Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 306–311

УДК 512.81

Симплектические листы на пуассоновых однородных пространствах групп Пуассона–Ли

Е.А. Каролинский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 22 февраля 1995 года

Дано описание симплектических листов на пуассоновом однородном пространстве группы Пуассона–Ли в терминах дубля $D(G)$. Получена явная формула для симплектической формы на листе. Обнаружена двойственность между симплектическими листами на пуассоновых однородных пространствах группы G и двойственной ей группы G^*.

Цель работы — описание симплектических листов на пуассоновом однородном пространстве произвольной группы Пуассона–Ли. Это описание является обобщением конструкции, известной ранее для симплектических листов на самой группе Пуассона–Ли [1, 2] и на главных однородных пространствах [3]. Кроме того, получена явная формула для симплектической формы на листе; обнаружена двойственность между симплектическими листами на пуассоновых однородных пространствах группы Пуассона-Ли и двойственной ей группы.

Пусть X — пуассоново многообразие (см. [4]), ξ — соответствующее бивекторное поле на X. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим отображение

$$\xi_x : T^*_x X \to T_x X, \quad \xi_x(l) := (l \otimes id)(\xi(x)).$$

Пусть $V_x := \operatorname{Im} \xi_x \subset T_x X$. Симплектические листы на X — это максимальные связные подмногообразия $Y \subset X$ такие, что $T_x Y = V_x$ при $x \in Y$. Обозначим через S_x симплектический лист, содержащий точку $x \in X$.

Пусть теперь X — пуассоново однородное пространство группы Пуассона–Ли G (см.[1, 5]). Пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $H_x \subset G$ — стационарная подгруппа точки $x \in X$, $\mathfrak{h}_x = \operatorname{Lie} H_x$. Тогда $T_x X = \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$, $T^*_x X = (\mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x)^* = \mathfrak{h}^\perp_x \subset \mathfrak{g}^*$, тем самым ξ_x можно рассмотреть как отображение

$$\xi_x : \mathfrak{h}^\perp_x \to \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x .$$

Пусть $D(\mathfrak{g})$ — дубль, соответствующий биалгебре Ли $\mathfrak{g}$; напомним (см. [6], § 13), что как векторное пространство $D(\mathfrak{g})$ совпадает с $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, а структура алгебры Ли на $D(\mathfrak{g})$ согласована со структурами алгебр Ли на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, причем естественное скалярное произведение в $D(\mathfrak{g})$ инвариантно. Пусть

$$\mathfrak{l}_x \subset D(\mathfrak{g}), \ \ \mathfrak{l}_x := \{\, a + l \mid a \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{h}_x^{\perp},\ \xi_x(l) = \bar{a} \,\},$$

где $\bar{a}$ — образ a в $\mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$. В [5] доказано, что $\mathfrak{l}_x$ — подалгебра в $D(\mathfrak{g})$, являющаяся максимальным изотропным подпространством; эти подалгебры были введены в [5] в связи с описанием всех пуассоновых однородных пространств произвольной группы Пуассона–Ли.

Пусть $D(G)$ — локальная группа Ли такая, что $\mathrm{Lie}\, D(G) = D(\mathfrak{g})$, а L_x и G^* — локальные подгруппы Ли в $D(G)$ такие, что $\mathrm{Lie}\, L_x = \mathfrak{l}_x$, $\mathrm{Lie}\, G^* = \mathfrak{g}^*$ (G^* — это локальная группа Пуассона–Ли, двойственная G). Будем рассматривать G и H_x как локальные группы Ли, а $X = G / H_x$ — как росток многообразия в окрестности точки x. Отображение

$$m : G^* \times G \to D(G), \qquad m(u, g) := ug,$$

является локальным диффеоморфизмом, поэтому G можно отождествить с $G^* \setminus D(G)$. Орбиты действия L_x на $G^* \setminus D(G)$ правыми сдвигами являются гладкими подмногообразиями, инвариантными относительно правого действия группы $H_x = L_x \cap G$. Поэтому они являются прообразами гладких подмногообразий в $G^* \setminus D(G) / H_x = G / H_x = X$. Пусть $y \in X$ близка к x и $M_y \subset X$ — подмногообразие из нашего семейства, проходящее через y, т.е. если $y = gx$, $g \in G$, то M_y — это образ $g \cdot L_x$ при отображении

$$D(G) \to G^* \setminus D(G) / H_x = G / H_x = X.$$

Теорема 1. $S_y = M_y$ *в окрестности* y.

З а м е ч а н и е. Вскоре после того, как настоящая статья была сдана в печать, появился препринт [7], в котором теорема 1 выводится из общей теории алгеброидов Ли, ассоциированных с пуассоновыми действиями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что $T_y M_y = V_y$ для всех y, близких к x. Если $y = gx$, $g \in G$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \tilde{\to} & G^* \setminus D(G) / H_x \\ \| & & \downarrow \varphi \\ X & \tilde{\to} & G^* \setminus D(G) / H_y \,, \end{array}$$

где φ — умножение справа на g^{-1}. Так как $L_y = g \cdot L_x \cdot g^{-1}$ (см. [5]), то при отображении

$$\psi : G^* \setminus D(G) \to G^* \setminus D(G), \ \ \psi(w) = wg^{-1},$$

орбиты правого действия L_x переходят в орбиты правого действия L_y. Поэтому M_y — это образ L_y-орбиты точки $e \in G^* \setminus D(G) = G$ при отображении

$$G \to G / H_y = X.$$

Касательное пространство к этой орбите в точке e равно $\pi(\mathfrak{l}_y)$, где π — проекция $D(\mathfrak{g})$ на $\mathfrak{g}$. Поэтому $T_y M_y$ — образ $\pi(\mathfrak{l}_y)$ в $\mathfrak{g} / \mathfrak{h}_y$, который равен $\mathrm{Im}\, \xi_y = V_y$ по определению $\mathfrak{l}_y$.

Пусть $f_x : L_x \to X$, $f_x(ug) := gx$, где $ug \in L_x$, $u \in G^*$, $g \in G$.

Следствие 1. $S_x = \mathrm{Im}\, f_x$ *в окрестности* x.

Следствие 2. *Отображение* f_x *осуществляет локальный диффеоморфизм между* S_x *и* $L_x \cap G^* \setminus L_x / L_x \cap G$.

Опишем симплектическую структуру на S_x. Рассмотрим на $D(\mathfrak{g})$ билинейную кососимметрическую форму b,

$$b(a + l,\ a' + l') := \frac{1}{2}\left(\langle l,\ a' \rangle - \langle l',\ a \rangle\right),$$

где $a + l,\ a' + l' \in D(\mathfrak{g})$, $a,\ a' \in \mathfrak{g}$, $l,\ l' \in \mathfrak{g}^*$, $\langle\ ,\ \rangle$ — естественное спаривание. Определим на $D(G)$ 2-форму α,

$$\alpha(ug) := \left(l_u^{-1}\ r_g^{-1}\right)^* b,$$

где $ug \in D(G)$, $u \in G^*$, $g \in G$, l_u — умножение слева на u, r_g — умножение справа на g. Иными словами, α — единственная 2-форма на $D(G)$, инвариантная относительно левых G^*-сдвигов, правых G-сдвигов и такая, что значение α в точке e равно b. Пусть α_x — ограничение формы α на L_x, а ω — симплектическая 2-форма на S_x.

Теорема 2. $\alpha_x = f_x^*\, \omega$.

Для доказательства теоремы 2 понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $ug \in L_x$, $u \in G^*$, $g \in G$, *и пусть* $y = gx$. *Тогда* $L_x = u \cdot L_y \cdot g$.

Доказательство. $u \cdot L_y \cdot g = ug \cdot g^{-1} \cdot L_y \cdot g = ug \cdot L_x = L_x$, так как $ug \in L_x$.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} L_y & \xrightarrow{f_y} & X \\ l_u r_g \downarrow & & \| \\ L_x & \xrightarrow{f_x} & X. \end{array}$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим вначале $b_x := \alpha_x(e)$. Так как $\mathfrak{l}_x$ изотропна, то

$$b_x(a + l,\ a' + l') = \langle l, a' \rangle.$$

С другой стороны, дифференциал f_x в единице переводит $a + l$ в $\bar{a} \in V_x \subset T_x X = \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$ (здесь $\bar{a}$ — образ $a \in \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$), а значение формы $\omega(x)$ на паре $(\bar{a}, \bar{a}')$ равно $\langle \xi_x^{-1} \bar{a}, \bar{a}' \rangle = \langle l, a' \rangle$ по определению $\mathfrak{l}_x$. Итак, $(f_x^* \omega)(e) = \alpha_x(e)$.

Заметим теперь, что если $ug \in L_x$, $u \in G^*$, $g \in G$, $y = gx$, то по лемме 2 $f_y^* \omega = (l_u r_g)^* f_x^* \omega$. Кроме того, $\alpha_y = (l_u r_g)^* \alpha_x$. Поэтому из доказанного равенства $(f_y^* \omega)(e) = \alpha_y(e)$ следует, что $(f_x^* \omega)(ug) = \alpha_x(ug)$.

Замечание. Согласно результатам работы [5], подалгебре $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_x$ соответствует не только пара (X, x), но и пара (X^*, x^*), где X^* — росток пуассонова однородного G^*-пространства в точке $x^* \in X^*$. Заметим, что S_{x^*} локально отождествляется с $L \cap G \setminus L / L \cap G^*$, где $L = L_x$, а S_x — с $L \cap G^* \setminus L / L \cap G$. Поэтому отображение $w \mapsto w^{-1}$, $w \in L$, индуцирует локальный диффеоморфизм между S_x и S_{x^*}. Из теоремы 2 следует, что этот диффеоморфизм переводит ω в $-\omega^*$, где ω и ω^* — симплектические формы на S_x и S_{x^*}.

Так как $d\omega = 0$, то в силу теоремы 2 ограничение $d\alpha$ на L_x равно 0.

Теорема 3. $d\alpha = -\eta / 2$, *где* η — *двусторонне инвариантная* 3-*форма на* $D(G)$, *значение которой в* $e \in D(G)$ — *это кососимметрическая форма* $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3) \mapsto \langle [\upsilon_1, \upsilon_2], \upsilon_3 \rangle$, *где* $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 \in D(\mathfrak{g})$, *а* $\langle\ ,\ \rangle$ — *естественное скалярное произведение в* $D(\mathfrak{g})$.

З а м е ч а н и е. η существует, так как форма $\langle [\upsilon_1, \upsilon_2], \upsilon_3 \rangle$ инвариантна относительно присоединенного представления.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Отождествим $D(G)$ с $G \times G^*$ так, чтобы элементу $ug \in D(G)$, $u \in G^*$, $g \in G$, соответствовал $(g, u^{-1}) \in G \times G^*$. При таком отождествлении α и η переходят в правоинвариантные формы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\eta}$ на $G \times G^*$. Покажем, что $d\tilde{\alpha} = -\tilde{\eta}/2$. Для этого достаточно проверить, что $d\tilde{\alpha}(e) = -\tilde{\eta}(e)/2$.

Запишем элементы $\mathrm{Lie}(G \times G^*) = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ в виде $a + l$, $a \in \mathfrak{g}$, $l \in \mathfrak{g}^*$. Тогда $\tilde{\alpha}(e) = \tilde{b}$, где

$$\tilde{b}(a + l, a' + l') = \frac{1}{2}(\langle l', a \rangle - \langle l, a' \rangle).$$

Имеем $d\tilde{\alpha}(e) = c$, где

$$c(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3) = \tilde{b}([\upsilon_1, \upsilon_2], \upsilon_3) + \tilde{b}([\upsilon_2, \upsilon_3], \upsilon_1) + \tilde{b}([\upsilon_3, \upsilon_1], \upsilon_2),$$

$\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ ([8], гл. III, § 3, предложение 51), то есть

$$\begin{gathered} 2c(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3) = \\ = \langle l_3, [a_1, a_2] \rangle + \langle l_1, [a_2, a_3] \rangle + \langle l_2, [a_3, a_1] \rangle - \\ - \langle [l_1, l_2], a_3 \rangle - \langle [l_2, l_3], a_1 \rangle - \langle [l_3, l_1], a_2 \rangle. \end{gathered}$$

Отсюда $2c = -\tilde{\eta}(e)$.

Автор глубоко благодарен В. Г. Дринфельду за постановку задачи и руководство работой и Л. Л. Ваксману за постоянный интерес и поддержку.

Список литературы

1. *M. A. Semenov-Tian-Shansky*, Dressing transformations and Poisson group actions. — Publ. RIMS Kyoto Univ. (1985), v. 21, No. 6, pp. 1237–1260.
2. *J.- H. Lu, A. Weinstein*, Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions.— J. Diff. Geometry (1990), v. 31, pp. 501–526.
3. *J.- H. Lu*, Multiplicative and affine Poisson structures on Lie groups, Ph. D. thesis, Berkeley, Univ. of California (1990), 70 p.
4. *A. Weinstein*, The local structure of Poisson manifolds. — J. Diff. Geometry (1983), v. 18, pp. 523–557.
5. *V. G. Drinfeld*, On Poisson homogeneous spaces of Poisson-Lie groups. — Теорет. и мат. физика (1993), т. 95, No. 2, с. 226–227.
6. *V. G. Drinfeld*, Quantum groups.— In: Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley, 1986), v. 1, AMS, Providence, RI (1986), pp. 798–820.
7. *J.-H. Lu*, Lie algebroids associated to Poisson actions. Preprint, Univ. of Arizona (March 7, 1995), 35 p.
8. *Н. Бурбаки*, Группы и алгебры Ли, главы 1-3. Мир, Москва (1976), 496 с.

The symplectic leaves on Poisson homogeneous spaces of Poisson–Lie groups

E. A. Karolinsky

The symplectic leaves on Poisson homogeneous spaces of a Poisson–Lie group G are described in terms of the double $D(G)$. An explicit formula for the symplectic form on a leaf is derived. A duality between the symplectic leaves on the Poisson homogeneous spaces of G and those of the dual group G^* is revealed.

Симплектичні листи на пуассонових однорідних просторах груп Пуассона–Лі

Е. А. Каролінський

Подано опис симплектичних листів на пуассоновім однорідні́м просторі групи Пуассона–Лі в термінах дубля $D(G)$. Здобуто явну формулу для симплектичної форми на листі. Знайдено двоїстість між симплектичними листами на пуассонових однорідних просторах групи G та двоїстій їй групи G^*.