Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 232–249

УДК 514

Теоремы единственности для пространственноподобных выпуклых многогранников в псевдоевклидовом пространстве

А. Д. Милка

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 15 декабря 1993 года

Доказывается следующая теорема, представляющая собой обобщение на сферы четырехмерного псевдоевклидова пространства известных теорем Коши и Минковского. Замкнутые комбинаторно эквивалентные выпуклые многогранники в пространстве Лобачевского или в пространстве де Ситтера, деситтеровские — пространственноподобные многогранники, равны, если у них соответствующие плоские углы равны. Ранее эта теорема была установлена автором для выпуклых многогранников в сферическом пространстве.

В разработанной А.Д. Александровым [1, 2] и А. В. Погореловым [3] теории общих выпуклых поверхностей в пространствах с постоянной кривизной играют большую роль известные теоремы единственности О. Коши и Г. Минковского для для замкнутых выпуклых многогранников и соответствующие теоремы единственности для многогранных шапочек. Эти результаты и распространяются в данной работе на выпуклые пространственноподобные многогранники. Специфика понятия изометрии, анализ и сравнение оригинального доказательства теоремы Коши и доказательства теоремы Минковского, а также возможных обобщений этих теорий на неевклидовы пространства выделяют в теории два подхода к вопросу о единственности многогранников. Эти подходы, обычно считавшиеся эквивалентными, ведут к отличающимся теоремам единственности, в том числе и на сферах псевдоевклидова пространства — в пространствах Лобачевского и де Ситтера. При уточнении формулировок этих известных теорем фактически устанавливается новая теорема единственности для замкнутых выпуклых многогранников в неевклидовых пространствах, являющаяся естественным обобщением одновременно и теоремы Коши, и теоремы Минковского — теоремы 2.3 и 3.1.

Сначала, в разд. 1, устанавливаются теоремы о равенстве изометричных выпуклых пространственноподобных многогранников в трехмерном всевдоевклидовом пространстве. На псевдоевклидовы многогранники переносятся известные принципы максимума А.В. Погорелова для изометричных выпуклых многогранников и их следствия — теоремы единственности для изометричных поверхностей, закрепленных относительно точки или плоскости, причем опускается достаточно громоздкое исследование этих принципов максимума для пространственноподобных выпуклых конусов. Здесь используется общепринятое понятие изометрии по С. Ф. Кон-Фоссену [4]: отображающиеся одна на другую поверхности изометричны, если любые соответствующие при этом кривые — равной длины. Это понятие изометрии включает выпуклые многогранники в метрический класс общих выпуклых поверхностей. Известно, что первыми теоремами в духе этого понятия были теорема А. Д. Александрова о равенстве замкнутых выпуклых многогранников с равными развертками [2] и теорема С. П. Оловянишникова о равенстве изометричных замкнутых общей выпуклой поверхности и выпуклого многогранника [5]. В разделе 1 под изометричными многогранниками и понимаются многогранники с равными развертками; этим исключается жесткое топологическое требование об одинаковости структур совокупности естественных ребер и граней сравниваемых многогранников — требование, присутствующее в условиях теоремы Коши; считается также, что между равными развертками изометричных многогранников установлено надлежащее взаимно однозначное точечное соответствие.

Замкнутые выпуклые многогранники, рассматриваемые в теореме Коши, в указанном только что смысле изометричны. Но изометрия связывается с их естественными развертками, что представляется сильным дополнительным требованием. Особенно это требование сказывается при формальном перенесении теоремы Коши в сферическое и гиперболическое пространства [6]. Там теорема переопределена, и, как установлено в [6], для сферического пространства справедливо утверждение, по существу наследующее исходные условия, общие и для теоремы Коши, и для теоремы Минковского: замкнутые комбинаторно эквивалентные многогранники равны, если у них соответствующие плоские углы равны. В итоге использование естественной комбинаторной структуры многогранников вносит существенное дополнение в требование об их изометрии. Теоремы Коши и Минковского, комбинаторно эквивалентные многогранники в псевдоевклидовом пространстве и на его сферах, а также соответствующие леммы о деформациях выпуклых ломаных рассматриваются в разделах 2 и 3.

1. Изометрические поверхности

Перенесем на псевдоевклидовы многогранники с краем известные принципы максимума А.В. Погорелова [3]; будем считать, что в рассматриваемом пространстве принята ортогональная система координат x, y, z с пространственноподобной координатной плоскостью xy; считаем также, что сравниваемые изометричные многогранники расположены в полупространстве $z > 0$.

Теорема 1.1. *Пусть P_1 и P_2 — изометричные выпуклые пространственноподобные многогранники, обращенные одинаковыми сторонами к плоскости xy. Будем обозначать через $z_1(X)$ и $z_2(X)$ высоты над плоскостью xy соответствующих по изометрии точек X многогранников P_1 и P_2. Тогда функция $\delta z(X) = z_1(X) - z_2(X)$ — либо постоянная, либо достигает максимального положительного или минимального отрицательного значений только на границах многогранников.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $\delta z \not\equiv \mathrm{const}$, и пусть, например, значение $h = \max \delta z > 0$ достигается в некоторых внутренних точках многогранников P_1 и P_2. Тогда найдется настоящая внутренняя вершина A, в которой $z_1(A) - z_2(A) = h$ и в достаточно малой окрестности которой $z_1(X) - z_2(X) \leq h$, причем существуют точки, где $z_1(X) - z_2(X) < h$. Можно, однако, показать, как это имеет место и в случае евклидова пространства [3], что такое локальное расположение изометричных многогранников P_1 и P_2 ведет к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть P_1 и P_2 — изометричные выпуклые пространственноподобные многогранники, обращенные одинаковыми сторонами к плоскости xy и однозначно проектирующиеся временеподобными лучами из начала координат O. Будем обозначать через $r_1^2(X)$ и $r_2^2(X)$ квадраты радиусов-векторов соответствующих по изометрии точек многогранников P_1 и P_2. Тогда функция*

$$\delta r(X) = \frac{r_1^2(X) - r_2^2(X)}{z_1(X) + z_2(X)}$$

либо постоянная, либо достигает максимального положительного или минимального отрицательного значений только на границах многогранников.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\delta r \not\equiv \mathrm{const}$, и пусть, например, значение $2h = \max \delta r > 0$ достигается в некоторых внутренних точках многогранников P_1 и P_2. Тогда найдется внутренняя вершина A, в которой $\delta r(A) = 2h$ и в сколь угодно малой окрестности которой будут существовать точки X, где $\delta r(X) < 2h$. Увеличим высоты всех точек P_1 и уменьшим высоты всех точек P_2 на одну и ту же величину h. Тогда для преобразованных P_1 и P_2

$$\delta \tilde{r} = \frac{\tilde{r}_1^2 - \tilde{r}_2^2}{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{z_1 + z_2} - 2h = \delta r - 2h.$$

Отсюда следует, что в точке A имеем локальное вложение многогранников: $\tilde{r}_1^2(A) = \tilde{r}_2^2(A)$, а в достаточно малой окрестности этой точки $\tilde{r}_1^2(X) - \tilde{r}_2^2(X) \le 0$, причем существуют точки X, где неравенство строгое. Так как многогранник P_1 поднимался в положительном направлении оси z, то $\tilde{r}_1^2(A) < 0$ и вектор $\tilde{r}_1(A)$ — временеподобный; тогда временеподобный и вектор $\tilde{r}_2(A)$, поскольку $\tilde{r}_1^2(A) = \tilde{r}_2^2(A)$. Проведем через точку O пространственноподобные плоскости $\tau_1 \equiv \tau_2$, ортогональные соответственно векторам $\tilde{r}_1(A)$ и $\tilde{r}_2(A)$. Очевидно, что в новом расположении многогранников P_1 и P_2 в окрестности точки A они обращены к точке O и соответственно к плоскостям τ_1 и τ_2 одинаковыми сторонами, теми, которыми были обращены к плоскости xy до перемещения. Такое локальное вложение многогранников P_1 и P_2, как это вытекает из теоремы 1.1, ведет к противоречию с нашим предположением. Теорема доказана.

По-видимому, введенный в доказательстве теоремы 1.2 прием одновременного перемещения изометричных поверхностей P_1 и P_2 может быть применен и в евклидовом случае, где доказательство осуществлялось другим методом.

Сформулируем непосредственные следствия принципов максимума.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. И пусть вдоль границ многогранников $\delta\, z(X) \equiv const$. Тогда многогранники равны — всюду на многогранниках $\delta\, z \equiv const$, в частности, выпуклые изометричные пространственноподобные шапочки-многогранники равны.*

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2. И пусть вдоль границ многогранников $\delta\, r(X) \equiv const$. Тогда многогранники равны — всюду на многогранниках $\delta\, r \equiv const$, в частности, закрепленные относительно точки O выпуклые изометричные многогранники, у которых в соответствующих граничных точках $r_1^2(X) \equiv r_2^2(X)$, равны.*

В евклидовском варианте теорема 1.4 устанавливалась А. Д. Александровым и Е.П. Сенькиным в [7]. Ими предложен метод доказательства, основывающийся на непрерывном перемещении одной из поверхностей вплоть до их локального вложения. Метод усилен в монографии [8], где применялись малые перемещения одной из поверхностей; доказательство здесь основывалось на известной лемме В.А. Залгаллера о деформациях замкнутой ломаной в плоскости постоянной кривизны при монотонных изменениях углов ломаной; с помощью этой леммы устанавливается также невозможность локальных вложений изометричных пространственноподобных выпуклых многогранников, рассмотренных в доказательствах теорем 1.1 и 1.2. Отметим, что метод локального вложения использовался в [9] для доказательства теоремы об однозначной определенности метрикой общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского; в пространстве де Ситтера такая же теорема при некотором ограничении для пространственноподобных поверхностей доказана в [10] с применением, как и в [9], известного отображения А.В. Погорелова пар изометричных объектов [3]; обе теоремы можно рассматривать как теоремы единственности на сферах псевдоевклидова пространства.

В связи с известными исследованиями замкнутых изгибаемых полиедров Брикара–Р. Коннели–К. Стеффена [11, 12] представляется небезынтересной следующая задача как для пространственноподобных, так и для евклидовских невыпуклых многогранников: построить гомеоморф шапочки, допускающий нетривиальное, с сохранением комбинаторной структуры, изгибание при скольжении края вдоль некоторой плоскости. Теоремы единственности для выпуклых шапочек — и в евклидовом, и в псевдоевклидовом пространствах — дают основания надеяться на существование подобных, непрерывно изгибаемых без самопересечений полиедров.

2. Теоремы Коши и Минковского

В этом пункте рассматриваются классические теоремы единственности для евклидовских многогранников.

Многогранники P и P' называются комбинаторно эквивалентными, или одинаково составленными, или изоморфными, если между их элементами — вершинами, ребрами, гранями — установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее принадлежность.

Теорема 2.1. *Замкнутые выпуклые многогранники P и P', одинаково составленные из равных граней, равны, т.е. совмещаются в пространстве движением.*

Это — известная теорема Коши, первый важнейший результат теории выпуклых поверхностей, установленный для выпуклых многогранников. Вторым таким результатом является теорема Минковского. Ее формулировке также предпошлем определение.

Выпуклые многогранники P и P' называются поставленными в соответствие по параллельности внешних нормалей, если между их гранями установлено такое взаимно однозначное соответствие, при котором внешние нормали соответствующих граней равны.

Теорема 2.2. *Пусть P и P' — замкнутые выпуклые многогранники, поставленные в соответствие по параллельности внешних нормалей. Предположим, что площади соответствующих граней равны. Тогда многогранники P и P' равны и совмещаются в пространстве параллельным переносом.*

Минковский не связывал свой результат, полученный при исследованиях по теории объемов, с результатами Коши. Однако оказывается, что его теорема является некоторым естественным обобщением теоремы Коши, это усматривается в известных доказательствах. Имеются в виду оригинальное доказательство, данное самим Коши, и идейно близкий вариант доказательства теоремы Минковского, данного А. Д. Александровым. На определенном этапе своего исследования Коши фактически подходит и к теореме Минковского.

Рассмотрим схему доказательства, предложенного Коши. По условию теоремы к многогранникам P и P' реально предъявляются два требования: соответствующие плоские углы равны, соответствующие ребра равны. Если многогранники P и P' — не равные, то у P возможны ребра, при которых двугранные углы бо́льшие, чем при соответствующих ребрах P', и возможны ребра, при которых двугранные углы меньшие. Этим ребрам сопоставим знаки: плюс — первому типу, минус — второму типу ребер. Согласно лемме Коши об изгибаниях многогранного угла, в каждой вершине P, из которой исходят отмеченные знаками ребра, при обходе вокруг вершины насчитывается не менее четырех перемен знаков. По другой, комбинаторной лемме Коши такая расстановка знаков на ребрах замкнутого выпуклого многогранника невозможна. Следовательно, у многогранников P и P' все двугранные углы равны. Заметим, что это заключение получено только из первого требования, предъявляемого к многогранникам. Выясним, как тогда характеризуются многогранники внешнегеометрически, не настаивая пока на выполнении второго требования. Очевидно, что P и P' допускают взаимное расположение, при котором эти многогранники соответствуют друг другу, согласно с комбинаторной эквивалентностью, по параллельности внешних нормалей; будем считать, что они так именно и расположены. Пусть k — число ребер, f — число граней у многогранников. Отличие соответствия многогранников от равенства определяется f параметрами, являющимися опорными числами граней многогранника P'. Таким образом, если вместо второго требования предъявить к многогранникам иные ограничения, оформив их внутреннегеометрически как f условий, то в этом случае должно также последовать равенство P, P'; естественным из таких условий является равенство площадей у f пар соответствующих граней многогранников. Тем самым получен своеобразный вариант теоремы Коши, включающий и частную формулировку теоремы Минковского — для комбинаторно эквивалентных многогранников P и P'. Исходное второе требование к P и P' более жесткое, поскольку для чисел ребер и граней многогранников $2k \geq 3f \sim k >> f$. И теорема Коши переопределена, переопределенность создает именно условие равенства комбинаторных структур изометричных многогранников.

Частный вариант теоремы Минковского доказывается методом Александрова по той же схеме Коши. Только эта схема применяется к сетке линий на многограннике P, двойственной к сетке ребер. Лемма Коши о деформации выпуклого многогранного угла или эквивалентная ей лемма о деформации с сохранением длин сторон выпуклого сферического многоугольника заменяется здесь двойственной к ней леммой Александрова о деформации с сохранением величин углов плоского выпуклого многоугольника при сохранении площади. Частного варианта теоремы достаточно, чтобы вывести из него как следствие и общее утверждение теоремы. Действительно, рассмотрим в условиях теоремы 2.2 выпуклые многогранники $P_t = tP + (1 - t)P'$ и $P_{1-t} = (1 - t)P + tP'$, полученные векторным суммированием P и P' по Минковскому при $0 < t < 1$. Легко проверяется, что многогранники P_t и P_{1-t} комбинаторно эквивалентны и в то же время удовлетворяют теореме 2.2 — для них, следовательно, выполняется частный вариант этой теоремы. Значит, P_t и P_{1-t} совмещаются параллельным переносом. А тогда параллельным переносом совмещаются также многогранники P и P' как пределы $P' = \lim P_t$ и $P = \lim P_{1-t}$ при $t \to 0$. Этот прием, а именно сведение теоремы к случаю комбинаторно эквивалентных многогранников, применим и к вариантам теоремы Минковского, установленным Александровым, в которых периметры граней, соответствующих по параллельности внешних нормалей, равны или соответствующие параллельные грани друг в друга не помещаемы. Условия равенства периметров и непомещаемость граней соответственно сохраняются при переходе к многогранникам P_t и P_{1-t}. В процессе доказательства по схеме Александрова соответствующая лемма о четырех переменах знаков при изменении длин сторон граней устанавливается с помощью леммы 3.3.

Сформулируем полученную новую теорему, которую можно рассматривать как обобщающую теоремы Коши и Минковского.

Пусть P и P' — замкнутые выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники. Пусть у этих многогранников соответствующие плоские углы и площади соответствующих граней равны. Тогда многогранники P и P' равны и совмещаются в пространстве движением.

Эта теорема и может теперь распространяться на сферическое пространство [1, 6], но не только на сферическое — в следующем разделе она будет перенесена как на сферы псевдоевклидова пространства в пространства Лобачевского и де Ситтера. В условиях таким образом обобщенной теоремы требование равенства площадей соответствующих граней излишне, оно выполняется автоматически. А теорема тогда является в равной степени распространением и теоремы Коши, и теоремы Минковского.

Теорема 2.3. *Пусть P и P' — замкнутые выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники в сферическом пространстве. И пусть у этих многогранников соответствующие плоские углы равны. Тогда многогранники P и P' равны и совмещаются в пространстве движением.*

Доказательство. Выпуклый многогранник в сферическом пространстве интерпретируется как пересечение с единичной сферой строго выпуклого многогранного конуса в четырехмерном евклидовом пространстве с вершиной в центре сферы. Двойственный к названному конусу выпуклый многогранный конус, также с вершиной в центре сферы, определяет на сфере выпуклый многогранник, называемый полярным к исходному. Взаимно полярные многогранники в сферическом пространстве имеют двойственные комбинаторные структуры. Плоскому углу одного из многогранников соответствует дополнительный до π плоский угол другого; из двойственности плоским углам одного многогранника, сходящимся в общей вершине, соответствуют плоские углы целой грани другого многогранника; ребра одного из многогранников дополняют по величине до π соответствующие двугранные углы другого.

Согласно результату Коши, так как соответствующие плоские углы P и P' равны, их соответствующие двугранные углы также равны. Полярные многогранники к многогранникам P и P' тоже удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно, и у них соответствующие двугранные углы равны, а этой значит, что у P и P' равны ребра. Таким образом, многогранники P и P' равны. Теорема доказана.

Доказательство равенства двугранных углов и ребер P и P' было получено благодаря рассмотрению полярных многогранников исключительно с помощью вспомогательных результатов Коши. Можно было бы обойтись и без полярных многогранников. Тогда для доказательства равенства ребер пришлось бы воспользоваться вспомогательной леммой Александрова о деформациях многоугольников и применявшейся им схемой доказательства к теореме Минковского. Но при обобщении теоремы на сферы псевдоевклидова пространства одновременное привлечение вспомогательных результатов и Коши, и Александрова обязательно, поскольку полярные многогранники и полярные сферические многоугольники принадлежат метрически разным сферам.

3. Комбинаторно эквивалентные шапочки

Теорема 2.3 полностью переносится вместе с доказательством на замкнутые выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники на единичных сферах псевдоевклидова пространства — пространствах Лобачевского и де Ситтера; рассматриваются пространственноподобные деситтеровские многогранники. Здесь можно ограничиться только формулировкой соответствующей теоремы, которую к тому же достаточно установить, в силу двойственности, только для одного из пространств. А чтобы провести доказательства реально, необходимы только вспомогательные результаты о деформациях замкнутых выпуклых ломаных в плоскостях сферической, Лобачевского и де Ситтера, которые естественно называть леммами Коши и Александрова. Эти и примыкающие результаты и излагаются в данном разделе. В силу двойственности, ломаные в плоскости де Ситтера не рассматриваются, так как для этого достаточно получить соответствующие результаты в плоскости Лобачевского. Не приводятся также леммы типа леммы Коши о деформациях многогранных выпуклых конусов с сохранением величин плоских или двугранных углов. Леммы о деформациях ломаных представляют собой их простое переизложение. Так, аналог леммы Коши о переменах знаков при изометрической деформации пространственноподобного выпуклого многогранного конуса с сохранением величин плоских углов эквивалентен лемме Александрова о деформации замкнутого выпуклого многоугольника в гиперболической плоскости с сохранением его углов. Новыми в этом разделе являются также теоремы единственности для пространственноподобных шапочек и соответствующие вспомогательные результаты о деформациях незамкнутых ломаных. Для полноты приводятся еще две простые теоремы единственности для комбинаторно эквивалентных многогранников, условия в которых, однако, не внутреннегеометрические. Далее под углом между гранями выпуклого двугранного пространственноподобного угла, обращенного выпуклостью в направлении $z > 0$, понимается угол между внешними нормалями к граням; под углом наклона крайней грани пространственноподобной шапочки к плоскости xy понимается угол между внешней нормалью и направлением $z > 0$, взятой со знаком "-"; этим определением соответственно следуют и понятия угла наклона грани и двугранного угла для пространственноподобных многогранников в пространстве де Ситтера.

Теорема 3.1. *Пусть P и P' — замкнутые выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники на единичной сфере четырехмерного псевдоевклидова пространства, в пространстве Лобачевского или де Ситтера, деситтеровские — пространственноподобные многогранники. И пусть у этих многогранников соответствующие плоские углы равны. Тогда многогранники равны и совмещаются в пространстве движением.*

Изложим леммы Коши.

Лемма 3.1. *Если при изометрической деформации на двумерной сфере или в сферическом пространстве все углы выпуклой ломаной не уменьшаются и хотя бы один из ее углов увеличивается, то расстояние между концами ломаной возрастает.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты четырехзвенные ломаные, так как наши рассуждения применимы к ломаным с любым числом звеньев. Пусть $L = ABCDK$ и $L' = A'B'C'D'K'$ — ломаные на сфере, у которых все соответствующие стороны равны; все соответствующие углы связаны одинаковыми неравенствами, например $\angle C \leq \angle C'$; среди соответствующих углов есть неравные, допустим, $\angle C < \angle C'$. Покажем, что если ломаная L выпуклая, то для замыкающих хорд ломаных $AK < A'K'$.

Пусть ABB_1 и AKB_1, $A'B'B_1'$ и $A'K'B_1'$ — большие полуокружности, BCC_1 и CDD_1 — продолженные до пересечения с дугой KB_1 звенья ломаной L, $B'C'C_1'$ и $C'D'D_1'$ — на те же длины продолженные соответствующие звенья ломаной L'. Сопоставляя треугольники KDD_1 и $K'D'D_1'$, D_1CC_1 и $D_1'C'C_1'$, C_1BB_1 и $C_1'B'B_1'$, находим, что $KD_1 \geq K'D_1'$, $D_1C_1 > D_1'C_1'$ и $C_1B_1 \geq C_1'B_1'$. Суммируя правые и левые части этих неравенств, получаем, что $KB_1 > K'B'_1$. Но $AK + KB_1 = A'K' + K'B'_1$, значит, $AK < A'K'$. Лемма доказана.

В сравнении с оригинальной леммой Коши этот результат более общий, и ему дается новое доказательство, не основывающееся, как у Коши, на непрерывных деформациях ломаных [1]*. Вторую свою лемму, о деформациях замкнутых многоугольников, Коши выводит из леммы 3.1; здесь предлагается также новое доказательство, не зависящее от леммы 3.1 и одинаково применимое в любой плоскости — сферической, евклидовой или гиперболической; оно основывается на применении метода "шарнирного четырехугольника", который используется при решении вопросов изопериметрии [13].

Пусть $L = AB...C...D$ и $L' = A'B'...C'...D'$ — нетривиально изометричные выпуклые многоугольники. Сопоставим знаки "+" и "-" соответствующим неравным углам L и L' по следующему правилу. Для соответствующих вершин C и C' вершину C отметим знаком "+" или "-" в зависимости от выполнения неравенства $\angle C > \angle C'$ или $\angle C < \angle C'$; вершину C' согласованно с этим отметим противоположным значком "-" или "+". Нетрудно убедиться, что у многоугольников L и L' будет не меньше, чем по четыре отмеченные вершины, иначе эти многоугольники окажутся равными.

Лемма 3.2. *При обходе по контуру каждого из многоугольников L и L' насчитывается не менее четырех перемен знаков.*

Доказательство. Пусть число перемен знаков у многоугольников L и L' меньше четырех. И пусть n — число отмеченных вершин на каждом из многоугольников. Покажем, что от пары L, L' можно перейти к другой паре нетривиально изометричных многоугольников с меньшим числом отмеченных вершин, но с числом перемен знаков на каждом из многоугольников также меньшим четырех. Существенно, что в предлагаемом переходе, с помощью шарнирной деформации L или L' в выпуклый многоугольник, на каждом из многоугольников , обязательно еще остаются отмеченные вершины, число перемен знаков не растет. Тогда через конечную последовательность подобных переходов можно получить изометричные неравные выпуклые многоугольники с числом отмеченных вершин не большим, чем по три. Но такие многоугольники должны быть равными, у них не может быть отмеченных знаками вершин — приходим к противоречию. Значит, наше предположение неверное; остается построить надлежащие деформации L, L'.

Пусть $n = 4$. Так как число перемен знаков меньше четырех, то на одном из многоугольников, пусть на L, четыре отмеченные вершины H, R, E, T служат вершинами выпуклого четырехугольника, и три из вершин, пусть H, T, E, имеют знак "-"; случай другой расстановки знаков тотчас приводит к противоречию. Рассмотрим преобразование многоугольника L — непрерывную изометрическую деформацию, определяемую "шарнирной" деформацией четырехугольника $HRET$ с уменьшением диагонали HE, при которой углы R и T уменьшаются, все остальные углы L, кроме

---

* По замечанию С. Ф. Кон-Фоссена [4], доказательство самого Коши следует рассматривать как проведенное индукцией по числу сторон многоугольников; тем самым снимается как необоснованный вопрос об ошибке в этом доказательстве, допущенной Коши.

E и H, не изменяются, L остается выпуклым многоугольником. При такой деформации каждая из четырех ломаных, на которые L разбивается отмеченными вершинами, подвергается движению. За вершинами преобразующего многоугольника L закрепим те же знаки, которые им соответствовали до начала деформации. Деформацию заканчиваем, когда хотя бы один из углов — $\angle E$, или $\angle H$, или же $\angle R$, если он был вначале отмечен знаком "+", — оказывается равным соответствующему углу многоугольника L'. Вершина такого угла и соответствующая ей вершина L' в этот момент становятся неотмеченными. Полученный из L новый выпуклый многоугольник $\bar{L}$ изометричен, но не равен L', поскольку угол при вершине T в процессе деформации уменьшается, оставаясь меньшим угла при вершине T'. Очевидно, пара многоугольников $\bar{L}$, L' и есть искомая, в которую с отмеченными ранее свойствами переходит пара многоугольников L, L'.

Пусть $n > 4$. Так как число перемен знаков меньше четырех, то среди произвольно выбранных пяти отмеченных вершин на одном из многоугольников будут четыре вершины, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника, с такой же расстановкой знаков, которая рассматривалась в предыдущем случае: три вершины — со знаками "-". И тогда достаточно провести соответствующую деформацию многоугольника. Лемма доказана.

Следующая лемма — двойственная к лемме 3.1; как и лемма 3.4 Александрова, она доказывается для многоугольников в любой плоскости — сферической, евклидовой или гиперболической.

Пусть $A\ldots BC\ldots D$ и $A'\ldots B'C'\ldots D'$ — выпуклые ломаные, обращенные обе выпуклостью или обе вогнутостью к вершинам углов AOD и $A'O'D'$, в которых они расположены, и составляющие с отрезками сторон углов многоугольники $L = OA\ldots BC\ldots D$ и $L' = O'A'\ldots B'C'\ldots D'$. Будем считать, что у многоугольников L и L' на участках $A\ldots BC\ldots D$ и $A'\ldots B'C'\ldots D'$ все соответствующие углы равны: $\angle A = \angle A', \ldots, \angle D = \angle D'$; все соответствующие стороны связаны одинаковыми неравенствами: $\ldots, BC \geq B'C', \ldots$; среди соответствующих сторон есть неравные, например $BC > B'C'$. Многоугольники L и L' ограничивают в указанных углах области, площади которых обозначим через $\sigma(L)$ и $\sigma(L')$.

Лемма 3.3. *Справедливо неравенство* $\sigma(L) > \sigma(L')$.

Доказательство. Рассмотрим для простоты многоугольники с трехзвенными участками $ABCD$ и $A'B'C'D'$, так как предлагаемые рассуждения применимы к многоугольникам с любым числом звеньев. Разобьем L на треугольники, соединив вершину O отрезками со всеми вершинами ломаной $ABCD$. На каждом из звеньев ломаной $A'B'C'D'$ построим треугольник с теми же углами в вершинах звеньев, что и у соответствующего ему треугольника из многоугольника L. Очевидно, совокупность Σ построенных для многоугольника L' треугольников покрывает внутренность этого многоугольника. По построению, площадь каждого из треугольников, на которые разбивается многоугольник L, не меньше площади соответствующего ему треугольника системы Σ. Площадь одного из треугольников, именно со стороной BC, больше площади соответствующего ему треугольника со стороной $B'C'$. Отсюда и следует, что $\sigma(L) > \sigma(L')$. Лемма доказана.

Пусть $L = A\ldots BC\ldots D$ и $L' = A'\ldots B'C'\ldots D'$ — выпуклые многоугольники, у которых все соответствующие углы равны, $\angle A = \angle A', \ldots, \angle D = \angle D'$, а среди соответствующих сторон есть неравные, например $BC \neq B'C'$. Предположим дополнительно, если речь идет о многоугольниках в евклидовой плоскости, что площади многоугольников равны. Отнесем знаки "+" и "-" неравным соответствующим сторонам многоугольников по следующему правилу. Сторону BC отметим знаком "+" или "-", судя потому, $BC > B'C'$ или $BC < B'C'$; сторону $B'C'$, в зависимости от BC, отметим противоположным знаком "-" или "+". У многоугольников L и L' будут отмеченными не менее чем по четыре стороны, иначе эти многоугольники окажутся равными.

Лемма 3.4. *При обходе по контуру каждого из многоугольников насчитывается не менее четырех перемен знаков.*

Доказательство. Предположим, что число перемен знаков на каждом из многоугольников меньше четырех, т.е. что число перемен знаков два или перемены знаков отсутствуют.

Если у многоугольников L и L' нет перемен знаков, то приходим к противоречию, применяя лемму 3.3 к самим этим многоугольникам. Площади L и L' равны — для евклидовских многоугольников по дополнительному условию, а для многоугольников в сферической или гиперболической плоскости из-за равенства их соответствующих углов. Но по лемме 3.3, если многоугольники не равные, у одного из них площадь бóльшая — получаем противоречие.

Пусть перемен знаков две. Тогда многоугольник L разбивается на две ломаные, $A....BC$ и $AD...C$, одной из которых принадлежат все стороны, отмеченные знаком "+", другой — все стороны, отмеченные знаком "-". Пусть A и C — общие вершины ломаных, OA и OC — некоторые прямые, опорные к многоугольнику L в точках A и C, а s и σ — соответственно площади многоугольников L и $OAD...C$. Пусть $O'A'$ и $O'C'$ — опорные прямые к L', образующие со сторонами этого многоугольника в вершинах A' и C' точно такие же углы, как и соответствующие им опорные прямые со сторонами L. Пусть σ' — площадь многоугольника $O'A'D'\ldots C'$. Предположим, что многоугольники $A'D'\ldots C'$ и $AD...C$ обращены соответственно к точкам O и O' оба выпуклостью. И пусть стороны многоугольника $AD...C$ отмечены знаком "-", а многоугольника $A'D'\ldots C'$ — знаком "+"; разумеется, некоторые из сторон могут быть и не отмеченные. Сравнивая многоугольники $OA...BC$ и $O'A'...B'C'$, по лемме 3.3 находим $s + \sigma > s + \sigma'$. Для многоугольников $OAD...C$ и $O'A'D'\ldots C'$ по той же лемме $\sigma < \sigma'$. Получили противоречие.

В разобранном только что случае оставлены без исследования принципиальные вопросы, связанные с взаимным расположением прямых,опорных к конкретному многоугольнику из L, L'. Эти вопросы не возникают, когда рассматриваются многоугольники в сферической плоскости, но для гиперболической, да и для евклидовой плоскостей возможны соответствующие опорные прямые, которые не пересекаются. Приведем необходимые дополнения.

Пусть α и γ — непересекающиеся опорные прямые к многоугольнику L в вершинах A и C. Проведем через A' и C' опорные к L' прямые α' и γ', образующие со сторонами этого многоугольника точно такие же углы, как и прямые α и γ со сторонами L. Предположим, что α' и γ' также не пересекаются. Будем считать, что стороны ломаной $AD...C$ отмечены знаком "-", стороны ломаной $A...BC$ — знаком "+". Сравнивая выпуклые ломаные $AD...C$ и $A'D'\ldots C'$, расположенные между прямыми α, γ и α', γ' соответственно, по лемме 3.5, которая приводится далее, заключаем, что расстояние между прямыми α' и γ' большее, чем между прямыми α и γ; но по той же лемме эти же расстояния связаны противоположным неравенством, если сравнивать выпуклые ломаные $A...BC$ и $A'...B'C'$. Противоречие. Пусть теперь α и γ пересекаются, тогда будем обозначать эти прямые соответственно OA и OC и для конкретизации считать, что многоугольник $AD...C$ обращен к точке O выпуклостью и что стороны этого многоугольника отмечены знаком "+". Утверждается, что прямые α' и γ' также пересекаются, пусть точкой пересечения будет O', и многоугольник $A'D'...C'$ также обращен к точке O' выпуклостью. Для доказательства утверждения достаточно построить систему треугольников, проектирующих из точки O ломаную $AD...C$, и, как при исследовании леммы 3.3, построить систему Σ' соответствующих треугольников на ломаной $A'D'...C'$. Геометрический анализ системы треугольников Σ' показывает, что линии α' и γ' действительно пересекаются, точка пересечения O' располагается в области плоскости, покрываемой системой Σ', и ломаная $A'D'...C'$ обращена к точке O' выпуклостью.

Таким образом, в любом случае, приняв предположение, что на многоугольниках L и L' меньше четырех перемен знаков, приходим к противоречию — значит, это предположение неверное. Лемма доказана.

Пусть $L = AB...CD...E$ и $L' = A'B'...C'D'...E'$ — выпуклые ломаные в евклидовой или гиперболической плоскости, расположенные соответственно между непересекающими прямыми α_A и α_E, проходящими через точки A и E, и между $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{E'}$, проходящими через A' и E'. Будем считать, что у этих ломаных все соответствующие углы равны, а все соответствующие стороны связаны одинаковыми неравенствами, причем среди сторон есть неравные, например $CD > C'D'$. Предположим, что в концах ломаных со стороны вогнутости они образуют соответственно равные углы с прямыми α_A и α_E, $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{E'}$.

Лемма 3.5. *Расстояние h между прямыми α_A и α_E больше расстояния h' между прямыми $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{E'}$.*

Доказательство. Проведем через вершины $B',\ldots,C'$, $D',\ldots$ ломаной L' взаимно не пересекающиеся прямые $\alpha_{B'},\ldots,\alpha_{C'},\alpha_{D'},\ldots$, не пересекающиеся также с прямыми $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{E'}$, ортогональные к общему перпендикуляру к прямым $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{E'}$. Обозначим через $h_{A'}, h_{B'},\ldots, h_{C'},\ldots$ расстояния между прямыми $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{B'}$, ..., $\alpha_{C'}$ и $\alpha_{D'}$, ..., взятыми последовательно. Через вершины $B,\ldots,C,D,\ldots$ ломаной L проведем также прямые $\alpha_B,\ldots,\alpha_C,\alpha_D,\ldots$, образующие в этих вершинах точно такие же углы со звеньями ломаной, как и прямые $\alpha_{B'},\ldots,\alpha_{C'},\alpha_{D'},\ldots$ с соответствующими звеньями L'. Соответственно обозначим расстояния между прямыми через h_A, h_B, ..., h_C, ..., как это введено для прямых $\alpha_{A'}$ и $\alpha_{B'}$, ... Из условий леммы и по построению прямые $\alpha_A, \alpha_B,\ldots,\alpha_C$, ... взаимно не пересекаются. На том же основании справедливы неравенства $h_A \ge h_{A'}$, $h_B \ge h_{B'}$, ..., $h_C > h_{C'}$, $h_D \ge h_{D'}$, ... А тогда $h > h'$, так как $h \ge h_A + h_B + \ldots + h_C + \ldots$ и $h' = h_{A'} + h_{B'} + \ldots + h_{C'} + \ldots$. Лемма доказана.

Эта лемма есть аналог леммы 3.3, если для сферической и гиперболической плоскостей лемму 3.3 переформулировать с помощью теоремы Гаусса–Бонне как теорему о сравнении углов O и O' многоугольников L, L'.

Известно, что в евклидовом, сферическом и гиперболическом пространствах теоремы единственности для комбинаторно эквивалентных шапочек доказыватются с помощью соответствующих теорем единственности для замкнутых многогранников. Для этого каждая шапочка объединяется с симметричной ей шапочкой относительно плоскости основания. В пространствах псевдоевклидовом и де Ситтера такое объединение пространственноподобной шапочки с симметричной приводит к некоторой условной выпуклой поверхности, многогранные конусы у которой вдоль линии склеивания непространственноподобны. По величине каждый из полных внутренних углов при вершинах этих конусов меньше 2π. Однако воспользоваться леммой Коши о деформациях конусов нет оснований. Здесь нужны самостоятельные результаты о деформациях условных выпуклых конусов, у которых рассматриваются и сравниваются двугранные углы, введенные в начале данного раздела. Приведем теорему единственности для комбинаторно эквивалентных пространственноподобных шапочек. Доказательство опускается, так как оно осуществляется в том же плане, что и у теоремы из разд. 2, обобщающей теоремы Коши и Минковского. Кроме лемм 3.2 и 3.4, в этом случае еще необходимы утверждения, характеризующие деформации незамкнутых конусов вдоль края шапочки. Двойственные эквиваленты этих утверждений, леммы 3.6 и 3.7 о деформациях плоских ломаных, устанавливаются далее.

Теорема 3.2. *Пусть P и P' — комбинаторно эквивалентные пространственноподобные шапочки в псевдоевклидовом пространстве или в пространстве де Ситтера. Пусть у этих шапочек соответствующие плоские углы равны, площади соответствующих граней для случая псевдоевклидовских многоугольников равны. Тогда шапочки P и P' равны и совмещаются в пространстве движением.*

При доказательстве этой теоремы методами Коши и Александрова придется сравнивать двугранные углы при внутренних и граничных ребрах пограничных граней многогранников, выделяя из совокупности таких граней незамкнутые многогранные конусы с вершинами и граничными ребрами, принадлежащими краям сравниваемых многогранников-шапочек. Для конкретного конуса могут представиться два случая. Первый — все внутренние ребра шапочки, исходящие из вершины конуса отмечаются одним знаком; тогда граничные ребра должны быть отмечены противоположным знаком, и это вытекает из леммы 3.6. Второй случай — часть внутренних ребер, исходящих из вершины конуса, отмечается одним, а часть другим знаками, причем при обходе вокруг вершины по внутренним ребрам есть только одна перемена знака; тогда хотя бы одно из граничных ребер отмечается знаком, противоположным знакам на внутренних ребрах конуса, располагающихся со стороны данного граничного ребра; это вытекает из леммы 3.7. Такая возможность расстановки знаков позволяет соответственно перенести без изменений знаки на ребра симметричных к исходным шапочек и получить тем самым расстановку знаков на замкнутых условных многогранниках. На условном многограннике при обходе вокруг вершины, расположенной на линии склеивания симметричных шапочек, будет тогда не менее четырех перемен знаков. Изложим леммы, необходимые для доказательства теоремы 3.2.

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы 3.3. И пусть многоугольники $L = OA...BCD$ и $L' = O'A'...B'C'D'$, расположенные в евклидовой или гиперболической плоскости, — выпукло-вогнутые, у которых ломаные $A...BCD$ и $A'...B'C'D'$ обращены выпуклостью к точкам O и O'. Тогда для этих многоугольников $OA > O'A'$ и $OD > O'D'$.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты многоугольники с трехзвенными участками $ABCD$ и $A'B'C'D'$, так как предлагаемые рассуждения применимы к многоугольникам с любым числом звеньев. Отложим на стороне BA отрезок $B\bar{A}$, равный $B'A'$, и проведем отрезок $\bar{A}O_1$, $O_1 \in OD$, где $\angle O_1\bar{A}B = \angle OAB$. Пусть CBB_1 — продолженное до пересечения с отрезком $\bar{A}O_1$ звено CB ломаной $DCBA$ многоугольника L, а $C'B'B_1'$ — продолженное до пересечения со стороной $O'A'$ угла $A'O'D'$ звено $C'B'$ ломаной $D'C'B'A'$ многоугольника L'; треугольники $\bar{A}BB_1$ и $A'B'B_1'$ равны, значит, $BB_1 = B'B_1'$. Отсюда следует, что многоугольники $L_1 = O_1B_1CD$ и $L_1' = O'B_1'C'D'$ удовлетворяют условиям доказываемой леммы, но в сравнении с многоугольниками L и L' имеют на участках B_1CD и $B_1'C'D'$ меньшее число звеньев. Повторяя проведенные построения для L_1 и L_1', получим треугольники O_2C_1D и $O'C_1'D'$, где $O_2 \in O_1D$, а DCC_1 и $D'C'C_1'$ — продолженные соответственно до пересечения с отрезками $O_2\bar{B}_1$ и $O'B_1'$ звенья DC и $D'C'$. У этих треугольников $C_1D \geq C_1'D'$, а соответствующие углы при сторонах C_1D и $C_1'D'$ равны, значит $O_2D \geq O'D'$. На самом деле $OD > O'D'$, так как по построению $O_2D \leq O_1D \leq OD$, а по условию данной леммы у ломаных $ABCD$, $A'B'C'D'$, звенья которых связаны неравенствами $AB \geq A'B'$, $BC \geq B'C'$, $CD \geq C'D'$, одно из звеньев первой ломаной строго большее, чем соответствующее звено второй. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия леммы 3.6 с изменением для соотношений между длинами соответствующих звеньев ломаных $A...B...CD$ и $A'...B'...C'D'$. А именно: на участках $A...B$ и $A'...B'$ длины звеньев первой из ломаных не меньшие, чем длины звеньев второй ломаной; на участках $B...CD$ и $B'...C'D'$ выполняются противоположные неравенства; на каждой паре соответствующих участков для одной пары соответствующих звеньев неравенство строгое. Тогда для многоугольников L и L' выполняется хотя бы одно из неравенств $OA > O'A'$ и $OD < O'D'$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверное и $OA \leq O'A'$, $OD \geq O'D'$. Пусть α, α' — опорные прямые в вершинах B, B' к ломаным $A...B...CD$, $A'...B'...C'D'$, проведенные под соответственно равными углами к исходящим из точек B, B' звеньями этих ломаных. Пусть β — проходящая через O прямая, ортогональная α, и DE — прямая, ортогональная β, где $E \in \beta$. Построим прямоугольный треугольник $O'E'D'$ с прямым углом при вершине E', сторона $D'E'$ которого образует с прямыми $D'O'$ и $D'C'$ такие же углы, какие образует с прямыми DO и DC сторона DE треугольника OED. Из условий леммы и по построению, как это уже рассматривалось при доказательстве леммы 3.5, прямые α' и $D'E'$ не пересекаются, поскольку не пересекаются прямые α и DE. Обозначим через T точку пересечения α и β, T' — точку пересечения α' и $O'E'$, $h_0 \equiv OT$ и h_0' — расстояния точек O и O' от прямых α и α', $h_1 \equiv TE$, h_1' — расстояния между прямыми α, DE и α', $D'E'$ и, наконец, $h_0'' \equiv O'T'$ и $h_1'' \equiv T'E'$ — длины участков катета $O'E'$ треугольника $O'E'D'$. Согласно нашему допущению, на основании сравнения треугольника OED и $O'E'D'$, имеем $h_0 + h_1 \geq h_0'' + h_1''$. А для введенных расстояний между точками и прямыми $h_0'' + h_1'' \geq h_0' + h_1'$. Таким образом, $h_0 + h_1 \geq h_0' + h_1'$. По лемме 3.5 и условию рассматриваемой леммы о соотношениях длин звеньев ломаных $B...CD$ и $B'...C'D'$ имеем $h_1 < h_1'$. Значит, $h_0 > h_0'$. Поменяв местами в проведенных рассуждениях многоугольники L и L' и сравнивая теперь ломаные $A'...B'$ и $A...B$, находим противоположное неравенство $h_0' > h_0$. Полученное противоречие показывает, что наше исходное предположение неверное. Лемма доказана.

Заметим, что в евклидовском варианте леммы 3.6 доказательство значительно упрощается. Например, в многоугольниках L и L' достаточно последовательно продолжить по прямым стороны DC, CB,... и $D'C'$, $C'B'$,... за точки C, B,... и C', B',... до пересечения со сторонами OA и $O'A'$ соответственно. После этого, сравнивая поочередно треугольники с основаниями на прямых DC и $D'C'$, CB и $C'B'$, на которые разбиваются внутренности многоугольников L и L', и одновременно сопоставляя по длине участки разбиения сторон OA и $O'A'$, находим, что $O'A' < OA$.

Для полноты приведем леммы, двойственные к леммам 3.6 и 3.7. Вместе с леммой 3.2 (леммой Коши) они используются при доказательстве еще двух теорем единственности для комбинаторно эквивалентных многогранников. При этом рассматриваются пары многогранников в евклидовом, сферическом, гиперболическом пространствах либо в пространствах псевдоевклидовом или де Ситтера, в которых речь должна идти о пространственноподобных многогранниках. Сами теоремы естественно называть теоремами Стокера, который установил эти теоремы в евклидовском случае [14]. Сформулируем сначала теоремы; их доказательства проводятся в том же плане, что и у теорем 3.1 и 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть P и P' — замкнутые выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники. И пусть у этих многогранников соответствующие ребра равны, соответствующие двугранные углы равны. Тогда многогранники P и P' равны и совмещаются в пространстве движением.*

Теорема 3.4. *Пусть P и P' — комбинаторно эквивалентные шапочки. И пусть у этих шапочек соответствующие ребра равны, соответствующие двугранные углы равны, в том числе равны "двугранные углы" вдоль края шапочек, рассматриваемые как наклоны к плоскости края пограничных граней. Тогда шапочки P и P' равны и совмещаются в пространстве движением.*

Теперь докажем леммы, двойственные к леммам 3.6 и 3.7; они относятся к многоугольникам в плоскостях сферической, евклидовой или гиперболической и применяются для доказательства теоремы 3.4; первая из этих лемм, лемма 3.8, — обобщение известной леммы А. Д. Александрова об изометрических деформациях выпукло-вогнутого четырехугольника.

Лемма 3.8. *Пусть AOD и $A'O'D'$ — изометричные углы, где $OA = O'A'$ и $OD = O'D'$, в которые вписаны изометричные выпуклые ломаные $AB...CD$ и $A'B'...C'D'$, где $AB = A'B',...,CD = C'D'$. И пусть у ломаной $AB...CD$ углы при внутренних вершинах со стороны вершины O все не бóльшие, чем соответствующие им углы у ломаной $A'B'...C'D'$, а хотя бы один из углов строго меньший. Тогда $\angle OAB > \angle O'A'B'$ и $\angle ODC > \angle O'D'C'$.*

Доказательство. Пусть ломаные обращены к вершинам O и O' обе выпуклостью, так что многоугольники $OAB...CD$ и $O'A'B'...C'D'$ — выпукло-вогнутые. Утверждение леммы устанавливается тем же способом, который использовался при доказательстве леммы 3.6. Именно, если допустить, например, что $\angle ODC < \angle O'D'C'$, то получаем неравенство $AO < A'O'$ — противоречие. Пусть ломаные обращены к вершинам O и O' обе вогнутостью, так что многоугольники $OAB...CD$ и $O'A'B'...C'D'$ — выпуклые. Утверждение леммы вытекает из леммы 3.2 (леммы Коши). Если допустить, что утверждение не выполняется, то при сравнении углов многоугольников $OAB...CD$ и $O'A'B'...C'D'$ с помощью расстановки знаков при обходе по контуру каждого из многоугольников перемен знаков будет меньше четырех. Пусть к вершинам O и O' одна из ломаных $AB...CD$ и $A'B'...C'D'$ обращена выпуклостью, другая — вогнутостью. Рассмотрим промежуточный треугольник $O''A''B''...C''D''$, одна из сторон которого — прямолинейный отрезок $A''B''...C''D''$, а сам треугольник — изометричный многоугольникам $OAB...CD$ и $O'A'B'...C'D'$, где $O''A'' = OA$, $A''B'' = AB,...,C''D'' = CD$, $D''O'' = DO$. Утверждение леммы устанавливается путем последовательного сравнения многоугольников $OAB...CD$ и $O''A''B''...C''D''$, $O''A''B''...C''D''$ и $O'A'B'...C'D'$ и применения уже полученных результатов для выпукло-вогнутых и выпуклых многоугольников. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть выполнены условия леммы 3.8 со следующими уточнениями для изометричных ломаных $AB_1...BC...C_1D$ и $A'B'_1...B'C'...C'_1D'$. Эти ломаные обращены к вершинам O и O' обе выпуклостью или обе вогнутостью; на участках $A...B$ и $A'...B'$ углы при внутренних вершинах у первой ломаной со стороны вершины O все не бóльшие, чем соответствующие им углы у второй ломаной, а на участках $C...D$ и $C'...D'$ выполняются противоположные неравенства; на каждой паре соответствующих участков для одной пары соответствующих углов соответствующее неравенство строгое. Тогда выполняется хотя бы одно из неравенств $\angle OAB_1 > \angle O'A'B'_1$ и $\angle ODC_1 < \angle O'D'C'_1$.*

Доказательство. Пусть ломаные обращены к вершинам O и O' обе выпуклостью. Пусть лемма неверна: $\angle OAB_1 \le \angle O'A'B'_1$ и $\angle ODC_1 \ge \angle O'D'C'_1$. Пусть $E \in BC$, $E' \in B'C'$ — внутренние точки звеньев, соответствующие по изометрии. Сравнивая выпукло-вогнутые многоугольники $OA...BEO$ и $O'A'...B'E'O'$, как при исследовании первого случая в доказательстве леммы 3.8, получаем $OE < O'E'$. Аналогично, сравнивая многоугольники $O'D'...C'E'O'$ и $OD...CEO$, находим $O'E' < OE$ — противоречие. Пусть ломаные обращены к вершинам O и O' обе вогнутостью. Повторяя предыдущие рассуждения, снова приходим к противоположным неравенствам $OE < O'E'$ и $O'E' < OE$. Только сравнение соответствующих многоугольников и замыкающих хорд OE и $O'E'$ здесь проводится с помощью леммы 3.1 (леммы Коши). Таким образом, в любом случае приходим к противоречию с предположением, что лемма неверна. Лемма доказана.

В заключение отметим, что число параметров, однозначно определяющих замкнутый выпуклый многогранник в евклидовом пространстве — по обобщению теорем Коши и Минковского из разд. 2 — равно $2k + f$. Соответственно для неевклидовых пространств — по теоремам 2.3, 3.1 и 3.3 — это число равно $2k$. Для евклидова пространства Стокером высказывалась следующая гипотеза [14], являющаяся обращением результата Коши: если у одинаково составленных замкнутых выпуклых многогранников соответствующие двугранные углы равны, то их соответствующие плоские углы также равны. Таким образом, согласно гипотезе многогранник должен однозначно определяться $k + f$ параметрами. Для очень частных примеров многогранников эта гипотеза доказывалась в [15,16].

Список литературы

1. *А. Д. Алексадров*, Выпуклые многогранники. — Гостехтеориздат, Москва, Ленинград, (1948), 386 с.
2. *А. Д. Александров*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— Гостехтеориздат, Москва, Ленинград (1948), 386 с.
3. *А. В. Погорелов*, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— Наука, Москва (1969), 759 с.
4. *С. Э. Кон-Фоссен*, Изгибаемость поверхностей "в целом".— Успехи мат. наук, (1936), вып. 1, с. 33–76.
5. *С. П. Оловянишников*, Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках.— Мат. сб. (1946), 18(60), № 3, с. 441–446.
6. *А. Д. Милка*, Что такое геометрия "в целом". — Знание, Москва (1986), 32 с.
7. *А. Д. Александров, Е. П. Сенькин*, О неизгибаемости выпуклых поверхностей.— Вестн. Ленингр. ун-та (1955), № 8, с. 3–13.
8. *И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор*, Введение в дифференциальную геометрию. Наука, Москва (1973), 440 с.
9. *А. Д. Милка*, Однозначная определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского.— Укр. геометр. сб. (1980), вып. 23, с. 99–107.
10. *А. Д. Милка*, Об однозначной определенности выпуклых поверхностей в псевдоримановом сферическом пространстве. Укр. геометр. сб. (1986), вып. 29, с. 113–118.
11. *М. Берже*, Геометрия. Мир, Москва (1984), 560 с.
12. *Р. Коннелли*, Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний.— В кн.: Математика. Исследования по метрической теории поверхностей. Мир, Москва (1980), с. 228–237.
13. *В. Бляшке*, Круг и шар. Наука, Москва (1967), 232 с.
14. *J. J. Stoker*, Geometrical Problems Concerning Polihedra in the Large.— Comm. Pure Appl. Math. (1968), v. 21, pp. 119–168.
15. *H. Karcher*, Remarks on Polyhedra with Given Dihedral Angles.— Ibid, pp. 169–174
16. *А. Д. Милка*, К одной гипотезе Стокера.— Укр. геометр. сб. (1970), вып. 9, с. 85–86.

Uniqueness theorems for spacelike convex polytopes in a pseudoeuclidean space

A. D. Milka

The following theorem generalizing well-known theorems of Cauchy and Minkowsky for spheres of 4-dimensional pseudoeuclidean space is proved.Closed combinatorially equivalent convex polytopes in a Lobachevsky space or in a deSitter space spacelike polytopes are equal, if their planar angles are equal. This theorem for convex polytopes in the spherical space has been proved earlier by the author.

Теореми єдиності для просторовоподібних опуклих многогранників у псевдоевклідову просторі

А. Д. Мілка

В роботі доведено теорему, що узагальнює для сфер 4-вимірного псевдоевклідового простору відомі теореми Коши та Мінковського. Замкнені комбінаторно еквівалентні опуклі многогранники в просторі Лобачевського та де Сіттера, десіттеровські — просторовоподібні многогранники, є рівні, якщо рівні їх відповідні плоскі кути. Раніше ця теорема була установлена автором для опуклих многогранників в сферичному просторі.