Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т 2, № 2, с. 201–211

УДК 514

Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. III

В. Ф. Игнатенко

Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе, Украина, 333036, г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 г.

Пусть G есть бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно гиперплоскостей, в вещественном пространстве E^m; μ_j-плоскости $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$) — линейные оболочки $G(u)$-орбит направлений симметрии (γ_j-плоскостям Π^{γ_j} параллельны гиперплоскости симметрии, сопряженные векторам Π^{μ_j}). Рассматривается взаимное расположение Π^{γ_j}, если $\Pi^{\gamma_j} \cap \Pi^{\gamma_k} = 0$ ($k = \overline{0,3}$; $j \ne k$) и $\dim\left(\Pi^{\gamma_0} + \Pi^{\gamma_1} + \Pi^{\gamma_2}\right) < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$.

Пусть F_n есть $(m-1)$-мерная нецилиндрическая поверхность порядка n в вещественном пространстве E^m, инвариантная относительно бесконечной группы G, которая порождена косыми отражениями относительно плоскостей и не допускает расширения; пусть μ_j-плоскости Π^{μ_j} ($j = \overline{0,p}$) — линейные оболочки бесконечных $G(u)$- орбит направлений симметрии u. Тогда Π^{μ_j} являются прямыми суммами таких γ_j-плоскостей Π^{γ_j} и d_j-плоскостей Π^{d_j}, что первым из них параллельны плоскости симметрии F_n, сопряженные векторам Π^{μ_j}; Π^{γ_j} определяют взаимное расположение Π^{μ_j}, которое полностью изучено при $p \le 2$ [2-4]. В настоящей статье рассматривается взаимное расположение четырех Π^{γ_j} ($\gamma_0 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$), если $\Pi^{\gamma_j} \cap \Pi^{\gamma_k} = 0$ ($k = \overline{0,3}; j \ne k$) и $\dim\left(\Pi^{\gamma_0} + \Pi^{\gamma_1} + \Pi^{\gamma_2}\right) < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$.

Введем следующие обозначения: $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = \nu$, $\gamma_3 = \sigma$; $\Pi^{r_1} = \Pi^\lambda \oplus \Pi^\mu$, $\Pi^{r_2} = \Pi^\lambda \oplus \Pi^\nu$, $\Pi^{r_3} = \Pi^\mu \oplus \Pi^\nu$, $\Pi^g = \Pi^\nu \cap \Pi^{r_1}$, $\Pi^r = \Pi^\lambda + \Pi^\mu + \Pi^\nu$, $\Pi^v = \Pi^\sigma \cap \Pi^r$, $\Pi^{v_\tau} = \Pi^\sigma \cap \Pi^{r_\tau}$ ($\tau = 1,2,3$), $\Pi^h = \Pi^v \cap \left(\Pi^\mu \oplus \Pi^\rho\right)$ и $\Pi^t = \Pi^v \cap \left(\Pi^\lambda \oplus \Pi^\rho\right)$, где $\Pi^\rho \Rightarrow \Pi^\nu \oplus \Pi^g$. Запись $\Pi^v = F\Pi^v$ будет означать, что расположение v-плоскости Π^v может быть произвольным. Речь идет о свободной Π^v при существовании одного афинного преобразования, позволяющего выделить всю G [1].

Основной результат статьи содержит

Теорема. *Пусть любые две из γ_j-плоскостей Π^{γ_j} ($j = \overline{0,3}$) пересекаются только в одной точке, причем* $\dim\left(\Pi^{\gamma_0} + \Pi^{\gamma_1} + \Pi^{\gamma_2}\right) < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ ($\gamma_0 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$). *Тогда расположение v-плоскости Π^v может быть произвольным, если число $v_1 = 0$ или при $v_1 > 0$ выполняется одно из следующих условий*:

$$g + v \le \mu + h + t + 1; \qquad g = \mu, \qquad v \le 2. \tag{1}$$

При доказательстве теоремы (пп.1°–7°) найдены уравнения специальных поверхностей F_n, инвариантных относительно соответствующих групп G; выделены фактически множества их плоскостей симметрии.

1°. Положим $d_j = 1$ и $\sigma = v$, что сохраняет общность рассуждений. Введем декартову систему координат $Oy_1 \ldots y_4\, z_1 \ldots z_r\, x_1 \ldots x_s$ $(m = r + s + 4)$. Поверхность F_n $(n > 2)$ с группой симметрий G зададим уравнением

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z_{\lambda+j}\right) + T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k z_{r_1+k}\right) + Py_4^2 = c, \tag{2}$$

где многочлены R, S, T, P и линейные функции ξ_i, ζ_j, χ_k зависят от переменных x_ω $(\omega = \overline{1,s})$. Здесь

$$\Pi^{\mu}0 = \Pi^1(y_1) \oplus \Pi^{\lambda}(z_i); \qquad \Pi^{\mu}1 = \Pi^1(y_2) \oplus \Pi^{\mu}(z_{\lambda+j});$$

$$\Pi^{\mu}2 = \Pi^1(y_3) \oplus \Pi^{g} \oplus \Pi^{\rho}(z_{r_1+k}); \qquad \Pi^{\mu}3 = \Pi^1(y_4) \oplus \Pi^{v}.$$

На основании леммы 10 работы [1] число $s \geq 2$.

В r_1-плоскости $\Pi^{r}1$ g-плоскость Π^g определим уравнениями

$$\begin{aligned} z_{g+\varepsilon} &= \sum_{s=1}^{g} A_{\varepsilon s} z_s, \qquad \varepsilon = \overline{1, \lambda - g}, \\ z_{\lambda+j} &= \sum_{s=1}^{g} B_{js} z_s, \qquad j = \overline{1, \mu}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\operatorname{rang} \| B_{js} \| = g$ и $\sum_j B_{js}^2 > 0$ при любом s. Поместив в Π^g новые координатные оси Oz'_s, из (3) получим такие формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} z_s &= z'_s, \qquad s = \overline{1,g}; \\ z_{g+\varepsilon} &= z'_{g+\varepsilon} + \sum_{s=1}^{g} A_{\varepsilon s} z'_s, \qquad \varepsilon = \overline{1, \lambda - g}; \\ z_{\lambda+j} &= z'_{\lambda+j} + \sum_{s=1}^{g} B_{js} z'_s, \qquad j = \overline{1, \mu}. \end{aligned} \tag{4}$$

Согласно (2) и (4), уравнение поверхности F_n принимает вид

$$\begin{aligned} &R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-g} \xi_{g+\varepsilon} z'_{g+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z'_{\lambda+j}\right) + \\ &+ T\left(y_3^2 + \sum_{s=1}^{g} H_s z'_s + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k z_{r_1+k}\right) + Py_4^2 = c, \end{aligned} \tag{5}$$

где H_s есть линейные функции от x_ω, удовлетворяющие формулам

$$R\left(\xi_s + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-g} A_{\varepsilon s}\,\xi_{g+\varepsilon}\right) + S\sum_{j=1}^{\mu} B_{js}\,\zeta_j = TH_s, \qquad s = \overline{1,g}. \tag{6}$$

Если при вещественных параметрах h_0, h_1 функции

$$H_s = h_0^{-1}\ \left(\xi_s + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-g} A_{\varepsilon s}\,\xi_{g+\varepsilon}\right) = h_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} B_{js}\,\zeta_j\ , \tag{7}$$

то многочлен

$$T = h_0 R + h_1 S,$$

что следует из (6), (7).

2°. Пусть $v = v_1$ ($\Pi^v \in \Pi^{r_1}$). В Π^{r_1} уравнения

$$z_{v+\varepsilon} = \sum_{p=1}^{v} a_{\varepsilon p}\, z_p, \qquad \varepsilon = \overline{1,\lambda - v}; \tag{9}$$

$$z_{\lambda+j} = \sum_{p=1}^{v} b_{jp}\, z_p, \qquad j = \overline{1,\mu}, \tag{10}$$

задают Π^v. Уравнение (5) определяет поверхность F_n (в новой системе координат), если g, H_s заменить v, κ_p ($p = \overline{1,v}$) соответственно. В формулах вида (6) положим

$$\kappa_p = \lambda_0^{-1}\left(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} a_{\varepsilon p}\, z_{v+\varepsilon}\right) = \lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\,\zeta_j\,, \tag{11}$$

где λ_0 и λ_1 — вещественные параметры. Тогда

$$P = \lambda_0 R + \lambda_1 S. \tag{12}$$

На основании (8), (12) $h_0 \neq c\lambda_0$ и $h_1 \neq c\lambda_1$, поскольку группа симметрий G поверхности F_n не допускает расширения ($T \neq cP$)*. Пусть, для определенности, число $v \leq g$. Тогда из (7) и (11) находим

$$\xi_p = h_0 h_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} B_{jp}\,\zeta_j - \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-g} A_{\varepsilon p}\,\xi_{g+\varepsilon} = \lambda_0\lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\,\zeta_j - \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} a_{\varepsilon p}\,\xi_{v+\varepsilon}\,. \tag{13}$$

В силу независимости ζ_j соотношения (13) при $v = g = \lambda$ дают

$$h_0 h_1^{-1}\, B_{jp} = \lambda_0\lambda_1^{-1}\, b_{jp}\,, \qquad p = \overline{1,v}, \tag{14}$$

где $\dfrac{h_0}{\lambda_0} \neq \dfrac{h_1}{\lambda_1}$. Поэтому расположение Π^v зависит от выбора $\Pi^g (g = v)$; коэффициенты их уравнений удовлетворяют равенствам (14). Значит, справедлива

---

* Здесь G не допускает расширения в таком смысле: исключает объединение линейных оболочек различных G- орбит и введение новых переменных типа z за счет x_ω.

Лемма 1. *Пусть $g = v = \lambda$, а линейные функции H_p $(p = \overline{1, v})$ и κ_p находятся по формулам* (7) *и* (11) *соответственно. Тогда $\Pi^1 = F\Pi^1$ и $\Pi^v \neq F\Pi^v$ $(v > 1)$, т.е. должны выполняться равенства* (14).

3°. Пусть $v = v_2$ $(\Pi^v \in \Pi^{r_2}, \Pi^v \notin \Pi^{r_1})$; v'-плоскость $\Pi^{v'} = \Pi^v \bigcap \Pi^{r_1}$ и w-плоскость $\Pi^w = \Pi^v \oplus \left(\Pi^{v'} \oplus \Pi^t\right)$. Так как $\Pi^{v'} = \Pi^v \bigcap \left(\Pi^\lambda \oplus \Pi^g\right)$, то $v' \leq g$. Поэтому имеем соотношения типа (11), если $\Pi^{v'}$ задать уравнениями вида (3), т.е., вообще говоря, $\Pi^{v'} \neq F\Pi^{v'}$.

Если $v = t$ $(v \leq \rho)$, то Π^v определим в $\Pi^\lambda \oplus \Pi^\rho$ уравнениями (9) и

$$z_{r_1+k} = \sum_{p=1}^{v} c_{kp} z_p, \qquad k = \overline{1, \rho}, \tag{15}$$

при rang $\| c_{kp} \| = v$. Поверхность F_n можно задать уравнением п. 2°, если

$$\kappa_p = h_3^{-1} \left(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} a_{\varepsilon p} \xi_{v+\varepsilon}\right) = h_4^{-1} \sum_{k=1}^{\rho} c_{kp} \chi_k, \qquad p = \overline{1,v}. \tag{16}$$

Многочлен

$$P = h_3 R + h_4 T. \tag{17}$$

При некоторых ζ_j, χ_k соотношения (7) и (16) выполняются. Следовательно, получена

Лемма 2. *В случае $v = v_2 = t$ v-плоскость $\Pi^v = F\Pi^v$, если в уравнении* (2) *поверхности F_n линейные функции ξ_s $(s = \overline{1,g})$, ξ_p $(p = \overline{1,v})$, ζ_j $(j = \overline{1, \mu})$, χ_k $(k = \overline{1,\rho})$ и многочлены R, S, T, P удовлетворяют формулам* (7), (16) *и* (8), (17).

В Π^r некоторую Π^w определим уравнениями (9), (10) и (15) при rang $\| b_{jp} \| =$ rang $\| c_{kp} \| = w$. Тогда получим соотношения, аналогичные (13). Поэтому, вообще говоря, $\Pi^v \neq F\Pi^v$, если $v = v_2$ и $w \neq 0$.

4°. При $v = v_3$ $(\Pi^v \in \Pi^{r_3}, \Pi^v \notin \Pi^{r_1})$ выберем, как и в п. 3°, $\Pi^{v'}$, $\Pi^h = \Pi^v \bigcap \left(\Pi^\mu \oplus \Pi^\rho\right)$ и Π^w; $\Pi^{v'} = \Pi^v \bigcap \left(\Pi^\mu \oplus \Pi^g\right)$, $v' \leq g$. Повторив рассуждения п. 3°, убедимся, что в каждом из случаев $v' \neq 0$ и $w \neq 0$ $(v = v_3)$, вообще говоря, $\Pi^v \neq F\Pi^v$.

Если $v = h$, то Π^v определим в $\Pi^\mu \oplus \Pi^\rho$ уравнениями

$$\begin{aligned} z_{\lambda+v+\varepsilon} &= \sum_{p=1}^{v} b_{\varepsilon p} z_{\lambda+p}, \qquad \varepsilon = \overline{1, \mu - v}; \\ z_{r_1+k} &= \sum_{p=1}^{v} c_{kp} z_{\lambda+p}, \qquad k = \overline{1, \rho}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\operatorname{rang} \| c_{kp} \| = v$. Выберем такие координатные оси $Oz'_{\lambda+i}$ $(i = \overline{1,r})$, что $Oz'_{\lambda+p} \in \Pi^v$; соответствующее преобразование координат вида (4) определяют уравнения (18). При этом получим следующее уравнение поверхности F_n:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v} \zeta_{v+\varepsilon} z'_{\lambda+v+\varepsilon}\right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k z'_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v} \eta_p z'_{\lambda+p}\right) = c. \tag{19}$$

Если

$$\eta_p = h_5^{-1}\left(\zeta_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v} a_{\varepsilon p}\zeta_{v+\varepsilon}\right) = h_6^{-1}\sum_{k=1}^{\rho} c_{kp}\chi_k, \tag{20}$$

то многочлен

$$P = h_5 S + h_6 T. \tag{21}$$

На основании (7), (19)-(21) имеет место

Лемма 3. *Если* $v = v_3 = h$, *то* $\Pi^v = F\Pi^v$. *Существует поверхность* F_n, *в уравнениях* (5) *и* (19) *которой линейные функции* H_s $(s = \overline{1,g})$, η_p $(p = \overline{1,v})$ *находятся по формулам* (7), (20) *соответственно.*

5°. Пусть $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Тогда число $v \le \rho = \nu - g$. Уравнения (9), (10), (15) задают Π^v в Π^r. Запишем уравнение поверхности F_n вида (5):

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} \xi_{v+\varepsilon} z'_{v+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z'_{\lambda+j}\right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{v} \chi_k z'_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v} \kappa_p z'_p\right) = c, \tag{22}$$

где κ_p есть линейные функции от x_ω. Выберем

$$\kappa_p = h_7^{-1}\left(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} a_{\varepsilon p}\xi_{v+\varepsilon}\right) = h_8^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\zeta_j = h_9^{-1}\sum_{k=1}^{\rho} c_{kp}\chi_k; \tag{23}$$

$$P = h_7 R + h_8 S + h_9 T. \tag{24}$$

Из формул (8) и (24) получим

$$P = (h_7 + h_0 h_9)R + (h_8 + h_1 h_9)S. \tag{25}$$

Неравенство нулю коэффициентов при R и S в (25) достигается соответствующим выбором числовых параметров. Поэтому существование поверхности F_n с уравнением (22), инвариантной относительно G, зависит от формул (7) и (23), т.е., вообще говоря, $\Pi^v \ne F\Pi^v$, как и в п. 2°.

Напомним, что строение множества плоскостей симметрии F_n зависит от H_s, κ_p. Полученные выше результаты (пп. 2°–4°) полезны, в частности, тем, что выделяют некоторые ограничения на выбор указанного множества. Соответствующее изменение κ_p даст возможность построить поверхность F_n при любом расположении Π^v. Действительно, если

$$f = g + v \le \mu, \tag{26}$$

то v-плоскость Π^v определим в Π^r уравнениями (9), (10) и (15), заменив z_p, $z_{v+\varepsilon}$, $z_{\lambda+j}$ переменными z'_{g+p}, $z'_{f+\varepsilon}$, $z'_{\lambda+j}$ соответственно ($\varepsilon = \overline{1, \lambda-f}$). В новой координатной системе $O\,\tilde{z}_i$ ($i = \overline{1,r}$) оси $O\,\tilde{z}_{g+p} \in \Pi^v$. Подействовав преобразованием координат на уравнение (5), получим

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-f} \xi_{f+\varepsilon}\,\tilde{z}_{f+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j\,\tilde{z}_{\lambda+j}\right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{s=1}^{g} H_s\,\tilde{z}_s + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k\,\tilde{z}_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v} \kappa_{g+p}\,\tilde{z}_{g+p}\right) = c. \tag{27}$$

Выберем в (27) линейные функции κ_{g+p} следующим образом:

$$\kappa_{g+p} = q_0^{-1}\left(\xi_{g+p} + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-f} a_{\varepsilon p}\xi_{f+\varepsilon}\right) = q_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\,\zeta_j = q_2^{-1}\sum_{k=1}^{\rho} c_{kp}\chi_k\,, \qquad p = \overline{1, v}, \tag{28}$$

где q_0, q_1, q_2 — вещественные параметры. Функции ξ_i и ζ_j, удовлетворяющие формулам (7) и (28), существуют. Так как $v \le \nu - g$, то неравенство $v > \mu - g$ исключается; для v выполняется (26). Следовательно, получена

Лемма 4. *Если* $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, *то* $\Pi^v = F\Pi^v$, *причем* $v \le \nu - g$.

6°. Рассмотрим теперь более детально отдельные ограничения на расположение Π^{γ_j} ($j = \overline{0,3}$) и на выбор чисел γ_j, при которых существует поверхность F_n с группой симметрий G.

Пусть в случае $v = v_1$ (п. 2°) выполняется неравенство (26). Новые оси $O\tilde{z}_{g+p}$ поместим в Π^v; в качестве κ_{g+p} возьмем линейные функции в (28), имеющие множители q_0^{-1} и q_1^{-1}. Так как $\Pi^v \cap \Pi^g = 0$, то ранг $\mu\times f$-матрицы со строками B_{js} и b_{jp} равен f. Поэтому H_s, κ_{g+p} могут быть найдены по вышеуказанным для них формулам. Следовательно, имеет место

Лемма 5. *При* $g + v \le \mu$ ($v = v_1$) *v-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$, если $\Pi^v \cap (\Pi^\mu \oplus \Pi^g) = 0$.

Если $f > \mu$ ($v = v_1$), то положим

$$d = f - \mu. \tag{29}$$

Так как $v \le \mu$, то $d \le g$. Представим Π^v в виде $\Pi^d \oplus \Pi^{\mu-g}$, где $\Pi^d \cap \Pi^{\mu-g} = 0$. Выберем в Π^{r_1} новые координатные оси Oz_i'' $(i = \overline{1, r_1})$ так, что $Oz''_{g+\delta} \in \Pi^{\mu-g}$ $(\delta = \overline{1, \mu - g})$. Запишем уравнение поверхности F_n:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\mu} \xi_{\mu+\varepsilon} z''_{\mu+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z''_{\lambda+j}\right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{s=1}^{g} H_s z_s'' + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k z_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{\delta=1}^{\mu-g} \kappa_{g+\delta} z''_{g+\delta}\right) = c. \tag{30}$$

Линейные функции $\kappa_{g+\delta}$ зададим формулами типа (28):

$$\kappa_{g+\delta} = q_3^{-1}\left(\xi_{g+\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\mu} a_{\varepsilon\delta}\xi_{\mu+\varepsilon}\right) = q_4^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{j\delta}\zeta_j,$$
$$\delta = \overline{1, \mu - g}; \qquad \operatorname{rang} \| b_{j\delta} \| = \mu - g. \tag{31}$$

Согласно (30) и (31), многочлен

$$P = q_3 R + q_4 S. \tag{32}$$

Если $\alpha = g + d \le \lambda$, то наряду с (30) рассмотрим уравнение F_n при новых координатных осях $O\tilde{z}_i$ $(i = \overline{1, r_1})$; $O\tilde{z}_{g+l} \in \Pi^d$, $l = \overline{1,d}$. Для получения этого уравнения F_n зададим Π^d в $(r_1 - g)$-плоскости с уравнением $z_s' = 0$ $(s = \overline{1,g})$ следующим образом:

$$z'_{\alpha+\varepsilon} = \sum_{l=1}^{d} a'_{\varepsilon l} z'_{g+l}, \qquad \varepsilon = \overline{1, \lambda - \alpha};$$
$$z'_{\lambda+j} = \sum_{l=1}^{d} b'_{jl} z'_{g+l}, \qquad j = \overline{1, \mu}; \qquad \operatorname{rang} \| b'_{jl} \| = d. \tag{33}$$

Уравнения (33) определяют формулы преобразования координат вида

$$z'_{g+l} = \tilde{z}_{g+l}, \qquad l = \overline{1,d},$$
$$z'_{g+d+\varepsilon} = \tilde{z}_{g+d+\varepsilon} + \sum_{l=1}^{d} a'_{\varepsilon l}\tilde{z}_{g+l}, \qquad \varepsilon = \overline{1, \lambda - \alpha};$$
$$z'_{\lambda+j} = \tilde{z}_{\lambda+j} + \sum_{l=1}^{d} b'_{jl}\tilde{z}_{g+l}. \tag{34}$$

Подействовав преобразованием (34) на уравнение (5), получим

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\alpha} \xi_{\alpha+\varepsilon}\tilde{z}_{\alpha+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j \tilde{z}_{\lambda+j}\right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{s=1}^{g} H_s z_s' + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_k z_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{l=1}^{d} C_l \tilde{z}_{g+l}\right) = c, \tag{35}$$

где

$$R\left(\xi_{g+l}+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\alpha}a'_{\varepsilon l}\xi_{\alpha+\varepsilon}\right)+S\sum_{j=1}^{\mu}b'_{jl}\zeta_j=PC_l\,,\qquad l=\overline{1,d}. \tag{36}$$

Так как ξ_i и ζ_j связаны соотношениями (7) и (31), то по таким же формулам функции C_l находить нельзя при произвольном расположении Π^v.

Перепишем (36) так:

$$RA_l+SB_l=PC_l\,. \tag{37}$$

Вид линейных функций A_l, B_l ясен из (36), (37). На основании (32) и (37)

$$\frac{R}{S}=\frac{q_4C_l-B_l}{A_l-q_3C_l}\,,\qquad l=\overline{1,d},\qquad \mu>g. \tag{38}$$

Следовательно, $R=R_l(q_4C_l-B_l)$, $S=R_l(A_l-q_3C_l)$

или

$$A_1-q_3C_1=a_1(A_2-q_3C_2)=\ldots=a_{d-1}(A_d-q_3C_d); \tag{39}$$
$$q_4C_1-B_1=a_1(q_4C_2-B_2)=\ldots=a_{d-1}(q_4C_d-B_d).$$

Из (39) при $d>1$ находим

$$q_3(a_{\alpha-1}C_\alpha-a_{\beta-1}C_\beta)=a_{\alpha-1}A_\alpha-a_{\beta-1}A_\beta\,;$$
$$q_4(a_{\alpha-1}C_\alpha-a_{\beta-1}C_\beta)=a_{\alpha-1}B_\alpha-a_{\beta-1}B_\beta\,, \tag{40}$$

где $a_0=1$ и $\alpha,\beta=\overline{1,d}$, $\alpha<\beta$. На основании (40)

$$a_{\alpha-1}A_\alpha-a_{\beta-1}A_\beta=q_3q_4^{-1}(a_{\alpha-1}B_\alpha-a_{\beta-1}B_\beta). \tag{41}$$

Из формул (7) и (31) получим

$$\zeta_j=H_j(\xi_i),\qquad j=\overline{1,\mu}; \tag{42}$$

$H_j(\xi_i)$ — линейные функции от ξ_i ($i=\overline{1,\lambda}$). Подставив в (41) значения ζ_j, найденные по формулам (42), получим линейную зависимость между ξ_i, если расположение Π^v не является специальным.

При $d=1$ положим

$$C_1=A_1\,,\qquad S=S_0A_1\,. \tag{43}$$

Согласно (38) и (43),

$$\frac{R}{S_0A_1}=\frac{B_1-q_4A_1}{(q_3-1)A_1}\,.$$

Значит, $(q_3-1)R=(B_1-q_4A_1)S_0$; поверхность F_n ($n>2$) с построенной группой G существует.

Условие $g+d\le\lambda$ можно исключить. Действительно, вместо Oz_i ($i=\overline{1,r_1}$) выберем новые координатные оси Oz'_i так, что $Oz'_l\in\Pi^d$, $l=\overline{1,d}$. Тогда имеют место формулы вида (36), если в них убрать индекс g, не влияющий на дальнейшие рассуждения.

Итак, доказана

Лемма 6. *Пусть* $g + v - \mu = d > 0$ $(v = v_1)$, *причем* $g < \mu$, *а линейные функции* H_s $(s = \overline{1,g})$, $\kappa_{g+\delta}$ $(\delta = \overline{1, \mu - g})$ *находятся по формулам* (7) *и* (31). *Тогда* v*-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$ *при* $d = 1$.

В случае $g = \mu$ рассмотрим уравнение (35) поверхности F_n. Положим в (36)

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = B_2, \quad R = R_0 B_2, \quad S = S_0 A_1. \tag{44}$$

Тогда

$$\frac{R_0}{S_0} = \frac{A_1 - B_1}{B_2 - A_2}. \tag{45}$$

Следовательно,

$$R_0 = R_0'(A_1 - B_1); \qquad S_0 = R_0'(B_2 - A_2). \tag{46}$$

Поверхность F_n при соотношениях (44)-(46) существует. Поэтому значение $d = 2$ возможно. Значит, получена

Лемма 7. *Если* $g = \mu$ $(v = d)$, *то* v*-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$ *при* $d \le 2$.

Подчеркнем, что при доказательстве леммы 7 важен тот факт, что формулы (38) не выполняются.

7°. Пусть $v > v_1 > 0$, $v_2 = v_3 = 0$, $w = v - v_1$. Рассмотрим первоначально случай (26), $f \le \mu$. Согласно лемме 5, расположение Π^{v_1} может быть любым. Этому условию удовлетворяет и Π^v; число $w \le \rho = v - g$ используется в уравнении вида (27). В случае $d = f - \mu > 0$ находим вместо формул (31) формулы, аналогичные (23); для многочлена P имеют место соотношения (24), (25). Так как в конечном итоге P зависит только от R, S и соответствующих параметров, то утверждения, высказанные в леммах 6 и 7, в своей основе сохраняются. Число $g < \mu$, поскольку $w > 0$. Для нахождения формул, аналогичных (36), используется v_1-плоскость $\Pi^{v_1} = \Pi^v \ominus \Pi^w = \Pi^d \oplus \Pi^{\mu - g}$.

Лемма 8. *При* $v > v_1 > 0$, $v_2 = v_3 = 0$ v*-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$, *если*

$$g + v \le \mu + 1. \tag{47}$$

Если в лемме 8 считать $v \ge v_1$, то на основании леммы 7 получим еще одно условие:

$$g = \mu, \qquad v \le 2. \tag{48}$$

При этом ограничения, даваемые неравенством (47), для подробного описания ситуации разобъем на два условия [5]: $g + v \le \mu$; $g < \mu$, $g + v = \mu + 1$. Второе из них полезно при наличии (48).

Пусть $v > v_2 > 0$, $v_1 = v_3 = 0$ или $v > v_3 > 0$, $v_1 = v_2 = 0$. Тогда $v \le \rho$. Как и в пп. 3°–5°, убеждаемся, что имеет место

Лемма 9. *Если* $v > v_2 > 0, v_1 = v_3 = 0$ (*или* $v > v_3 > 0, v_1 = v_2 = 0$), *то v-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$.

При $v_1 > 0$, $v_3 > 0$, $v_2 = 0$ ($\Pi^v \notin \Pi^{r_1}$) имеем по существу случай $v_1 > 0$, $v_2 = 0$, $h > 0$, где h есть размерность пересечения Π^v с $\Pi^\mu \oplus \Pi^\rho$. На основании формул (20) и леммы 8 справедлива

Лемма 10. *При* $v_1 > 0$, $h > 0$ ($v \ge v_1 + h$) *v-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$, *если*

$$g + v \le \mu + h + 1. \tag{49}$$

Пусть $v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 = 0$. Леммы 2 и 8 показывают, что лемма 10 распространяется и на этот случай, если h заменить на размерность t пересечения Π^v с $\Pi^\lambda \oplus \Pi^\rho$.

В случае $v_1 = 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$ используются формулы, аналогичные (16), (20) и (23). Значит, имеет место

Лемма 11. *Если* $v_1 = 0, v_2 > 0, v_3 > 0$, *то v-плоскость* $\Pi^v = F\Pi^v$.

Так как $\dim (\Pi^v \oplus \Pi^{v_1}) \le \rho$, то при $v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 > 0$, неравенство (49) усиливается:

$$g + v \le \mu + h + t + 1. \tag{50}$$

Итак, неравенство (50) дает одно из условий (1) сформулированной во введении теоремы, поскольку оно справедливо, если $h \ge 0$, $t \ge 0$. Второе условие содержится в лемме 7. Леммы 9 и 11 охватывают случай $v_1 = 0$. Теорема доказана.

Полученная теорема может быть полезной, в частности, при изучении квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от точки многообразия [6,7].

Таким образом, предложенный здесь метод изучения инвариантов групп G (он назван перестроечным) дает ключ к построению всех диких групп $G = G_W \left| \Pi^{\mu_{j'}} \cap \sum_{j \ne j'} \Pi^{\mu_j} \ne 0 \right.$ $(0 \le j' \le p)$; при этом получены все основные типы образующих алгебр инвариантов групп G_W

Список литературы

1. *В. Ф. Игнатенко*, О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями.— Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Пробл. геометрии (1989), т. 21, с. 155–208.
2. *В. Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I.— Укр. геометр. сб. (1989), вып. 32, с. 47–60.
3. *В. Ф. Игнатенко*, О специальных алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии.— Укр. геометр. сб. (1990), вып. 33, с. 52–55.

4. *В. Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II.— Укр. геометр. сб. (1991), вып. 34, с. 41–43.
5. *В. Ф. Игнатенко*, Бесконечные группы, порожденные косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. II. (1989), Деп. в УкрНИИНТИ 19.02.90, № 244-Ук90, 34 с.
6. *И. М. Гельфанд, А. С. Мищенко*, Квадратичные формы над коммутативными групповыми кольцами и k-теория.— Функцион. анализ и его прил. (1969), т. 3, вып. 4, с. 28–33.
7. *С. С. Рышков, Е. П. Барановский*, Классические методы теории решетчатых упаковок.— Успехи мат. наук (1979), т. 34, № 4, с. 4–63.

Algebraical surfaces with an infinite set of skew symmetry planes. III.

V. F. Ignatenko

Let G be the infinite group, generated by skew reflections with respect to hyperplanes in a real space E^m; μ_j-planes $\Pi^{\mu j} = \Pi^{dj} \oplus \Pi^{\gamma j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$) be the linear envelopes of orbits $G(u)$ of directions for symmetry (γ_j — the hyperplanes of symmetry, conjugated to vectors $\Pi^{\mu j}$, are parallel to γ_j-planes $\Pi^{\gamma j}$). The mutual disposition of $\Pi^{\gamma j}$ in the case, of $\Pi^{\gamma j} \cap \Pi^{\gamma k} = 0$ and $\dim\left(\Pi^{\gamma 0} + \Pi^{\gamma 1} + \Pi^{\gamma 2}\right) < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ is considered.

Алгебраїчні поверхні з нескінченною множиною площин косої симетрії. III

В. Ф. Ігнатенко

Нехай G є нескінченна група, породжена косими відбиттями відносно гіперплощин, у дійсному просторі E^m; μ_j — площини $\Pi^{\mu j} = \Pi^{dj} \oplus \Pi^{\gamma j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$) — лінійні оболонки $G(u)$-орбіт напрямів симетрії (γ_j-площинам $\Pi^{\gamma j}$ паралельні гіперплощини симетрії, спряжені векторам $\Pi^{\mu j}$). Розглядається взаємне розміщення $\Pi^{\gamma j}$, якщо $\Pi^{\gamma j} \cap \Pi^{\gamma k} = 0$ ($k = \overline{0,3}$; $j \ne k$) та $\dim\left(\Pi^{\gamma 0} + \Pi^{\gamma 1} + \Pi^{\gamma 2}\right) < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$.