Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 2, с. 250–269

УДК 517.55

Потоки, ассоциированные с голоморфными почти периодическими отображениями

А.Ю. Рашковский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 14 марта 1994 года

Пусть f — регулярное голоморфное почти периодическое отображение трубчатой области $T_G = \mathbf{R}^n + iG$ в $\mathbf{C}^q$, $q \le n$. Установлено существование потоков $\widetilde{A}_f^{(l)}$ — средних по $\mathbf{R}^n$ от потоков $\log |f| (dd^c \log |f|)^l$ — и исследованы свойства этих потоков. Получены условия отсутствия нулей отображения f в области $T_{G'}$, $G' \subset G$, в терминах потока $\widetilde{A}_f^{(q-1)}$ и функции $\widetilde{A}_f^{(0)}$.

Введение

Пусть $T_G = \mathbf{R}^n + iG$ — трубчатая область в $\mathbf{C}^n$ с основанием $G \subset \mathbf{R}^n$, $n \ge 1$. Голоморфное отображение $f : T_G \to \mathbf{C}^q$, $1 \le q \le n$, называется *почти периодическим* [1], если из каждой последовательности точек $h_j \in \mathbf{R}^n$ можно выбрать такую подпоследовательность h_{j_k}, что последовательность отображений $f(z + h_{j_k})$ сходится при $k \to \infty$ по любой норме $\|\cdot\|_{G'} = \sup \{ |\cdot| : z \in T_{G'} \}$, $G' \Subset G$, т.е. равномерно в каждой трубчатой области $T_{G'}$, $G' \Subset G$.

Следующий классический результат Иессена описывает распределение нулей голоморфной почти периодической функции в полосе (т.е. $n = q = 1$).

Теорема A ([2]). *Пусть $f(z)$ — голоморфная почти периодическая функция в полосе $T_{(a,b)} = \{ z = x + iy : a < y < b \}$. Тогда:*

(1) *существует предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \log |f(x + iy)| \, dx \overset{\text{def}}{=} A_f(y), \ \forall y \in (a, b),$$

являющийся выпуклой функцией от y;

(2) *если функция $A_f(y)$ дифференцируема в точках a_1 и b_1, $a < a_1 < b_1 < b$, то существует предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N_f(r; a_1, b_1)}{2r} = \frac{1}{2\pi} \left(A_f'(b_1) - A_f'(a_1) \right),$$

где $N_f(r; a_1, b_1)$ *равно числу нулей функции* f *в прямоугольнике* $\{ \, |x| < r, \ a_1 < y < b_1 \}$.

Эта теорема была распространена Л.И. Ронкиным [3] на голоморфные почти периодические функции в произвольной трубчатой области (т.е. $n > 1$, $q = 1$). Для того чтобы сформулировать этот результат, введем некоторые обозначения.

Положим

$$z = x + iy \in \mathbf{C}^n, \quad t \in \mathbf{R}^n_+, \quad m(t) = \min_{1 \le j \le n} t_j, \quad \mathbf{1} = (1,\dots,1), \quad t \cdot x = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n),$$

$$t^{\mathbf{1}} = t_1 \cdot t_2 \dots t_n, \quad \Pi_t = \{ x \in \mathbf{R}^n : \, |x_j| < t_j, \ 1 \le j \le n \}, \quad \Pi_t(x^0) = x^0 + \Pi_t .$$

Далее, если f — голоморфное отображение области $\Omega_0 \subset \mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^q$, $1 \le q \le n$, то через $V_f^{(q)}(\Omega)$ обозначим $2(n-q)$-мерный объем голоморфной цепи $Z_f = f^{-1}(0)$ в области $\Omega \Subset \Omega_0$. Пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в области Ω обозначим $\mathbf{D}(\Omega)$.

Теорема B ([3]). *Пусть* f *— голоморфная почти периодическая функция в области* T_G. *Тогда:*

(1) *существует предел*

$$\lim_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^{\mathbf{1}}} \int\limits_{\Pi_t(x^0)} \log |f(x+iy)| \, dx \overset{\text{def}}{=} A_f(y),$$

равномерный по $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *и по* $y \in G_0$, $G_0 \Subset G$, *являющийся выпуклой функцией от* y;

(2) *функции* $u_t(x+iy) := \log |f(t \cdot x + iy)|$ *сходятся в топологии* $\mathbf{D}'(T_G)$ *при* $m(t) \to \infty$ *к функции* $A_f(y)$;

(3) *для любой области* $G' \Subset G$ *такой, что* $\mu_f(\partial G') = 0$, *где* μ_f *— риссовская мера функции* A_f, *существует предел*

$$\lim_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^{\mathbf{1}}} V_f^{(1)}(\Pi_t \times G') = \frac{\theta_n}{2\pi} \mu_f(G'),$$

где $\theta_n = (n-2)\pi^{n/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ *при* $n > 2$ *и* $\theta_n = 2\pi$ *при* $n = 2$.

Как было установлено в [1], подход, связанный со слабой сходимостью функций u_t (утверждение (2) теоремы B), оказывается плодотворным и при изучении голоморфных почти периодических отображений в $\mathbf{C}^q$, $q > 1$. Обозначим через $\mathbf{D}_{p,q}(\Omega)$ пространство внешних дифференциальных форм типа (p, q) с коэффициентами из $\mathbf{D}(\Omega)$, а через $\mathbf{D}'_{p,q}(\Omega)$ — сопряженное к нему пространство потоков размерности (p, q) (бистепени $(n-p, n-q)$). Напомним, что поток $T \in \mathbf{D}'_{p,p}(\Omega)$ называется *положительным*, если $\langle T, \phi \rangle \ge 0$ для любой формы $\phi \in \mathbf{D}_{p,p}(\Omega)$ вида

$\phi = (i\lambda_1 \wedge \bar\lambda_1) \wedge (i\lambda_2 \wedge \bar\lambda_2) \wedge \ldots (i\lambda_p \wedge \bar\lambda_p)$, где $\lambda_j \in \mathbf{D}_{1,0}(\Omega)$, $1 \le j \le p$. Семейство всех положительных потоков в области Ω биразмерности (p, p) обозначим через $\mathbf{D}_p^+(\Omega)$.

Для потока $T \in D'_{p,p}(\Omega)$, коэффициенты которого являются вещественными мерами (например, $T \in \mathbf{D}_p^+(\Omega)$) через $\sigma(K; T)$ обозначим его кэлерову массу на борелевском множестве $K \subset \Omega$, т.е.

$$\sigma(K; T) = \frac{1}{p!}\int_K T \wedge (dd^c|z|^2)^p,$$

где $d = \partial + \bar\partial$, $d^c = \dfrac{\partial - \bar\partial}{4i}$.

Пусть F — голоморфное отображение области $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^q$, $1 \le q \le n$, $Z_F = F^{-1}(0)$ — соответствующая голоморфная цепь. Как известно [4], если носитель $|Z_F|$ цепи Z_F имеет минимальную размерность (т.е. $|Z_F|$ является аналитическим множеством чистой размерности $n - q$ или пусто), то можно определить потоки Монжа–Ампера

$$a_F^{(l)} = (dd^c \log|F|^2)^l = \left(\frac{i}{2}\right)^l \sum_{I,J \in M_l} a_{IJ}^{(l)}(z; F)\, dz^I \wedge d\bar z^J \in \mathbf{D}_{n-l}^+(\Omega),$$

$$A_F^{(l)} = \log|F|^2 a_F^{(l)} = \left(\frac{i}{2}\right)^l \sum_{I,J \in M_l} A_{IJ}^{(l)}(z; F)\, dz^I \wedge d\bar z^J$$

(через M_l обозначена совокупность всех упорядоченных выборок размера l из чисел $1, \ldots, n$). Коэффициенты этих потоков являются локально интегрируемыми функциями,

$$dd^c A_F^{(l)} = a_F^{(l+1)}, \quad 0 \le l \le q - 1, \tag{1}$$

причем поток $a_F^{(q)} := (dd^c \log|f|^2)^q$ является (с точностью до постоянного множителя) потоком интегрирования по Z_F. В частности,

$$V_F^{(q)}(\Omega') = \pi^{-q}\sigma(\Omega'; a_F^{(q)}), \quad \Omega' \Subset \Omega.$$

Пусть теперь $f: T_G \to \mathbf{C}^q$ — голоморфное почти периодическое отображение. В [1, 5] было исследовано распределение нулей отображения f в терминах потоков $A_f^{(q-1)}$. При этом был выделен естественный класс отображений, к которым применима техника потоков Монжа-Ампера. Именно, голоморфное почти периодическое отображение называется *регулярным*, если для каждого его предельного отображения F (т.е. $\|f(z + h_j) - F(z)\|_{G'} \to 0$, $\forall\, G' \Subset G$) множество $|Z_F|$ удовлетворяет условию $\dim|Z_F| \le n - q$ ($\dim \emptyset := -1$). Класс всех регулярных голоморфных почти периодических отображений области T_G в $\mathbf{C}^q$, $1 \le q \le n$, обозначим через $R_q(T_G)$. Для $f \in R_q(T_G)$ и $t \in \mathbf{R}_+^n$ положим:

$$a_{f,t}^{(l)} = \left(\frac{i}{2}\right)^l \sum_{I,J \in M_l} a_{IJ}^{(l)} (t \cdot x + iy; f)\, dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

$$A_{f,t}^{(l)} = \left(\frac{i}{2}\right)^l \sum_{I,J \in M_l} A_{IJ}^{(l)} (t \cdot x + iy; f)\, dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Теорема С [1]. *Пусть* $f \in R_q(T_G)$. *Тогда:*

(1) *потоки* $A_{f,t}^{(q-1)}$ *при* $m(t) \to \infty$ *сходятся в* $\mathbf{D}'_{n-q+1,\,n-q+1}(T_G)$ *к некоторому потоку* $\widetilde{A}_f^{(q-1)}$ *с зависящими лишь от* y *локально суммируемыми коэффициентами;*

(2) $\widetilde{\Delta}_f \overset{\text{def}}{=} dd^c \widetilde{A}_f^{(q-1)} \in \mathbf{D}^+_{n-q}(T_G)$;

(3) *для каждой области* $G' \Subset G$ *такой, что* $\mu_f(\partial G') = 0$, *где положительная мера* μ_f *на* G *определяется равенством* $\mu_f(K) = \sigma(\Pi_1 \times K;\ \widetilde{\Delta}_f)$, *существует предел*

$$\lim_{m(t) \to \infty} \frac{1}{t^1} V_f^{(q)}(\Pi_1 \times G') = \mu_f(G').$$

Целью настоящей работы является исследование связи между поведением самого отображения f и плотностью его нулевого множества. Мы установим существование пределов $\widetilde{a}_f^{(l)}$ и $\widetilde{A}_f^{(l)}$ "промежуточных" потоков $a_{f,t}^{(l)}$ и $A_{f,t}^{(l)}$, $0 \le l < q-1$. В частности, будет доказано существование функции Иессена $A_f = \widetilde{A}_f^{(0)}$. Возникает естественный вопрос о наличии равенств $\widetilde{a}_f^{(l)} = (dd^c A_f)^l$ и в том числе равенства $\widetilde{\Delta}_f = (dd^c A_f)^q$. Как показывает пример, любезно сообщенный нам Л.И. Ронкиным, это соотношение, вообще говоря, не верно. Тем самым, "промежуточные" потоки $\widetilde{a}_f^{(l)}$ (в отличие от потоков $a_f^{(l)}$) обладают известной самостоятельностью. Изучим ряд их свойств и установим некоторые связи между этими потоками. Наконец, будут получены условия отсутствия нулей отображения f в терминах потока $\widetilde{\Delta}_f$ и функции A_f.

2. Сходимость потоков Монжа–Ампера

Для доказательства существования предельных потоков $\widetilde{a}_f^{(l)}$ и $\widetilde{A}_f^{(l)}$ отображения $f \in R_q(T_G)$ нам понадобится следующий факт о потоках $a_F^{(l)}$ и $A_F^{(l)}$, ассоциированных с произвольным невырожденным голоморфным отображением F.

Теорема 1. *Пусть последовательность голоморфных отображений* F_j *в области* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ *в* $\mathbf{C}^q$, $1 \le q \le n$, *сходится при* $j \to \infty$ *равномерно на компактах в* Ω *к отображению* F, $\dim |Z_F| \le n-q$. *Тогда* $a_{F_j}^{(l)} \to a_F^{(l)}$ *и* $A_{F_j}^{(l)} \to A_F^{(l)}$ в $D'_{n-l,\,n-l}(\Omega)$, $0 \le l \le q-1$.

Для $l = 0$ утверждение этой теоремы хорошо известно, а для $l = q - 1$ доказательство содержится в [1]. Поскольку из слабой сходимости функций u_j к u и потоков $(dd^c u_j)^m$ к потоку $(dd^c u)^m$ не следует сходимость потоков $(dd^c u_j)^l$ к потоку $(dd^c u)^l$, $1 < l < m$, то утверждение теоремы 1 из соответствующих результатов для $l = 0$ и $l = q - 1$ автоматически не вытекает. Отметим, однако, что приводимое нами доказательство теоремы 1 опирается на случай $l = q - 1$ и использует методы его доказательства.

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для потоков $A^{(l)}_{F_j}$; сходимость потоков $a^{(l)}_{F_j}$ к $a^{(l)}_F$ будет следовать из (1) в силу непрерывности оператора dd^c.

Рассмотрим вначале случай $q = n$. Положим $u_j(z) = \log | F_j(z) |$, $u(z) = \log | F(z) |$. Так как $\dim | Z_F | = 0$ (случай $Z_F = \emptyset$ тривиален), а функции u_j сходятся к u равномерно на компактах в $\Omega \setminus | Z_F |$, то достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ у произвольной точки $z^0 \in | Z_F |$ существует такая окрестность ω, что $| \sigma(\omega; A^{(l)}_{F_j}) | < \varepsilon$, $\forall j > j_0$, и $| \sigma(\omega; A^{(l)}_F) | < \varepsilon$.

Не нарушая общности можно считать, что $z^0 = 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы точка 0 являлась единственной точкой множества $| Z_F |$ в шаре $B_\delta = \{ z \in \mathbf{C}^n : | z | < \delta \}$, $u_j \le -1$ на B_δ и $| \sigma(B_\delta; A^{(k)}_F) | < \varepsilon / 2n!$, $1 \le k \le q - 1$ (последнее возможно в силу того, что коэффициенты потоков $A^{(k)}_F$ являются локально интегрируемыми функциями). Возьмем функцию $\phi \in \mathrm{D}(B_\delta)$, $0 \le \phi \le 1$, $\phi|_{B_{\frac{\delta}{2}}} \equiv 1$. Тогда

$$l!\,\sigma(B_\delta; A^{(k)}_{F_j}) = \int\limits_{B_\delta} A^{(l)}_{F_j} \wedge \left[dd^c \left(| z |^2 \phi + | z |^2 (1 - \phi)\right)\right]^{n-l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-l} \binom{n-l}{k} \int\limits_{B_\delta \setminus B_{\frac{\delta}{2}}} A^{(l)}_{F_j} \wedge \left[dd^c | z |^2 \phi\right]^{n-l-k} \wedge \left[dd^c | z |^2 (1 - \phi)\right]^k +$$

$$+ \int\limits_{B_\delta} A^{(l)}_{F_j} \wedge \left[dd^c | z |^2 \phi\right]^{n-l} = I_{1,j} + I_{2,j}.$$

Аналогично

$$l!\,\sigma(B_\delta; A^{(l)}_F) = \sum_{k=1}^{n-l} \binom{n-l}{k} \int\limits_{B_\delta \setminus B_{\frac{\delta}{2}}} A^{(l)}_F \wedge \left[dd^c | z |^2 \phi\right]^{n-l-k} \wedge \left[dd^c | z |^2 (1 - \phi)\right]^k +$$

$$+ \int\limits_{B_\delta} A^{(l)}_F \wedge \left[dd^c | z |^2 \phi\right]^{n-l} = I_1 + I_2.$$

Так как на $B_\delta \backslash B_{\frac{\delta}{2}}$ коэффициенты потоков $A^{(l)}_{F_j}$ равномерно сходятся к коэффициентам потока $A^{(l)}_F$, то

$$\lim_{j \to \infty} I_{1,j} = I_1 .$$

В шаре B_δ поток- $A^{(l)}_F$ положителен, поэтому

$$| I_1 | \le l! \, |\sigma(B_\delta; A^{(l)}_F)| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{2}$$

Далее, так как $l < n - 1$, а $\operatorname{supp} | z |^2 \phi \Subset B_\delta$, то

$$\left| I_{2,j} \right| = \left| \int_{B_\delta} u_j (dd^c u_j)^l \wedge (dd^c | z |^2 \phi)^{n-l} \right| =$$

$$= \left| \int_{B_\delta} (dd^c u_j)^{l+1} \wedge | z |^2 \phi \, (dd^c | z |^2 \phi)^{n-l-1} \right| \le$$

$$\le \delta^2 \left| \int_{B_\delta} u_j (dd^c u_j)^{l+1} \wedge (dd^c | z |^2 \phi)^{n-l-1} \right| .$$

Следовательно,

$$\left| I_{2,j} \right| \le \delta^{2(n-l-1)} \left| \int_{B_\delta} A^{(n-1)}_{F_j} \wedge dd^c | z |^2 \phi \right| .$$

Как показано в теореме 4 из [1], последний интеграл стремится к нулю при $j \to \infty$ и, значит,

$$\left| I_{2,j} \right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall j > j_0 .$$

Поэтому, с учетом соотношения (2), отсюда следует неравенство

$$\left| \sigma(B_\delta; A^{(l)}_{F_j}) \right| < \varepsilon, \ \forall j > j_0 ,$$

что заканчивает доказательство для случая $q = n$.

Доказательство теоремы для случая $l < q - 1 < n - 1$ подобным же образом (с соответствующими техническими усложнениями) выводится из случая $l = q - 1 < n - 1$, подробное изложение которого содержится в [5, теорема 7.1.3], и мы его опускаем.

3. Сходимость потоков, ассоциированных с почти периодическими отображениями

Пусть отображение $f \in R_q(T_G)$, $a^{(l)}_f$ и $A^{(l)}_f$ — соответствующие потоки Монжа–Ампера. Положим, как и ранее,

$$a^{(l)}_{f,t} = \left(\frac{i}{2}\right)^{l} \sum_{I,J \in M_l} a^{(l)}_{IJ}(t \cdot x + iy; f)\, dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

$$A^{(l)}_{f,t} = \left(\frac{i}{2}\right)^{l} \sum_{I,J \in M_l} A^{(l)}_{IJ}(t \cdot x + iy; f)\, dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

где $t \in \mathbf{R}^n_+$, а $a^{(l)}_{I,J}$ и $A^{(l)}_{I,J}$ — коэффициенты потоков $a^{(l)}_f$ и $A^{(l)}_f$, соответственно.

Теорема 2. *Пусть $f \in R_q(T_G)$. Тогда потоки $a^{(l)}_{f,t}$ и $A^{(l)}_{f,t}$ при $m(t) \to \infty$ сходятся в $\mathbf{D}'_{n-l,\, n-l}(T_G)$ к некоторым потокам $\tilde{a}^{(l)}_f$ и $\tilde{A}^{(l)}_f$ с зависящими лишь от y локально суммируемыми коэффициентами, $0 \le l \le q-1$, причем*

$$dd^c \tilde{A}^{(l)}_f = \tilde{a}^{(l+1)}_f \in \mathbf{D}^+_{n-l-1}(T_G), \quad 0 \le l < q-1. \tag{3}$$

Для $l = q-1$ сформулированный результат содержится в теореме С; его доказательство при $l < q-1$ по сути повторяет доказательство этой теоремы, и мы его полностью приводить не будем. Отметим лишь следующий момент этого доказательства, который в дальнейшем понадобится.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \log |f|^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = |f|^{-4} \left(\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} |f|^2 - \frac{\partial |f|^2}{\partial z_i} \frac{\partial |f|^2}{\partial \bar{z}_j} \right),$$

то

$$a^{(l)}_{IJ} = \frac{1}{|f|^{4l}} h_{IJ}, \qquad A^{(l)}_{IJ} = \frac{\log |f|^2}{|f|^{4l}} h_{IJ},$$

где h_{IJ} — непрерывные почти периодические функции в T_G. Пусть

$$a^{(l)}_{IJ,\theta} = \frac{h_{IJ}}{|f|^{4l}_{\theta}} \quad \text{и} \quad A^{(l)}_{IJ,\theta} = \log |f|^2_{\theta}\, a^{(l)}_{IJ,\theta},$$

где $|f|_\theta := \max\{|f|, \theta\}$, $1 < \theta < 1$. Это почти периодические функции. Их средние значения $\tilde{a}^{(l)}_{IJ,\theta}(y)$ и $\tilde{A}^{(l)}_{IJ,\theta}(y)$ при $\theta \to 0$ сходятся в $L^1_{loc}(G)$ к функциям $\tilde{a}^{(l)}_{IJ}(y)$ и $\tilde{A}^{(l)}_{IJ}(y)$, соответственно. Доказательство этого опирается на следующий факт.

Положим

$$E^f_\theta = \{ z \in T_G : |f(z)| < \theta \}, \quad 1 < \theta < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть последовательность отображений $f_s \in R_q(T_G)$ сходится при $s \to \infty$ к $f \in R_q(T_G)$ равномерно в каждой области $T_{G'}$, $G' \Subset G$. Тогда для любой области $G_0 \Subset G$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $s_0 \in \mathbf{R}_+$ и $\theta_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что*

$$\int\limits_{(\Pi_1(x^0)\times G_0)\cap E^f_\theta} \left| A^{(l)}_{IJ}(z; f_s) \right| dx\,dy < \varepsilon,$$

$$\forall x^0 \in \mathbf{R}^n,\ \forall\theta < \theta_0,\ \forall s > s_0,\quad I, J \in M_l,\ 0 \le l \le q-1.$$

Доказательство этой леммы близко к доказательству леммы 1 из [1], и мы его опускаем. Потоки $\widetilde{a}^{(l)}$ и $\widetilde{A}^{(l)}$ с коэффициентами $\widetilde{a}^{(l)}_{IJ}(y)$ и $\widetilde{A}^{(l)}_{IJ}(y)$ являются искомыми пределами потоков $a^{(l)}_{f,t}$ и $A^{(l)}_{f,t}$.

Мы будем пользоваться также следующим представлением потоков $a^{(l)}_{f,t}$ и $A^{(l)}_{f,t}$ [1]. Если каждой форме

$$\phi = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-l} \sum_{I,J\in M_{n-l}} \phi_{IJ}(x+iy)\,dz^I \wedge d\bar{z}^J \in \mathbf{D}_{n-l,n-l}(T_G)$$

и каждому $t \in \mathbf{R}^n_+$ поставить в соответствие форму

$$\phi^t = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-l} \sum_{I,J\in M_{n-l}} \phi_{IJ}(t^{-1}\cdot x+iy)\,dz^I \wedge d\bar{z}^J \in \mathbf{D}_{n-l,n-l}(T_G), \tag{5}$$

то

$$\langle a^{(l)}_{f,t}, \phi\rangle = \frac{1}{t^1}\langle a^{(l)}_f, \phi^t\rangle,$$

$$\langle A^{(l)}_{f,t}, \phi\rangle = \frac{1}{t^1}\langle A^{(l)}_f, \phi^t\rangle.$$

Итак, каждому отображению $f \in R_q(T_G)$ ставится в соответствие набор потоков $\widetilde{A}^{(l)}_f$ и $\widetilde{a}^{(l+1)}_f = dd^c\widetilde{A}^{(l)}_f$, $0 \le l \le q-1$ (полагая $\widetilde{a}^{(q)}_f := \widetilde{\Delta}_f = dd^c\widetilde{A}^{(q-1)}_f$). Учитывая, что потоки $a^{(l)}_f$ и $A^{(l)}_f$, которые были при этом использованы, удовлетворяют соотношениям $a^{(l)}_f = \left(dd^c A^{(0)}_f\right)^l$, возникает естественное предположение о наличии подобной же связи между потоками $\widetilde{a}^{(l)}_f$ и $\widetilde{A}^{(0)}_f$. Однако, как будет показано в следующем пункте, равенство $\widetilde{a}^{(l)}_f = \left(dd^c\widetilde{A}^{(0)}_f\right)^l$ при $l > 1$, вообще говоря, не верно. Тем не менее, определенные связи между этими потоками имеются, о чем, в частности, свидетельствует следующая

Теорема 3. $\operatorname{supp}\widetilde{a}^{(l+1)}_f \subset \operatorname{supp}\widetilde{A}^{(l)}_f \subset \operatorname{supp}\widetilde{a}^{(l)}_f$, $1 \le l \le q-1$.

Доказательство. Первое из включений очевидно в силу (3). Докажем второе соотношение. Пусть $\operatorname{supp}\widetilde{a}^{(l)}_f = T_{G_1}$, $G_1 \subset G$. Возьмем произвольную строго положительную форму $\phi \in \mathbf{D}_{n-l,n-l}(T_{G\setminus G_1})$ и докажем, что $\langle \widetilde{A}^{(l)}_f, \phi\rangle = 0$.

Пусть $\operatorname{supp}\phi \subset T_{G_2}$, $G_2 \Subset G\setminus G_1$, $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|\langle \widetilde{A}_f^{(l)}, \phi \rangle| = \lim_{m(t)\to\infty} \frac{1}{t^1} |\langle A_f^{(l)}, \phi^t \rangle| \le$$

$$\le \lim_{m(t)\to\infty} \frac{1}{t^1} \Big| \int_{E_\theta^f} A_f^{(l)} \wedge \phi^t \Big| + \limsup_{m(t)\to\infty} \frac{1}{t^1} \Big| \int_{T_{G_2}\setminus E_\theta^f} A_f^{(l)} \wedge \phi^t \Big| = I_1 + I_2,$$

где форма ϕ^t определяется равенством (5), а множество E_θ^f — равенством (4).

В соответствии с леммой 1 для $f_s \equiv f$, число θ можно выбрать так, что $I_1 < \varepsilon$. При этом

$$I_2 = \limsup_{m(t)\to\infty} \frac{1}{t^1} \Big| \int_{T_{G_2}\setminus E_\theta^f} \log|f|^2 a_f^{(l)} \wedge \phi^t \Big| \le$$

$$\le (\log \|f\|_{G_2} + 4|\log\theta|) \lim_{m(t)\to\infty} \langle a_{f,t}^{(l)} \wedge \phi \rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, наконец, следующий результат о сходимости ассоциированных потоков.

Теорема 4. *Если последовательность отображений $f_s \in R_q(T_G)$ сходится при $s \to \infty$ к отображению $f \in R_q(T_G)$ равномерно на всех областях $T_{G'}$, $G' \Subset G$, то $\widetilde{a}_{f_s}^{(l)} \to \widetilde{a}_f^{(l)}$ и $\widetilde{A}_{f_s}^{(l)} \to \widetilde{A}_f^{(l)}$ в $\mathbf{D}'_{n-l,n-l}(T_G)$, $0 \le l \le q-1$.*

Доказательство. Как было отмечено после формулировки теоремы 2, коэффициенты $\widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f_s)$ и $\widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f)$ потоков $\widetilde{A}_{f_s}^{(l)}$ и $\widetilde{A}_f^{(l)}$ являются пределами при $\theta \to 0$ в L^1_{loc} коэффициентов $\widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f_s)$ и $\widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f)$ потоков $\widetilde{A}_{f_s,\theta}^{(l)}$ и $\widetilde{A}_{f,\theta}^{(l)}$, соответственно.

Для произвольной функции $\phi \in \mathbf{D}(G)$ имеем:

$$\Big| \int_G \left(\widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f_s) - \widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f)\right) \phi(y)\, dy \Big| \le$$

$$\le \Big| \int_G \left(\widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f_s) - \widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f_s)\right) \phi(y)\, dy \Big| +$$

$$+ \Big| \int_G \left(\widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f_s) - \widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f)\right) \phi(y)\, dy \Big| +$$

$$+ \Big| \int_G \left(\widetilde{A}_{IJ,\theta}^{(l)}(y; f) - \widetilde{A}_{IJ}^{(l)}(y; f)\right) \phi(y)\, dy \Big| = I_1 + I_2 + I_3.$$

В силу леммы 1, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ можно выбрать такое $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что для всех $s \geq s_0$

$$\frac{1}{2^n t^1} \int\limits_{(\Pi_t \times G) \cap E^f_\theta} \left| A^{(l)}_{IJ}(f_s) \right| \, | \phi | \, dx \, dy < \frac{\varepsilon}{6};$$

такое же неравенство выполняется и для $A^{(l)}_{IJ}(f)$. Выберем $s_1 \geq s_0$ так, чтобы $E^{f_s}_\theta \subset E^f_{2\theta}$ при $s \geq s_1$. Тогда с учетом леммы Фату получаем:

$$I_1 = \left| \int\limits_G \lim_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \left[\int\limits_{\Pi_t} \left(A^{(l)}_{IJ,\theta}(f_s) - A^{(l)}_{IJ}(f_s) \right) dx \right] \phi(y) \, dy \right| \leq$$

$$\leq \liminf_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int\limits_{(\Pi_t \times G) \cap E^f_\theta} \left| A^{(l)}_{IJ,\theta}(f_s) - A^{(l)}_{IJ}(f_s) \right| \, | \phi(y) | \, dx \, dy \leq$$

$$\leq 2 \liminf_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int\limits_{(\Pi_t \times G) \cap E^f_{2\theta}} \left| A^{(l)}_{IJ}(f_s) \right| \, | \phi(y) | \, dx \, dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично, $I_3 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Наконец, так как $\widetilde{A}^{(l)}_{IJ,\theta}(f_s) \rightrightarrows \widetilde{A}^{(l)}_{IJ,\theta}(f)$ в $T_{G'}$, $G' \Subset G$, то для всех достаточно больших s $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Значит, $\widetilde{A}^{(l)}_{IJ}(f_s) \to \widetilde{A}^{(l)}_{IJ}(f)$ в $\mathbf{D}'(G)$, и утверждение теоремы доказано.

4. Функция Иессена

Как показано в [3], при $q = 1$, т.е. для почти периодических функций, поток (функция) $\frac{1}{2}\widetilde{A}^{(0)}_f$ эквивалентен выпуклой функции $A_f(y)$, называемой функцией Иессена голоморфной почти периодической функции f.* Более того, $A_f(y)$ является не только слабым пределом функций $\log | f(t \cdot x + iy) |$, но и равномерным по $x^0 \in \mathbf{R}^n$ и $y \in G_0 \Subset G$ пределом функций

$$\frac{1}{2^n t^1} \int\limits_{\Pi_t(x^0)} \log | f(x + iy) | \, dx$$

при $m(t) \to \infty$.

---

* В [3] функция Иессена строилась по функции $\log | f |$, а не $\log | f |^2$, как всюду в данной работе.

Покажем, что этот результат распространяется и на голоморфные почти периодические отображения. Для этого нам понадобится следующее уточнение леммы 1. Положим

$$E^f_{\theta, y} = \{ x \in \mathbb{R}^n \colon\ x + iy \in E^f_\theta \},$$

где множество E^f_θ определено равенством (4).

Лемма 2. *Пусть последовательность голоморфных почти периодических отображений $f_s \colon T_G \to \mathbb{C}^q$ сходится при $s \to \infty$ к отображению $f \not\equiv 0$ равномерно в каждой области $T_{G'}$, $G' \Subset G$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой области $G_0 \Subset G$ найдутся такие s_0 и $\theta_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что*

$$\int\limits_{\Pi_1(x^0) \cap E^f_{\theta, y}} \bigl| \log | f_s(x + iy) | \bigr| \, dx < \varepsilon, \ \forall x^0 \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in G_0, \ \forall\, \theta \le \theta_0, \ \forall s \ge s_0.$$

При доказательстве этой леммы будем использовать следующий результат, соответствующим образом уточняющий теорему 1.

Лемма 3. *Пусть F_j — последовательность голоморфных отображений области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^q$, равномерно на компактах в Ω сходящаяся к отображению $f \not\equiv 0$. Пусть далее, $U_n := \{ z \in \mathbb{C}^n \colon\ | z_k | < 1,\ 1 \le k \le n \} \Subset \Omega$. Тогда*

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_{\tilde U_n} \log | F_j(x) | \, dx = \int\limits_{\tilde U_n} \log | F(x) | \, dx, \tag{6}$$

где $\tilde U_n = \{ z \in \mathbb{R}^n \colon\ | x_k | < 1,\ 1 \le k \le n \}$ — сечение поликруга U_n вещественной гиперплоскостью $y = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Не нарушая общности можно считать, что $| F_j(z) | < 1$ в U_n, $F(0) \ne 0$. В силу леммы Фату,

$$\limsup_{j \to \infty} \int\limits_{\tilde U_n} \log | F_j(x) | \, dx \le \int\limits_{\tilde U_n} \log | F(x) | \, dx.$$

Покажем, что справедливо и неравенство

$$\liminf_{j \to \infty} \int\limits_{\tilde U_n} \log | F_j(x) | \, dx \ge \int\limits_{\tilde U_n} \log | F(x) | \, dx \tag{7}$$

Доказательство проведем индукцией по числу переменных. Для $n = 1$ соотношение (6) хорошо известно (см., например. [6, с. 57]). Пусть для $n - 1$ неравенство (7) доказано. Рассмотрим

$$\int\limits_{\widetilde{U}_n} \log | F_j(x) | \, dx = \int\limits_{\widetilde{U}_1} dx_n \int\limits_{\widetilde{U}_{n-1}} \log | F_j(x', x_n) | \, dx'.$$

В силу леммы 3 из [7],

$$\int\limits_{\widetilde{U}_n} \log | F_j(x', x_n) | \, dx' \geq - C(n) \log | F_j(0, x_n) |.$$

Поэтому, используя лемму Фату и предположение индукции, получаем:

$$\liminf_{j \to \infty} \int\limits_{\widetilde{U}_1} dx_n \int\limits_{\widetilde{U}_{n-1}} \log | F_j(x', x_n) | \, dx' \geq$$

$$\geq \int\limits_{\widetilde{U}_1} \liminf_{j \to \infty} \Big[\int\limits_{\widetilde{U}_{n-1}} \log | F_j(x', x_n) | \, dx' - C(n) \log | F_j(0, x_n) | \Big] \, dx_n +$$

$$+ \liminf_{j \to \infty} \int\limits_{\widetilde{U}_1} C(n) \log | F_j(0, x_n) | \, dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{\widetilde{U}_1} dx_n \int\limits_{\widetilde{U}_{n-1}} \log | F_j(x', x_n) | \, dx' = \int\limits_{\widetilde{U}_n} \log | F(x) | \, dx,$$

что завершает доказательство леммы 3.

Доказательство леммы 2. Предположим, противное, т.е. пусть существуют последовательности $s_j \to \infty$, $x^j \in \mathbb{R}^n$, $y^j \in G_0$, $\theta_j \to 0$ и число $c > 0$ такие, что

$$\int\limits_{\Pi_1(x^j) \cap E^f_{\theta_j, y^j}} \log | f_{s_j}(x + iy^j) | \, dx < - c.$$

Проредив последовательность y_j, можно считать, что $y^j \to y^0 \in \overline{G}_0$, а проредив x_j, что $f_\bullet(x^j + z) \rightrightarrows F(z)$ в $T_{G'}$, $\forall\, G' \Subset G$. Ввиду равномерной непрерывности функции f в $T_{G'}$, существует последовательность $\theta'_j \to 0$ такая, что

$$E^f_{\theta'_j, y^j} \subset E^f_{\theta'_j, y^0}.$$

Далее, для некоторой последовательности $\theta''_j \to 0$

$$E^f_{\theta'_j, y^0} - x^j \subset E^F_{\theta''_j, y^0},$$

поэтому

$$\int\limits_{\Pi_1 \cap E^{F_{s_j}}_{\theta_j,\, y^0}} \log |f_{s_j}(x + x^j + iy^j)|\, dx < -c.$$

Положим $F_j(z) = f_{s_j}(z + x^j + i(y^j - y^0))$. Ясно, что $F_j \rightrightarrows F$ в области T_{G_1}, $G_0 \Subset G_1 \Subset G$. Из леммы 3 вытекает, что

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_{\Pi_1} \log |F_j(x + iy^0)|\, dx = \int\limits_{\Pi_1} \log |F(x + iy^0)|\, dx. \tag{8}$$

По лемме из [3] можно выбрать $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ так, чтобы

$$\int\limits_{\Pi_1 \cap E^F_{\theta,\, y^0}} \log |F(x + iy^0)|\, dx > -\frac{c}{2}. \tag{9}$$

Но поскольку

$$\int\limits_{\Pi_1 \setminus E^F_{\theta,\, y^0}} \log |F_j(x + iy^0)|\, dx \to \int\limits_{\Pi_1 \setminus E^F_{\theta,\, y^0}} \log |F(x + iy^0)|\, dx,$$

то из (8) и (9) следует, что

$$-c \ge \lim_{j \to \infty} \int\limits_{\Pi_1 \setminus E^F_{\theta,\, y^0}} \log |F_j(x + iy^0)|\, dx = \int\limits_{\Pi_1 \setminus E^F_{\theta,\, y^0}} \log |F(x + iy^0)|\, dx > -\frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 5. *Пусть $f: T_G \to \mathbb{C}^q$ — голоморфное почти периодическое отображение. Тогда:*

(1) *существует предел*

$$\lim_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int\limits_{\Pi_t(x^0)} \log |f(x + iy)|\, dx \overset{\text{def}}{=} A_f(y),$$

равномерный по $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и по $y \in G_0$, $G_0 \Subset G$;

(2) *$A_f(y)$ — выпуклая функция от y;*

(3) *если f_j — последовательность голоморфных почти периодических отображений, сходящаяся при $j \to \infty$ к отображению f равномерно в $T_{G'}$, $G' \Subset G$, то $A_{f_j}(y) \to A_f(y)$ равномерно по $y \in G'$.*

Доказательство этой теоремы опускаем, поскольку ее утверждения (1) и (2) с учетом леммы 2 выводятся практически так же, как и теорема 1 в [3], а утверждение

(3) доказывается с помощью леммы 2 аналогично теореме 4 данной работы. Отметим только тот факт, что функция A_f является равномерным (и монотонным) пределом функций $A_{f,\theta}$ при $\theta \downarrow 0$, где $A_{f,\theta}$ — среднее почти периодической функции $\log |f|_\theta = \max\{\log|f|, \log\theta\}$, $0<\theta<1$.

Подчеркнем, что в теореме 5 требование регулярности на отображение f не накладывается. Это позволяет показать, что соотношение $\widetilde{a}_f^{(l)} = \left(dd^c \widetilde{A}_f^{(0)}\right)^l$ для $f \in R_q(T_G)$ при $l>1$, вообще говоря, не имеет места. Именно, пусть $f=(f_1,\dots,f_q) \in R_q(T_G)$, $t \in \mathbf{R}_+^q$, тогда $t\cdot f = (t_1 f_1, \dots, t_q f_q) \in R_q(T_G)$, причем нулевые множества всех отображений $t \cdot f$, $t \in \mathbf{R}_+^q$ совпадают, и, значит, $\widetilde{\Delta}_{t\cdot f} = \widetilde{\Delta}_f$, $\forall\, t \in \mathbf{R}_+^q$. С другой стороны, если зафиксировать $j \le q$, то при $t_j \to 1$ и $t_i \to 0$ $(i \ne j)$ $t\cdot f \rightrightarrows (0,\dots,0,f_j,0,\dots,0)$ в $T_{G'}$, $G' \Subset G$, и по теореме 5 $A_{t\cdot f} \rightrightarrows A_{f_j}$. Поэтому (см., например, [8]) $\left(dd^c A_{t\cdot f}\right)^l \to \left(dd^c A_{f_j}\right)^l$. Если бы выполнялось равенство $\widetilde{\Delta}_f = \left(dd^c \widetilde{A}_f^{(0)}\right)^q$, то были бы верными и соотношения $\widetilde{\Delta}_f = 2^{-q}\left(dd^c A_{f_j}\right)^l$, $1 \le j \le q$ и, как легко видеть, $\widetilde{\Delta}_f$ не зависело бы от f.

Следующий пример, принадлежащий Л.И. Ронкину, показывает, что разница между потоками $\widetilde{\Delta}_f$ и $\left(dd^c \widetilde{A}_f^{(0)}\right)^l$ может быть весьма существенной.

П р и м е р. Рассмотрим голоморфное периодическое отображение $f(z_1,z_2) = (\sin z_1, \sin z_2)$ пространства $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}^2$. Оно регулярно, и $|Z_f| \cap \{z \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Im} z_2 \ne 0\} = \emptyset$, поэтому $\widetilde{\Delta}_f(T_G) = 0$ для любой области $G \subset \{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \to 0\}$.

С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что

$$A_f(y_1, y_2) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(\sinh^2 y_1 + \sinh^2 y_2 + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

и при $y_2 \ne 0$

$$D(y_1, y_2) \overset{\text{def}}{=} \det\left(\frac{\partial^2 A_f(y)}{\partial y_j\, \partial y_l}\right) =$$

$$= [(1 - 2\cosh 2y_1 + \cosh 2y_1 \cosh 2y_2)(1 - 2\cosh 2y_2 + \cosh 2y_1 \cosh 2y_2) -$$

$$- \sinh^2 2y_1 \sinh^2 2y_2] I_1^2 + 2[(1 - 2\cosh 2y_1 + \cosh 2y_1 \cosh 2y_2)\cosh 2y_2 +$$

$$+ (1 - 2\cosh 2y_2 + \cosh 2y_1 \cosh 2y_2)\cosh 2y_1] I_1 I_2 + 4\cosh 2y_1 \cos 2y_2\, I_2^2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx_1\, dx_2}{(\sinh^2 y_1 + \sinh^2 y_2 + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)^2},$$

$$I_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)\, dx_1\, dx_2}{(\sinh^2 y_1 + \sinh^2 y_2 + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)^2},$$

Положим $y_1 = 0$, $y_2 = t > 0$. Поскольку $I_j = 8e^{-4t}(1 + o(1))$, $t \to \infty$, $j = 1, 2$, то

$$D(0, t) = (8e^{-4t})^2 [- (\cosh 2t - 1)^2 (1 + o(1)) + 2(\cosh 2t - 1)^2 (1 + o(1)) +$$
$$+ 4 \cosh 2t (1 + o(1))] = 64e^{-4t}(1 + o(1)),$$

и, значит, при достаточно больших $t > 0$ $D(0, t) \neq 0$, т.е. $(dd^c A_f)^2 \not\equiv 0$ при $y_2 \neq 0$.

5. Отображения без нулей

Теорема 6. *Для того чтобы отображение $f \in R_q(T_G)$ не имело нулей в области T_{G_0}, $G_0 \Subset G$, необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{\Delta}_f \mid_{T_{G_0}} = 0$.*

Доказательство. Утверждение теоремы в сторону необходимости очевидно. Доказательство достаточности близко к доказательству теоремы 3 из [9] для случая $q = 1$. Именно, пусть $| Z_f | \cap T_{G_0} \neq \emptyset$. Так как $\dim | Z_f | \leq n - q$, то существуют точка $z^0 \in | Z_f | \cap T_{G_0}$ и выборка $I \in M_{n-q}$ такие, что $\dim | Z_f | \cap L = 0$, где $L = \{ z \in \mathbb{C}^n : z_I = z_I^0 \}$ (в случае $q = n$, $L = \mathbb{C}^n$). Поэтому можно выбрать $r > 0$ так, чтобы

$$m := \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| f(z_{\bar I}^0 + r^{\bar I} e^{i\theta}, z_I^0) \right| > 0$$

($\bar I \in M_q$ — выборка, дополнительная к выборке I).

В силу почти периодичности отображения f, существует относительно плотное в $\mathbb{R}^n$ множество точек h^j таких, что

$$\| f(z + h^j) - f(z) \|_{G_1} < m,$$

где $G_1 = \{ y : \ | y_k - y_k^0 | < r, \ 1 \leq k \leq n \} \Subset G_0$. В частности, при $| z_k - z_k^0 | = r, k \in \bar I$,

$$\left| f(z_{\bar I} + h_{\bar I}^j, z_I^0 + h_I^j) - f(z_{\bar I}, z_I^0) \right| < m,$$

поэтому по теореме Руше для голоморфных отображений любое отображение $f_j(z_{\bar I}) := f(z_{\bar I} + h_{\bar I}^j, z_I^0 + h_I^j)$ имеет корень в поликруге $\{ \ | z_k - z_k^0 | = r, \ k \in \bar I \}$. Таким образом, в области T_{G_1} множество корней отображения f имеет относительно плотную проекцию на $\mathbb{R}^n$.

Выберем подмножество E корней f такое, что при некоторых $\delta > 0$, $l > 0$ и всех $\zeta \in E$ шары $B_\zeta = \{ z : | z - \zeta | < \delta \} \subset T_{G_1}$ попарно не пересекаются и

$$\{ z : x \in \Pi_{l1}(\xi), y \in G_1 \} \cap E \neq \emptyset \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

По теореме Лелона (напр., [10], теорема 2.23) $2(n-q)$-мерный объем $V_f^{(q)}(|Z_f| \cap B_\zeta)$ множества $|Z_f| \cap B_\zeta$ отграничен от нуля некоторой константой $c > 0$, зависящей только от δ. Поэтому

$$V_f^{(q)}\left(\Pi_{N1} \times G_1\right) \geq \sum_{B_\zeta \subset \Pi_{N1} \times G_1} V_f^{(q)}(B_\zeta) \geq c_1(l, \delta) N^n$$

и, следовательно,

$$\sigma\left(\Pi_1 \times G_1; \widetilde{\Delta}_f\right) = \lim_{N \to \infty} \frac{V_f^{(q)}\left(\Pi_{N1} \times G_1\right)}{(2N)^n} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Как было отмечено в предыдущем разделе, поток $(dd^c A_f)^q$, вообще говоря, не определяет плотность нулей отображения $f \in R_q(T_G)$ при $q > 1$. Тем не менее, как будет показано ниже, некоторую информацию о распределении нулей он может нести.

Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма 4. *Для того чтобы отображение* $f \in R_q(T_G)$ *не имело нулей в области* T_{G_0}, $G_0 \subset G$, *необходимо, чтобы*

$$\inf\{\,|f(x+iy)|: y \in G',\ x \in \mathrm{R}^n\,\} > 0$$

для любой области $G' \Subset G_0$, *и достаточно, чтобы*

$$\inf\{\,|f(x+iy)|: x \in \mathrm{R}^n\,\} > 0,\ \forall y \in G_0.$$

Доказательство. Утверждение леммы в сторону достаточности очевидно. Для доказательства необходимости предположим противное, т.е., что

$$\inf\{\,|f(x+iy)|: y \in G',\ x \in \mathrm{R}^n\,\} = 0$$

для некоторой области $G' \Subset G_0$. Положим

$$P_k = \left\{y \in \overline{G}_1 : \inf\{\,|f(x+iy)|: y \in G',\ x \in \mathrm{R}^n\,\} < 2^{-k}\right\},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что $\overline{P}_{k+1} \subset \overline{P}_k$, поэтому

$$\exists\, y^0 \in \bigcap_k \overline{P}_k = \bigcap_k P_k.$$

Значит, для некоторой последовательности точек $h^j \in \mathrm{R}^n$ выполнено равенство $\lim_{j \to \infty} f(h^j + iy^0) = 0$. Выбрав из последовательности отображений $f(z + h^j)$ подпоследовательность, сходящуюся равномерно в T_{G_0} к некоторому отображению $F(z)$, получим, что $F(iy^0) = 0$. По теореме 6 $\widetilde{\Delta}_F \neq 0$ на T_{G_0}. В силу теоремы 4 $\widetilde{\Delta}_f \neq 0$ на T_{G_0}, что по теореме 6 приводит к противоречию. Лемма доказана.

Как уже отмечалось, функция Иессена $A_f(y)$ является равномерным (на компактах) и монотонным пределом при $\theta \downarrow 0$ выпуклых функций

$$A_{f,\theta}(y) = \lim_{m(t)\to\infty} \frac{1}{2^n t^1} \int_{\Pi_t} \log | f(x+iy) |_\theta \, dx$$

($| f |_\theta = \max \{ | f |, \theta \}$). Поэтому немедленным следствием леммы 4 является

Лемма 5. *Для того чтобы отображение $f \in R_q(T_G)$ не имело нулей в области T_{G_0}, $G_0 \subset G$, необходимо, чтобы для любой области $G' \Subset G_0$ существовало такое $\theta > 0$, что $A_{f,\theta}(y) = A_f(y)$, $\forall y \in G'$, и достаточно, чтобы для каждого $y \in G_0$ нашлось $\theta > 0$, что $A_{f,\theta}(y) = A_f(y)$.*

Это замечание позволяет доказать следующий факт.

Пусть функция Иессена $A_f(y)$ отображения $f \in R_n(T_G)$ удовлетворяет условию $(dd^c A_f)^n = 0$ в некоторой строго выпуклой области $G_0 \subset G$, причем дополнительно известно, что f не имеет нулей в области $T_{G_0 \setminus \bar{G}_1}$ для некоторой области $G_1 \Subset G_0$. Тогда f не имеет нулей во всей области T_{G_0}.

Доказательство этого использует технику, связанную с вещественным оператором Монжа–Ампера в $\mathbf{R}^n$ (см. [11]). Вещественный оператор Монжа–Ампера $\mathbf{M}$ определяется на функциях $v(y) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbf{R}^n$, равенством

$$\mathbf{M}\, v(y) = \det \left(\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_j \, \partial y_k} \right)^n_{j,k=1}$$

и единственным образом продолжается на произвольные выпуклые функции. Задача Дирихле

$$\begin{cases} \mathbf{M}\, v(y) = 0, & y \in D, \\ v(y) = \phi(y), & y \in \partial D \end{cases}$$

в строго выпуклой области D для любой функции $\phi \in C(\partial D)$ имеет единственное решение $v_\phi(y)$ в классе $\mathrm{Conv}(D)$ выпуклых функций в D. При этом

$$v_\phi(y) = \sup \{ v(y) \in \mathrm{Conv}(D) : v(y) \le \phi(y),\ \forall y \in \partial D \}. \tag{10}$$

Итак, пусть существует точка $z^0 \in | Z_f | \cap T_{G_1}$. Покажем, что $(dd^c A_f)^n \neq 0$ в T_{G_0}. В силу почти периодичности отображения f для любого $\theta > 0$ существует такая окрестность $U_\theta \Subset T_{G_0}$ точки z_0 и такое относительно плотное в $\mathbf{R}^n$ множество точек $\{ h^j(\theta) \}$, что

$$\sup \{ \, | f(z + h^j(\theta)) | : z \in U_\theta , \; j = 1, 2, \ldots \} < \theta.$$

Значит,

$$A_{f,\theta}(y^0) > A_f(y^0), \;\; \forall \; \theta > 0. \tag{11}$$

Поскольку функция A_f зависит только от y и $(dd^c A_f)^n = 0$ в T_{G_0}, то всюду в G_0 она удовлетворяет равенству $\mathrm{M}A_f = 0$ и, следовательно, является решением задачи Дирихле

$$\begin{cases} \mathrm{M}\, v\,(y) = 0, & y \in G_2, \\ v\,(y) = A_f(y), & y \in \partial G_2 \end{cases}$$

в любой строго выпуклой области $G_2 \Subset G_0$. Выберем область G_2 так, чтобы $\partial G_2 \subset G_0 \backslash \overline{G}_1$, и число $\theta > 0$ (по лемме 5) такое, что $A_{f,\theta}(y) > A_f(y) \;\; \forall y \in \partial G_2$. В силу свойства (10) максимальности решения задачи Дирихле $A_f(y) \geq A_{f,\theta}(y), \forall\, y \in G_2$, что противоречит неравенству (11).

Более аккуратное использование тех же соображений позволяет показать, что условие отсутствия корней отображения f вблизи границы области T_{G_0} является лишним. Именно, справедлива

Теорема 7. *Пусть $f \in R_n\,(T_G)$ удовлетворяет равенству $(dd^c A_f)^n = 0$ в некоторой области $G_0 \Subset G$. Тогда $| Z_f | \cap T_{G_0} = \emptyset$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть найдется точка $z^0 = x^0 + iy^0 \in | Z_f | \cap T_{G_0}$. Возьмем произвольный шар $B \Subset G_0$ с центром в точке y^0 и выберем такую окрестность U_0 точки z^0, что $U_0 \Subset T_B$ и $| f | \geq 2\theta > 0$ на ∂U_0. Ввиду почти периодичности отражения f, найдем относительно плотное множество $\{ h^j \}$ в R^n такое, что $\| f(z + h^j) - f(z) \|_B < \theta/4$, $\forall j$, поэтому отображение $f(z + h^j)$ имеет по крайней мере один корень в U_0 и $| f(z + h^j) | > 0$ на ∂U_0. Положим $U_j = U_0 + h^j$, $V_j = \{ z \in U_j : \; | f(z) | < \theta \} \Subset U_j$, $V = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j$, и определим функцию

$$v^{(\theta)}(z) = \begin{cases} \log | f(z) |, & z \in T_G \backslash V, \\ \log \theta; & z \in V. \end{cases}$$

Это плюрисубгармоническая функция, совпадающая с $\log | f(z) |$ в $T_{G \backslash B}$, и

$$\log | f(z) | \leq v^{(\theta)}(z) \leq \log | f(z) |_\theta, \; \forall z \in T_G .$$

Поэтому плюрисубгармоническая функция

$$\tilde{v}^{(\theta)}(z) \overset{\text{def}}{=} \limsup_{z' \to z} \limsup_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int_{\Pi_t} v^{(\theta)}(z' + s)\, ds$$

удовлетворяет неравенствам

$$A_f(y) \le \tilde{v}^{(\theta)}(x + iy) \le A_{f,\theta}(y), \ \forall y \in T_G$$

и

$$\tilde{v}^{(\theta)}(x + iy) = A_f(y), \ \forall y \in G \backslash B, \ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Рассмотрим, наконец, функцию

$$w^{(\theta)}(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \tilde{v}^{(\theta)}(x + iy).$$

Это выпуклая функция в области G, совпадающая с $A_f(y)$ в $G \backslash B$. Покажем, что

$$w^{(\theta)}(y^0) > A_f(y^0). \tag{12}$$

Выберем окрестность $\tilde{U}_0$ точки z^0 так, чтобы $|f(z)| < \frac{\theta}{4}$ в $\tilde{U}_0$. В силу выбора множества $\{h^j\}$ в областях $\tilde{U}_j = \tilde{U}_0 + h^j$ выполнено неравенство $|f(z)| < \frac{\theta}{2}$; в частности, $\tilde{U}_j \subset V_j$. Положим

$$\tilde{V}_j = \{ x \in \mathbf{R}^n : x + iy^0 \in \tilde{U}_j \}.$$

Ясно, что $\operatorname{mes} \tilde{V}_j = \operatorname{mes} \tilde{V}_0 > 0, \forall j$. Проредив при необходимости последовательность h^j так, чтобы $\tilde{V}_k \cap \tilde{V}_l = \emptyset$ при $k \ne l$, и положив $\tilde{V} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \tilde{V}_k$, получим:

$$w^{(\theta)}(y^0) - A_f(y^0) \ge \liminf_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int_{\Pi_t \cap \tilde{V}} \left[v^{(\theta)}(x + iy^0) - \log |f(x + iy^0)| \right] dx \ge$$

$$\ge \liminf_{m(t) \to \infty} \frac{1}{2^n t^1} \int_{\Pi_t \cap \tilde{V}} \left[\log \theta - \log \frac{\theta}{2} \right] dx \ge C \operatorname{mes} \tilde{V}_0 > 0.$$

Тем самым, неравенство (12) доказано. В свою очередь, это неравенство противоречит условию (10) максимальности функции A_f в области B. Теорема доказана.

Утверждение, аналогичное теореме 7, по-видимому, должно быть справедливо и для отображения из $R_q(T_G)$, $q < n$, однако доказательство этого нам не известно. Кроме того, теорема 7 делает правдоподобной следующую гипотезу:

$$(dd^c A_f)^q \ge C \tilde{\Delta}_f, \quad C > 0.$$

В заключение выражаю свою глубокую признательность Л. И. Ронкину, который привлек мое внимание к этому кругу вопросов и принял активное участие в обсуждениях полученных результатов.

Проведение исследования, описанного в данной статье, в определенной степени стало возможным благодаря поддержке Международного научного фонда Сороса (грант No. U2X000).

Список литературы

1. *Л. И. Ронкин*, Теорема Иессена для голоморфных почти периодических отображений.— Укр. мат. журн. (1990), т. 42, № 8, с. 1094–1107.
2. *B. Jessen, H. Tornehave*, Mean motions and zeros of almost periodic functions.— Acta Math. (1945), v. 77, pp. 137–279.
3. *Л. И. Ронкин*, Теорема Иессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях.— Сиб. мат. журн. (1987), т. 28, № 3, с. 199–204.
4. *P. A. Griffith, J. King*, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties.— Acta Math. (1973), v. 130, pp. 145–220.
5. *L. I. Ronkin*, Functions of Completely Regular Growth. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht-Boston-London (1992), 392 p.
6. *B. C. Азарин*, Теория роста субгармонических функций. Ч. 1. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков (1978), 72 с.
7. *Л. И. Ронкин*, Некоторые вопросы полноты и единственности для функций многих переменных.— Функцион. анализ и его прил. (1973), т. 7, № 1, с. 45–55.
8. *M. Klimek*, Pluripotential Theory. Oxford University Press, London (1991), 266 p.
9. *Л. И. Ронкин*, Об одном классе голоморфных почти периодических функций.— Сиб. мат. журн. (1992), т. 33, № 2, с. 135–141.
10. *P. Lelong, L. Gruman*, Functions of Several Complex Variables. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1986), 270 p.
11. *J. Rauch, B. A. Taylor*, The Dirichlet problem for the multidimensional Monge–Ampère equation.— Rocky Montain Math. J. (1977), v. 7, pp. 345–364.

Currents associated with holomorphic almost periodic mappings

A.Yu. Rashkovskii

Let f be a regular holomorphic almost periodic mapping of a tube domain $T_G = \mathbb{R}^n + iG$ into $\mathbb{C}^q$, $q \le n$. The existence of currents $\widetilde{A}_f^{(l)}$ that are averages over $\mathbb{R}^n$ of the currents $\log |f| (dd^c \log |f|)^l$ is proved, and certain properties of these currents are studied. Some conditions of the absence of zeros of the mapping f in a domain $T_{G'}$, $G' \subset G$, are obtained in terms of the current $\widetilde{A}_f^{(q-1)}$ and the function $\widetilde{A}_f^{(0)}$.

Потоки, асоційовані голоморфними майже періодичними відображеннями

О.Ю. Рашковський

Нехай f — регулярне голоморфне майже періодичне відображення трубчастої області $T_G = \mathbb{R}^n + iG$ в $\mathbb{C}^q$, $q \le n$. Встановлено існування потоків $\widetilde{A}_f^{(l)}$ — середніх по $\mathbb{R}^n$ від потоків $\log |f| (dd^c \log |f|)^l$ — і вивчені властивості цих потоків. Здобуті умови відсутності нулів відображення f в області $T_{G'}$, $G' \subset G$, в термінах потоку $\widetilde{A}_f^{(q-1)}$ та функції $\widetilde{A}_f^{(0)}$.