta < \sin\theta$, то для величины $A_2(z,h)$ верна оценка

$$A_2(z,h) \le \frac{4|\,h\,|}{\pi(1-q)\sin\delta_1}\,\frac{\sin^2\theta}{rV(r)}\int_0^t \frac{\mu_1(B(z,ur))\,du}{u(u+\sin\theta)^2(u+2|\,h\,|)} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi(1-q)}\,\frac{\sin\theta}{rV(r)}\int_0^{\sqrt{|h|}} \frac{\mu_1(B(z,ur))}{u(u+\sin\theta)^2}\,du + \frac{4\sqrt{|\,h\,|}}{\pi(1-q)}\,\frac{\sin\theta}{rV(r)}\int_{\sqrt{|h|}}^t \frac{\mu_1(B(z,ur))}{u(u+\sin\theta)^2}\,du \le$$

$$\le M(\Psi(z,\sqrt{|\,h\,|}) + \sqrt{|\,h\,|}\,\Psi(z,t)).$$

Получена следующая оценка сверху функции $v_1(z,h)$:

$$v_1(z,h) \le M\Big(|\,h\,| + \Psi(z,\sqrt{|\,h\,|}) + \sqrt{|\,h\,|}\,\Psi(z,t)\Big).$$

Для оценки снизу этой функции обозначим $z_1 = z + hz$, $z = z_1 + h_1 z_1$, где $h_1 = -\dfrac{h}{1+h}$.

Тогда

$$-v_1(z,h) = \frac{1}{2\pi V(r)}\iint\limits_{C(z,tr)} \ln\left|\frac{(\zeta - z)(\bar\zeta - z - hz)}{(\bar\zeta - z)(\zeta - z - hz)}\right| d\mu_1(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi V(r)}\iint\limits_{C(z,tr)} \ln\left|\frac{(\zeta - z_1 - h_1 z_1)(\bar\zeta - z_1)}{\bar\zeta - z_1 - h_1 z_1)(\zeta - z_1)}\right| d\mu_1(\zeta).$$

Так как $\sin\arg z_1 \ge \sin(\arg z - \arcsin|\,h\,|)$, то при $|\,h\,| \le \sin\frac{1}{2}\delta_1$ находим, что $\sin\arg z_1 \ge \sin\frac{1}{2}\delta_1$. Затем

$$C(z,tr) \subset C\left(z_1, \frac{t+|\,h\,|}{1-|\,h\,|}r_1\right), \quad r_1 = |\,z_1\,|.$$

Используя это включение и повторяя предыдущие рассуждения, получаем оценку

$$-v_1(z,h) \le M\left(|\,h_1\,| + \Psi(z_1,\sqrt{|\,h_1\,|}) + \sqrt{|\,h_1\,|}\,\Psi\left(z_1,\frac{t+|\,h\,|}{1-|\,h\,|}\right)\right).$$

Из приведенных оценок следует, что при любом $\delta_1 \in (0,\frac{\pi}{2})$ внутри угла $\sin\arg z \ge \sin\delta_1$ выполняется соотношение

$$\lim v(z,h) = 0 \quad (z\to\infty,\ h\to 0,\ z,\ z+hz \,\overline{\in}\, F_1\ ). \tag{31}$$

Далее мы вновь будем считать, что E_1 — открытое множество. Пусть $v_1(t)$ — та функция, которую мы построили в первой части доказательства. Пусть

$$d\lambda_2(\zeta) = d\mu_1(\zeta) + \chi_{E_1}(t)\,v_-(t)\,dt - d\sigma(t) + d\gamma(t),$$

где $d\gamma(t) = \chi_{E_1}(t)\,|\,v_1(t) - v_+(t)\,|\,dt$. Так как мера $\chi_{E_1}(t)v_-(t)\,dt - d\sigma(t) + d\gamma(t)$ имеет нулевой тип относительно порядка $\rho(r) + 1$, то из условия 4 данной теоремы и из теоремы 27 следует, что если

$$\Psi_5(z, \delta) = \frac{\sin\theta}{rV(r)} \int_0^{\delta} \frac{\lambda_2(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\,dt\,,$$

то существует C_0-множество F_3 такое, что

$$\lim \Psi_5(z, \delta) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \overline{\in} F_3\,,\ \delta \to 0).$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\lim \Psi_5(z, \delta) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \overline{\in} F_3\,,\ \sin\theta \to 0). \tag{32}$$

Пусть

$$d\lambda_3(\zeta) = d\mu_1(\zeta) + \chi_{E_1}(t)\,v_-(t)\,dt + \chi_{E_1}(t)\,(v_1(t) - v_+(t))\,dt.$$

Тогда равенство (25) можно переписать в виде

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int_I \frac{v_1(t)\,dt}{(t - x)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \iint_{C(z,\frac{1}{2}r)} K(z,\zeta)\,d\lambda_3(\zeta) + \sin\theta\, d(z)V(r). \tag{33}$$

Пусть

$$A_6(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(z,\frac{1}{2}r)} K(z,\zeta)\,d\lambda_3(\zeta),$$

где $\zeta - z = tre^{i\psi}$. Тогда, применяя утверждение II теоремы 6 и неравенство $|\,\lambda_3\,| \le \lambda_2$, получим

$$|\,A_6(z)\,| \le \frac{2}{\pi r \ln 3} \iint_{C(z,\frac{1}{2}r)} \frac{1}{t + \sin\theta} \ln\left(1 + \frac{2\sin\theta}{t}\right) d\lambda_2(\zeta) =$$

$$= \frac{2}{\pi r \ln 3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t + \sin\theta} \ln\left(1 + \frac{2\sin\theta}{t}\right) d\lambda_2(B(z,tr)) \le \frac{8\sin\theta}{\pi r \ln 3} \int_0^{1/2} \frac{\lambda_2(B(z,tr))}{t(t + \sin\theta)^2}\,dt.$$

Из приведенного неравенства и равенства (32) следует, что

$$\lim \frac{1}{V(r)} A_6(z) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \overline{\in} F_3\,,\ \sin\theta \to 0). \tag{34}$$

Теперь из равенств (33), (34) и теоремы 24 получаем

$$\lim \frac{1}{V(r)} (v(z) - v_1(r)) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \overline{\in} F_3,\ \theta \to 0), \tag{35}$$

$$\lim \frac{1}{V(r)} (v(z) - v_1(-r)) = 0 \quad (z \to \infty,\ z \overline{\in} F_3,\ \theta \to \pi). \tag{36}$$

Теперь, используя (23) и (33)-(36), приходим к равенству

$$\lim v(z,h) = 0 \quad (z \to \infty,\ z,\ z + hz \overline{\in} F_3,\ \sin\theta \to 0). \tag{37}$$

Пусть $F_4 = F_1 \cup F_3$. Тогда F_4 есть C_0-множество. С учетом (31), (37) получаем, что

$$\lim v(z,h) = 0 \quad (z \to \infty,\ h \to 0,\ z,\ z + hz \overline{\in} F_3).$$

Тепрерь из теоремы 23 следует, что существует C_0-множество F такое, что $v_1(z,h) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0$ при z, $z + hz \overline{\in} F$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в [1] приведены достаточные условия, которые налагаются на полную меру λ функции $v(z)$ и которые гарантируют существование множества F, покрываемого системой кругов с конечной суммой радиусов или системой кругов конечного обзора, и такого, что $v_1(z,h) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0$ при z, $z + hz \overline{\in} F$.

Работа выполняется при поддержке Американского математического общества.

Список литературы

1. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— В сб.: Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1968), вып. 7, с. 59–84.
2. *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций.— В сб.: Там же (1968), вып. 6, с. 3–29.
3. *М. Л. Содин*, Об асимптотической регулярности субгармонических функций конечного порядка.— Укр. мат. журн. (1984), т. 36, № 5, с. 646–650.

Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. Part 2

A. F. Grishin

Given a subharmonic funcrion in the upper half-plane we obtaine a criteria for existence of a system of disks of zero linear density such that the function is asymptotically continuous outside these disks.

Неперервність та асимптотична неперервність субгармонічних функцій. Частина 2

А. П. Гришин

Пропонується критерій існування системи кругів нульової лінійної щільності поза якою задана субгармонічна у верхній півплощині функція скінченного порядку буде асимптотично неперервною.