Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 194–196 УДК 514.174.2

Жесткие упаковки шаров

А. М. Гурин

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 9 июня 1995 года

Дано определение и исчерпывающее описание одного класса упаковок равных шаров в трехмерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим множество равных шаров, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Будем говорить, что шары образуют упаковку [1,2], если каждая взятая в отдельности пара шаров имеет не более чем одну общую точку. Назовем произвольный шар упаковки центральным, а соседние с ним шары, т.е. имеющие с центральным общую точку, — расположенными на его поверхности. Выделим из упаковки комплекс шаров, состоящий из центрального шара и расположенных на его поверхности шаров таким образом, чтобы их взаимное расположение в пространстве осталось бы точно таким же, как и в упаковке. Зафиксируем в пространстве все шары комплекса кроме одного отмеченного. Будем говорить, что отмеченный шар жестко защемлен соседними шарами комплекса, если он не может непрерывно изменять свое положение на поверхности центрального шара при фиксированном положении других шаров комплекса. Комплекс шаров назовем жестким, если каждый шар комплекса жестко защемлен соседними с ним шарами комплекса. Назовем упаковку шаров жесткой, если каждый шар обладает жестким комплексом шаров.

Рассмотрим произвольный комплекс шаров упаковки. Поскольку все шары равны, то их центры также расположены на шаре, но большего диаметра. Отметим на нем точки — центры шаров комплекса и соединим дугами больших окружностей те из них, которые соответствуют центрам соседних между собой шаров. В результате получим сеть на поверхности большого шара, соответствующую комплексу шаров. В отдельных случаях сеть может быть реализована выпуклым многогранником, если ее дуги больших окружностей заменить прямолинейными отрезками с концами в узлах сети. В этом случае скажем, что комплекс шаров соответствует многограннику.

Теорема. *Какая бы ни была жесткая упаковка шаров в трехмерном евклидовом пространстве, для ее описания достаточно лишь двух комплексов шаров, соответствующих многогранникам* $M_4 + \overline{M}_4$ *и* $2M_4$ [3].

Доказательство. Рассмотрим произвольный комплекс шаров упаковки. Построим соответствующую ему сеть на большом шаре. Из определения жесткости комплекса шаров следует, что углы между ребрами сети меньше π, а, следовательно, в каждом узле сети сходятся не менее трех ребер сети. Заменим ребра сети прямолинейными отрезками и соединим узлы сети с центром центрального шара. Тогда каждому ребру сети будет соответствовать правильный треугольник с вершиной в центре центрального шара, а каждой области сети — многогранный конус с вершиной в центре центрального шара. Поскольку гранями конусов являются правильные треугольники и двугранные углы между гранями меньше π, т.е. конусы выпуклые, то в вершине того или иного конуса может сходится лишь три, четыре или пять граней. На сети это соответствует трех, -четырех- или пятиугольным областям. Выполним аналогичное построение для всех шаров упаковки. Покажем, что полученные при этом правильные треугольники разбивают пространство нормальным образом на замкнутые выпуклые многогранники.

Рассмотрим один из конусов. Согласно обозначениям, принятым в работе [3], это соответствует одному из трех возможных типов вершин выпуклого многогранника с правильными треугольными гранями: 3^3, 3^4, 3^5. Вершины края конуса или блока, состоящего из треугольных граней, являются замкнутыми вершинами других конусов, поскольку, в свою очередь, являются центрами центральных шаров других комплексов жесткой упаковки шаров. При этом исходный выпуклый конус составляет с одним из замыканий вершины своего края в другом комплексе либо выпуклый многогранник с краем, либо замкнутый выпуклый многогранник. Действительно, упомянутые вершины имеют общее ребро, а два треугольника, прилегающие к нему, входят в замыкание и первой, и второй вершин так, что с новыми треугольниками образуют двугранные углы меньше π. Если исходная вершина имеет тип 3^3 и вершина края имеет тот же тип, то получим тетраэдр. В других случаях блок граней окажется незамкнутым.

Найдем замыкания оставшихся свободными вершин края исходного конуса, такие, чтобы, как и в первом случае, получить в итоге либо выпуклый многогранник с краем, либо замкнутый выпуклый многогранник с правильными треугольными гранями. Таким образом, алгоритм построения многогранников отличается от алгоритма, приведенного в работе [3], только тем, что здесь не следует проверять каждый раз на выпуклость вновь полученный блок граней или весь замкнутый многогранник, так как его выпуклость следует из его существования. Указанные построения проводятся до тех пор, пока не будут перебраны все возможные продолжения исходных блоков 3^3, 3^4, 3^5 такими же блоками до получения того или иного замкнутого выпуклого многогранника.

Так как все выпуклые многогранники с правильными гранями изучены [3,4], то выберем из них те, грани которых являются лишь правильными треугольниками. Приведем здесь так называемые независимые многогранники — остальные получаются из них подклейкой друг к другу по целой грани, а, значит, их влияние в дальнейшем будет учтено: M_1, $2M_2$, $A_5 + 2M_3$, M_{25}, $2M_3$, $2M_2 + A_4$, $3M_2 + \Pi_3$ [3].

Найдем все возможные нормальные способы заполнения пространства указанными многогранниками. Для этого найдем те сочетания их двугранных углов, которые в сумме дают 360°. Значения двугранных углов перечисленных многогранников следующие: 64°45′, 70°32′, 96°11′, 109°28′, 121°11′, 127°33′, 138°12′, 144°44′, 158°34′, 166°26′, 169°28′. Значения двугранных углов выписаны с погрешностью до 1′, так как этого при составлении сумм достаточно, а точное равенство 360° выполняется (это устанавливается дополнительной проверкой) лишь в двух случаях: а) один угол 70°32′ и два угла 144°44′, б) два угла 70°32′ и два угла 109°28′.

Указанные наборы двугранных углов могут составить лишь многогранники M_1, $2M_2$, $2M_2 + A_4$ и $3M_2 + П_3$. А пространство в целом нормально заполнить можно лишь многогранниками M_1 и $2M_2$, т.е. тетраэдрами и откраэдрами, так как многогранники $2M_2 + A_4$ и $3M_2 + П_3$ имеют двугранные углы, не вошедшие ни в набор а), ни в б).

Тетраэдр и октаэдр могут заполнить пространство вокруг общей точки, а, значит, и вокруг одного шара, лишь двумя способами. Для этого следует взять восемь тетраэдров и шесть октаэдров (или полуоктаэдров) и подклеить их друг к другу так, чтобы на большом шаре образовалась сеть, соответствующая многогранникам либо $M_4 + \overline{M}_4$, либо $2M_4$ [3], которые, следовательно, и описывают единственно возможные способы расположения шаров в том или ином комплексе шаров жесткой упаковки. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Любая жесткая упаковка шаров имеет плотность, равную наибольшей возможной плотности решетчатой упаковки шаров в трехмерном евклидовом пространстве.

Исследования, описанные в данной публикации, оказались возможными благодаря Гранту № U22000 Международного научного фонда.

Список литературы

1. Дж. Конвей, Н. Слоэн, Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1,2. Мир, Москва (1990), 792 с.
2. А. М. Гурин, Жесткие упаковки шаров.— Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия" (Казань, 18-22 авг. 1992 г.): Тез. докл. Ч. 1.— КазГУ, Казань (1992), с. 28.
3. В. А. Залгаллер, Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ им. В. А. Стеклова АН СССР (1967), т. 2, С. 3-220.
4. W. Johnson, Convex polyhedra with regular faces. — Can. J. Math. (1966), v. 18, № 1, p. 169–200.

Rigid packing of balls

A. M. Gurin

The definition and an exhaustive description of a class of packings of equal balls in the 3-dimensional Euclidean space are given.

Жорсткі упаковки куль

О. М. Гурін

Наведено означення і повний опис одного класу упаковок рівних куль у тривимірному просторі.