Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 197–200

УДК 514

Два вопроса о кратчайших на выпуклой поверхности

В. А. Залгаллер

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, Россия, 191011, г. Санкт-Петербург, ул. Фонтанка, 27

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Насколько кратчайшая на выпуклой поверхности может отличаться от плоской кривой? Гипотеза об экстремальной ситуации. Примеры.

1. Кратчайшая γ на выпуклой поверхности $F \subset \mathbf{R}^3$ может не быть плоской кривой. Сколь сильно она может отличаться от плоской кривой? Уточним вопрос. Пусть A, B — концы γ; P — одна из тех проходящих через A и B плоскостей, от которых γ отклоняется менее всего; $z(\gamma)$ — максимальное удаление точек γ от P; $s(\gamma)$ — длина γ; $q(\gamma) = z(\gamma)/s(\gamma)$ — относительное отклонение γ от плоскости. Спрашивается, чему равна верхняя граница

$$q = \sup q(\gamma), \tag{1}$$

взятая по всем кратчайшим γ на всех полных выпуклых поверхностях в $\mathbf{R}^3$? Достигается ли эта граница, и если да, то для каких поверхностей и кратчайших? Очевидно, $q \leq 1/4$.

2. Если кратчайшую $\gamma \subset F$ на обоих концах произвольно мало укоротить, то она становится единственной кратчайшей между своими новыми концами. К такой кратчайшей сходятся соответствующие кратчайшие γ_n на выпуклых многогранниках $M_n \to F$. Учитывая этот факт и другие аппроксимационные соображения, заключаем, что супремум (1) достаточно искать в классе кратчайших на телесных выпуклых многогранниках, причем можно считать, что концы γ лежат внутри граней.

3. Плоскость каждой грани выпуклого телесного многогранника M делит $\mathbf{R}^3$ на два полупространства, и M есть пересечение тех из этих (замкнутых) полупространств, которым принадлежит M. По известной лемме Буземана и Феллера (см. [1]) кратчайшая на M останется кратчайшей на многограннике $M_\gamma \supset M$, получаемом как пересечение лишь тех упомянутых выше замкнутых полупространств, которые соответствуют граням M, по которым проходила кратчайшая γ. Это еще сокращает класс γ и M, для которых следует искать супремум (1).

4. Приведем пример кратчайшей γ с довольно большим значением $q(\gamma)$. Рассмотрим трехгранную призму (рис. 1), сечение которой — равнобедренный треугольник с основанием $2u$ и боковыми сторонами 1. Очевидно, $0 < u < 1$. Верхнюю

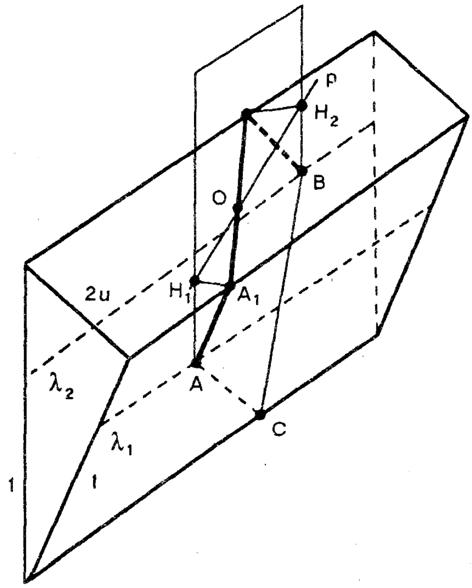

Рис. 1.

грань призмы будем называть ее основанием, а две другие — боковыми. На боковых гранях выделим образующие — прямые λ_1, λ_2, идущие каждая от ближайшего ребра основания на расстоянии $(1-u)/2$. При таком выборе λ_1, λ_2 для любых точек $A \in \lambda_1$, $B \in \lambda_2$ на поверхности призмы есть две кратчайшие AB. Одна AA_1B_1B идет через основание призмы, а другая ACB — только по боковым граням призмы. Эти кратчайшие на развертке призмы (рис. 2) являются прямыми отрезками AB и $A\overline{B}$. Нас будет интересовать только кратчайшая AA_1B_1B, середину которой обозначим через O. Проведем через точки A, O, B плоскость P (см. рис. 1) и изучим, насколько наша кратчайшая отклоняется от плоскости P.

На развертке рис. 3 прямые μ_1 , μ_2 — проекции λ_1, λ_2 на основание призмы, а прямая p — след плоскости P. При ясном выборе координат из рис. 3 обозначим координаты точки $A_1(u, -uk)$. Тогда $A\left(\frac{1+u}{2}, -\frac{1+u}{2}k\right)$; $H_1\left(\frac{u(1+u)}{2}, -uk\right)$; уравнение прямой p: $2kx + (1+u)y = 0$; расстояние z точки A_1 до прямой p (оно же — максимальное отклонение кратчайшей от плоскости P) равно $z = ku(1-u)((1+u)^2 + 4k^2)^{-1/2}$; длина кратчайшей $s = 2OA = (1+u)\sqrt{1+k^2}$.

При фксированном $u \in (0,1)$ максимум относительного отклонения

$$f(u) = \max_k \frac{z}{s} = \frac{u(1-u)}{1+u} \max_k \frac{k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{(1+u)^2+4k^2}} = \frac{u(1-u)}{(1+u)(3+u)}$$

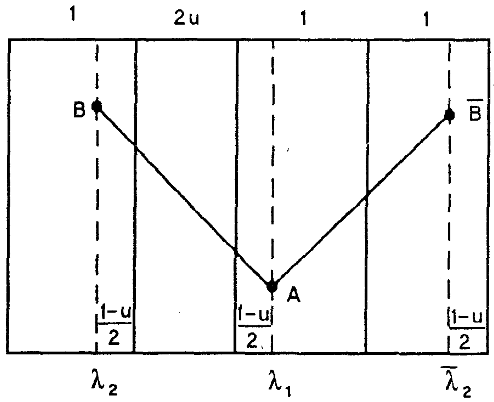

Рис. 2.

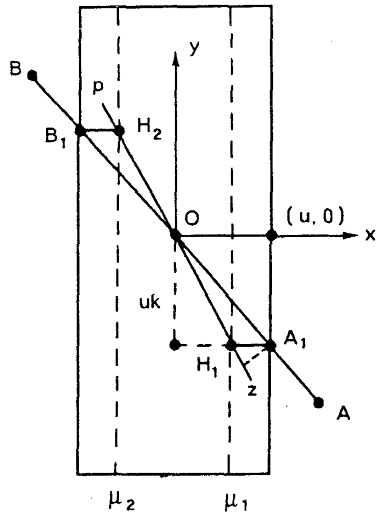

Рис. 3.

достигается при $k = \sqrt{(1+u)/2}$. Наконец, наибольшее

$$q(\gamma) = \max_{0<u<1} f(u) = \frac{11 - 4\sqrt{6}}{14 + 4\sqrt{6}} \approx 0{,}05051 \tag{2}$$

достигается при $u = \dfrac{2\sqrt{6} - 3}{5} \approx 0{,}38$, при этом $k \approx 0{,}83$.

Как видим, при таких u и k отклонение кратчайшей γ от плоскости составляет все же лишь чуть более 5% длины кратчайшей.

5. Автор склонен предполагать, что последний пример дает наибольшее возможное значение (1). Было бы интересно доказать или опровергнуть это предположение.

6. Остановимся еще на одном вопросе о кратчайших. Если кратчайшая $\gamma(t)$, $0 \le t \le s$, $A = \gamma(0)$, $B = \gamma(s)$, не является прямолинейным отрезком AB, то при движении точки $\gamma(t)$ по кривой полуплоскость, ограниченная прямой AB и проходящая через точку $\gamma(t)$, может лишь непрерывно поворачиваться вокруг оси AB. Пусть $\varphi(t)$ — угол такого поворота, отсчитываемый от какого-либо положения. Сколь велико может быть колебание функции φ и ее вариация? То есть чему равны

$$\sup_{\gamma}\left(\max_{t}\varphi(t) - \min_{t}\varphi(t)\right), \quad \sup_{\gamma} \operatorname{Var}\varphi, \tag{3}$$

взятые по всем кратчайшим γ, которые не являются отрезками? Этот вопрос поставил А. Д. Милка. Вопрос остается пока открытым. Ниже мы даем пример, опровергающий предположение, что первая из величин (3) не превосходит π.

7. Рассмотрим выпуклый многогранник, составленный из трех частей: средней, начальной и конечной (рис. 4). Средняя часть — прямоугольный брус с сечением 1×2 и длиной l. Начальная часть имеет вид, изображенный на рис. 4, а конечная часть симметрична начальной относительно оси OO', проходящей через центры O и O'

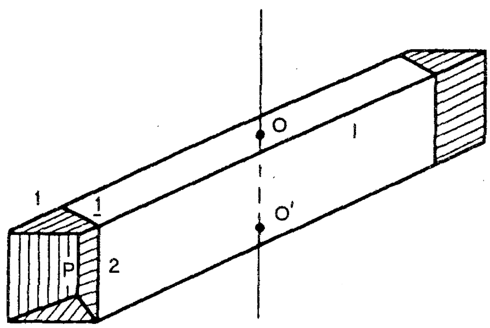

Рис. 4.

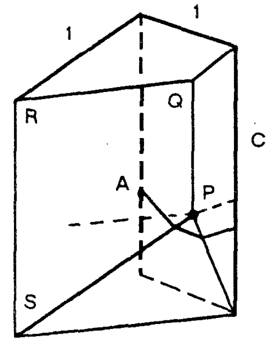

Рис. 5.

верхней и нижней граней средней части. Точка P у начальной части расположена от верхнего края на расстоянии $1/10$, а от вертикального края, где начальная часть стыкуется со средней, — на расстоянии $1/100$.

Обозначим через C прямоугольный контур, по которому начальная часть поверхности многогранника стыкуется со средней частью. Точка P коническая. Поэтому внутри грани $PQRS$ (рис. 5), вблизи P, можно выбрать лежащую чуть выше точки P точку A так, что кратчайшая на поверхности многогранника от A до контура C будет единственной и идущей ниже точки P (рис. 5). Точку B на конечной части берем симметричной A относительно оси OO'. Теперь, зафиксировав A и B, будем увеличивать длину l средней части. При достаточно большом l кратчайшая $\gamma = AB$ на поверхности такого многогранника пройдет от A ниже точки P к контуру C, затем — пойдет по средней части: подымется по боковой грани, перейдет на верхнюю и дойдет до точки O; дальнейшая часть γ будет симиметрична описанной части относительно оси OO'. Тогда для γ будет $\max_t \varphi(t) - \min_t \varphi(t) > \pi$.

Список литературы

1. *А. Д. Александров*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехтеориздат, М.— Л. (1948), 386 с.

Two questions concerning shortest paths on a convex surface

V. A. Zalgaller

How nuch can the shortest path on a convex surface differ from a plane curve? A conjecture on thr extremal situation. Examples.

Два питания про найкоротші на опуклій поверхні

А. В. Залгаллер

Наскільки найкоротша на опуклій поверхні може відрізнятися від плоскої кривої? Гіпотеза про екстремальну ситуацію. Приклади.