Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с.329–337

УДК 517.55

# Периодические алгебраические дивизоры

Л.И. Ронкин

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47*

Статья поступила в редакцию 21 февраля 1994 года

Установлен общий вид полиномов от $n$ переменных, которые могут быть делителями целых периодических функций.

В [1] было показано, в частности, что любой неприводимый полином, делящий конечную экспоненциальную сумму (квазиполином), является полиномом первой степени. Естествен вопрос о виде полиномиальных делителей и для функций из более общих классов, в том числе для функций, представимых в виде бесконечных экспоненциальных сумм. Таким простейшим классом является класс $n$-периодических целых функций. С вопросом о полиномиальных делителях тесно связан вопрос об общем виде полиномов, дивизоры которых при периодическом их "размножении" порождают периодические дивизоры. Представляет также интерес вопрос о минимальном росте целых функций с такими дивизорами. Для точной формулировки этих вопросов и полученных в связи с ними результатов введем необходимые обозначения и определения.

Напомним, что дивизором в области $G \in \mathbf{C}^n$ называют пару $(|Z|, \gamma) = Z$, где носитель дивизора $|Z|$ — главное аналитическое множество* в $G$, а $\gamma = \gamma_Z(z)$ — целочисленная функция (кратность), определенная на множестве $|Z|^*$ регулярных точек множества $Z$, постоянная на его каждой связной компоненте. Всюду далее рассматриваем только положительные дивизоры, т.е. те, у которых $\gamma_Z(z) > 0$, $\forall z \in |Z|^*$.

Назовем дивизор $Z \subset \mathbf{C}^n$ $n$-периодическим с периодами $\omega_1 \in \mathbf{R}^n, \ldots, \omega_n \in \mathbf{R}^n$, где векторы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — линейно независимы, если $|Z| + \omega_j = |Z|$ и $\gamma_Z(z + \omega_j) \equiv \gamma_Z(z)$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Для краткости всюду далее вместо "$n$-периодический" используем термин "периодический", и, если не оговорено противное, полагаем $\omega_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, \omega_n = (0,\ldots,0,1)$, что не нарушает общности.

Через $Z_f$, где функция $f \in H(G)$, т.е. голоморфна в области $G$, обозначаем дивизор функции $f$. Таким образом, $|Z_f| = \{z : f(z) = 0\}$, $\gamma_{Z_f}(z)$ — кратность корня функции в точке $z$.

* Главными аналитическими множествами называются аналитические множества чистой размерности $n-1$.

Пусть $P(z)$ — неприводимый полином в $\mathbf{C}^n$ и $S = Z_p$ — его дивизор*. Обозначим через $S_\lambda$, где $\lambda \in \mathbf{R}^n$, сдвиг $S$ на $\lambda$, то есть положим $S_\lambda = \lambda + S = Z_{P_\lambda}$, где $P_\lambda(z) = P(z - \lambda)$. Рассмотрим затем пару

$$\widehat{S} = \widehat{S}^{(P)} = \left(|\widehat{S}|, \gamma_{\widehat{S}}\right),$$

где

$$|\widehat{S}| = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^n} |S_k|,$$

а $\gamma_{\widehat{S}}$ — функция, определенная на множестве

$$|\widehat{S}|^* = \left\{ \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^n} |S_k|^* \right\} \setminus \left\{ \bigcup_{k,l,S_k \neq S_l} |S_k| \cap |S_l| \right\}$$

посредством равенства $\gamma_{\widehat{S}}(z) = 1$.

Очевидно, что пара $\widehat{S}$ корректно определена и периодична, т.е. $|\widehat{S}| + \omega_j = |\widehat{S}|$, $|\widehat{S}|^* + \omega_j = |\widehat{S}|^*$ и $\gamma_{\widehat{S}}(z + \omega_j) = \gamma_{\widehat{S}}(z) = 1$, $\forall\, j = 1,\ldots,n$, $z \in |\widehat{S}|^*$. Однако эта пара, вообще говоря, не является дивизором, поскольку множество $|\widehat{S}|$ может не быть главным аналитическим множеством. Ясно, что оно будет таковым тогда и только тогда, когда с каждым компактом $K \subset \mathbf{C}^n$ пересекается лишь конечное множество дивизоров** $S_k$, $k \in \mathbf{Z}^n$.

Условимся дивизор $Z$, представимый в виде конечной суммы дивизоров $Z$ вида $z_j = \widehat{S}^{(P_j)}$, где $P_j$ — неприводимые полиномы, называть алгебраическим периодическим дивизором. Соответственно полином $P = P_1,\ldots,P_N$ будем называть порождающим дивизор

$$\widehat{S}^{(P)} = \sum_{j=1}^{N} \widehat{S}^{(P_j)}.$$

Для формулировки теоремы, в которой дается описание неприводимых полиномов, порождающих указанным способом алгебраические периодические дивизоры, нам понадобятся еще некоторые обозначения и предварительные сведения.

Пусть $P(z)$ — полином. Обозначим

$$r_p(x) = \operatorname{dist}(x, Z_p) = \min_{\zeta \in |Z_p|} |x - \zeta|, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Заметим, что

---

* Так как полином $P(z)$ неприводим, то множество $|S|^*$ связно, а $\gamma_S(z) = 1$, $\forall\, z \in |S|^*$.

** Для краткости под дивизором часто будем понимать его носитель. В случае дивизора неприводимой голоморфной функции это не приводит к каким-либо неясностям.

$$\left| r_P(x') - r_P(x'') \right| \leq | x' - x'' | \tag{1}$$

и

$$r_{P_\lambda}(x) = r_P(x + \lambda). \tag{2}$$

Полином $P(z)$ называется гипоэллиптическим (см., например, [2]), если $\varliminf_{x \to \infty} r_P(x) = \infty$. Обозначим $A = A_P = \{ \lambda \in \mathbf{R}^n : S_\lambda = S \}$ или, что то же самое, $A = \{ \lambda \in \mathbf{R}^n : P(z - \lambda) \equiv P(z) \}$. Очевидно, что $A$ — подпространство в $\mathbf{R}^n$, размерность которого, возможно, равна нулю. Обозначим через $A^\perp$ подпространство в $\mathbf{R}^n$, ортогональное к $A$. Заметим, что если $\dim A = m > 0$, то существует полином $Q$ от $n - m$ переменных $\zeta_{m+1} \in \mathbf{C}, \dots, \zeta_n \in \mathbf{C}$, такой, что

$$P(z) = Q(Hz), \tag{3}$$

где $H$ — вещественная $(n - m) \times n$-матрица, строки которой образуют базис в пространстве $A^\perp$.

Действительно, пусть $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ — какой-либо базис в $A$, а $\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_n$ — базис в $A^\perp$. Записывая $z$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ как вектор-столбцы, представим $z$ в виде $z = z' + z''$, где $z' = \zeta_1(z)\Lambda_1 + \dots + \zeta_m(z)\Lambda_m$, а $z'' = \zeta_{m+1}(z)\Lambda_{m+1} + \dots + \zeta_n(z)\Lambda_n$. Согласно определению пространства $A$ справедливо равенство $P(z) = P(z'')$, $\forall z \in \mathbf{C}^n$. Обозначим через $\Omega$ матрицу, обратную матрице $A$ со столбцами $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$. Строки матрицы $\Omega$ обозначим через $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. Очевидно, что $\Omega_1 \in A, \dots, \Omega_m \in A$, $\Omega_{m+1} \in A^\perp, \dots, \Omega_n \in A^\perp$, и что

$$\zeta''(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \zeta_{m+1}(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} Hz. \tag{4}$$

Положим

$$Q(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n) = P(\zeta_{m+1}\Lambda_{m+1} + \dots + \zeta_n \Lambda_n). \tag{5}$$

Тогда

$$Q(Hz) = P(z'') = P(z);$$

и тем самым представление (3) доказано в случае $m > 0$. Если $m = 0$, то представление (3) имеет место с $H = I$, $Q = P$.

**Теорема 1.** *Пусть $P(z)$ — неприводимый полином в $\mathbf{C}^n$, а $\hat{S}$, $Q$ и $A$ построены по нему, как указано выше. Тогда для того чтобы $S$ было дивизором, необходимо и достаточно, чтобы в подпространстве $A$ существовал базис из векторов, принадлежащих $\mathbf{Z}^n$, а полином $Q$ был гипоэллиптическим.*

Доказательство. Обозначим

$$E = \{ t \in \mathbb{R}^n : \underline{\lim}_{t \to \infty} r_P(tx) < \infty \}.$$

Если полином $P$ — гипоэллиптический, то $A = E = \{0\}$. Для произвольного полинома $P \not\equiv \mathrm{const}$ справедливо включение $A \subset E$. Действительно, если $\lambda \in A$, то $\mathrm{dist}\,(t\lambda, |s|) = \mathrm{dist}\,(t\lambda, |s_{t\lambda}|) = \mathrm{dist}\,(t\lambda, |s| + \lambda t) = \mathrm{dist}\,(0, |s|)$ и, значит,

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} r_P(t\lambda) = \underline{\lim}_{t \to \infty} \mathrm{dist}\,(t\lambda, |s|) = \mathrm{dist}\,(0, |s|) < \infty.$$

Таким образом, $\lambda \in E$, т.е. $A \subset E$. Если известно, что $\widehat{S}$ — дивизор, то справедливо и обратное включение. Действительно, пусть $\lambda \in E$. Тогда существует такая последовательность $t_j \to \infty$, что $\lim_{j \to \infty} r_P(t_j\lambda) < \infty$. Рассмотрим последовательность векторов $k^{(j)} \in \mathbf{Z}^n$ таких, что $|k^{(j)} - t_j\lambda| < \sqrt{n}$. Согласно (1) имеем тогда $|r_P(k^{(j)}) - r_P(t_j\lambda)| < \sqrt{n}$, откуда следует, что

$$\overline{\lim}_{j \to \infty} r_P(k^{(j)}) = M < \infty.$$

В этой ситуации, поскольку $r_P(k^{(j)}) = r_{P_{k^{(j)}}}(0)$, шар $|z| < 2M$ пересекается с бесконечным множеством дивизоров $S_{k^{(j)}}$. Если $\widehat{S}$ — дивизор, а полином $P$ неприводим, то это возможно только в случае, когда среди всего множества дивизоров имеется лишь конечное множество различных дивизоров. Таким образом, существует последовательность индексов $\{j_l\}_{l=1}^{\infty}$ такая, что $S_{k^{(j_\mu)}} = S_{k^{(j_\nu)}}$, $\forall \mu, \nu$. Заметим далее, что если $S_{k^{(j_\mu)}} = S_{k^{(j_\nu)}}$, то $P(z - k^{(j_\mu)}) \equiv P(z - k^{(j_\nu)})$, $P(z + k^{(j_\nu)}) - k^{(j_\mu)} \equiv P(z)$ и $P(z + l(k^{(j_\mu)} - k^{(j_\nu)}) \equiv P(z)$, $\forall l \in \mathbf{Z}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $P(z + t(k^{(j_\mu)} - k^{(j_\nu)})) \equiv P(z)$, $\forall t \in \mathbf{R}$ и, значит, $(k^{(j_\mu)} - k^{(j_\nu)}) \in A$. Ввиду замкнутости $A$ и того, что

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{k^{(j_\mu)} - k^{(j_\nu)}}{|k^{(j_\mu)} - k^{(j_\nu)}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|},$$

заключаем, что $\lambda \in A$ и, стало быть, $A \subset E$. Тем самым доказано, что если $\widehat{S}$ — дивизор, то $E = A$.

Отметим еще два свойства подпространств $A$ и $A^\perp$.

а) Пусть $k \in \mathbf{Z}^n$. Представим $k$ в виде $k = k' + k''$, где $k' \in A$, $k'' \in A^\perp$. Предположим, что векторы $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ базиса пространства $A$ можно взять из $\mathbf{Z}^n$. Тогда векторы $\Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_n$ базиса в $A^\perp$ можно, как легко видеть, также выбрать принадлежащими $\mathbf{Z}^n$. Таким образом, все элементы матрицы $\Lambda$, введенной перед формулировкой доказываемой теоремы, можно считать целыми числами. Соответственно, координаты любого вектора $\zeta(k) = \left(\zeta_1(k), \ldots, \zeta_n(k)\right)$, определенного представлением

$$k = k' + k'' = \left(\zeta_1(k)\Lambda_1 + \ldots + \zeta_m(k)\Lambda_m\right) + \left(\zeta_{m+1}(k)\Lambda_{m+1} + \ldots + \zeta_n(k)\Lambda_n\right),$$

являются рациональными числами с некоторым, не зависимым от $k$ знаменателем $q > 0$. Поэтому либо $k'' = l''$, либо $| k'' - l'' | \geq \frac{1}{q}$. Следовательно, в рассматриваемой ситуации каждый шар подпространства $A^{\perp}$ содержит лишь конечное множество различных векторов $k''$, $k \in \mathbf{Z}^n$.

б) Предположим, что $A \bigcap \mathbf{Z}^n = \{ 0 \}$. Так как $k'' = \zeta_{m+1}(k)\Lambda_{m+1} + \ldots + \zeta_n(k)\Lambda_n$, где, как и прежде, $\Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_n$ — базис в $A^{\perp}$, а

$$\begin{pmatrix} \zeta_{m+1}(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n(k) \end{pmatrix} = Hk,$$

то равенство $k'' = 0$ при $k \neq 0$ возможно лишь, когда $Hk = 0$. Но

$$Hk = \begin{pmatrix} \langle \Omega_{m+1}, k \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle \Omega_n, k \rangle \end{pmatrix},$$

стало быть, равенство $Hk = 0$ означает, что $k \perp \Omega_{m+1}, \ldots, k \perp \Omega_n$, т.е. $k \perp A^{\perp}$ и, значит, $k \in A$. Это противоречит предположению $A \bigcap \mathbf{Z}^n = \{ 0 \}$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации разным векторам $k$ отвечают разные векторы $k''$. Заметим далее, что в каждый шар подпространства $A^{\perp}$ радиуса $> 2\sqrt{n}$ проектируется, очевидно, бесконечное множество точек $k \in \mathbf{Z}^n$. Поэтому из сказанного выше следует, что в случае $A \bigcap \mathbf{Z}^n = \{ 0 \}$ каждый такой шар содержит бесконечное множество различных точек вида $k'' = k''(k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$.

Теперь доказательство теоремы 1 завершается следующим образом.

Достаточность. Предположим, что подпространство $A$ имеет базис из векторов с целочисленными координатами, а полином $Q$ — гипоэллиптический. Как и прежде, представим вектор $k \in \mathbf{Z}^n$ в виде $k = k' + k''$, $k' \in A$, $k'' \in A^{\perp}$. Тогда $S_k = S_{k'+k''}$ и согласно определению $A$ справедливо равенство $S_k = S_{k''}$. Так как $A$ имеет базис из векторов, лежащих в $\mathbf{Z}^n$, то согласно свойству а) при любом $R > 0$ существует лишь конечное множество векторов $k''$, удовлетворяющих условию $| k'' | < R$. В то же время, ввиду гипоэллиптичности полинома $Q$, для любого компакта $K \subset \mathbf{C}^n$ найдется такое $R = R(K)$, что $K \bigcap | S_{k''} | = \emptyset$, $\forall k'' : | k'' | > R$. Следовательно, компакт $K$ пересекается лишь с конечным числом различных множеств $| S_k |$, $k \in \mathbf{Z}^n$, и, значит, $S$ — дивизор.

Необходимость. Пусть $\widehat{S}$ — дивизор и, следовательно, по доказанному ранее $A = E$. Покажем, что в этом случае полином $Q$ из представления (3) гипоэллиптичен. Действительно, если это не так, то существует такая последовательность точек $\zeta''_{(j)} = (\zeta_{m+1,j}, \dots, \zeta_{n,j}) \in \mathbf{R}^{n-m}$, что $\zeta''_{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$,

$$\exists \lim_{j\to\infty} \frac{\zeta''_{(j)}}{|\zeta''_{(j)}|} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\zeta}'$$

и

$$\sup_j r_Q(\zeta''_{(j)}) < \infty.$$

Обозначим

$$x^{(j)} = \zeta_{m+1,j}\Lambda_{m+1} + \dots + \zeta_{n,j}\Lambda_n,$$

где, как и прежде, $\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_n$ — базис в $A^{\perp}$. Ясно, что $x^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$,

$$\exists \lim_{j\to\infty} \frac{x^{(j)}}{|x^{(j)}|} = \tilde{\zeta}_{m+1}\Lambda_{m+1} + \dots + \tilde{\zeta}_n\Lambda_n, \text{ и что } \sup_j r_P(x^{(j)}) < \infty.$$

Выберем точки $k^{(j)} \in \mathbf{Z}^n$ так, чтобы $|k^{(j)} - x^{(j)}| \le \sqrt{n}$. Тогда $\sup r_P(k^{(j)}) < \infty$, и, следовательно (см. доказательство включения $E \subset A$):

$$\left(\lim_{j\to\infty} \frac{k^{(j)}}{|k^{(j)}|}\right) \in A.$$

Но

$$\lim_{j\to\infty} \frac{k^{(j)}}{|k^{(j)}|} = \lim_{j\to\infty} \frac{x^{(j)}}{|x^{(j)}|},$$

а последний предел принадлежит $A^{\perp}$, так как $x^{(j)} \in A^{\perp}$. Это противоречие доказывает, что полином $Q$ — гипоэллиптический. Предположим теперь, что в $A$ не существует базиса из векторов с целочисленными координатами. Пусть $\dim A = m < n$, а $l$ — наибольшее число линейно независимых векторов в $A \cap \mathbf{Z}^n$, причем $l < m$. Пусть $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$ — какая-то система таких векторов. Обозначим через $A_1$ пространство, натянутое на эти векторы, а через $A_2$ — ортогональное дополнение к $A_1$ в $A$. Тогда $A = A_1 \oplus A_2$ и, соответственно, каждый вектор $k \in \mathbf{Z}^n$ представим в виде $k = k^{(1)}(k) + k^{(2)}(k) + k''(k)$, где $k^{(1)} \in A_1$, $k^{(2)} \in A_2$, $k''(k) \in A''$. Заметим, что поскольку пространство $A_1$ имеет базис из векторов с целочисленными координатами, то таковым же является пространство $A_1^{\perp} = A_2 \oplus A$. Поэтому согласно ранее доказанному свойству а) каждый шар $\{x \in A_1 : |x| < R\}$ содержит лишь конечное число различных векторов вида $k^{(1)}(k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$. С другой стороны, согласно определению числа $l$ $A_2 \cap \mathbf{Z}^n = 0$ и ввиду свойства б) каждый шар $\{x \in A_1 \oplus A^{\perp} : |x| < R\}$ при достаточно большом $R$ содержит бесконечное множество векторов вида

$k^{(1)}(k) + k''(k)$. Отсюда, поскольку $|k^{(1)}(k) + k''(k)|^2 = |k^{(1)}(k)|^2 + |k''(k)|^2$, а векторов $k^{(1)}(k)$ с $|k^{(1)}(k)| < R$ — лишь конечное множество, следует, что при достаточно большом $R$ шар $\{x \in A^{\perp} : |x| < R\}$ содержит бесконечное множество векторов вида $k''(k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$. Учитывая теперь, что $S_{k''} \neq S_{l''}$ при $k'' \neq l''$ и что $r_{P_k}(0) = r_{P_{k''}}(0) \leq r_P(0) + k''(k)$, заключаем, что шар $|z| < R$ при достаточно большом $R$ пересекается с бесконечным множеством различных неприводимых дивизоров $S_k$. Следовательно, в рассматриваемой ситуации $S$ не является дивизором, что противоречит сделанному предположению. Тем самым, допущение $l < m$ неверно, и, значит, $A$ имеет базис из векторов с целочисленными координатами. Теорема доказана.

В [3] было доказано, что если периодический дивизор $Z$ в $\mathbf{C}^n$ инвариантен относительно любой перестановки координат, то такой дивизор является дивизором целой периодической функции. Отсюда и из теоремы 1 вытекает следующая

**Теорема 2.** *Полином $P(z)$ является делителем какой-либо целой периодической функции тогда и только тогда, когда отвечающие ему подпространство $A$ и полином $Q$ удовлетворяют условию теоремы* 1.

Действительно, если полином $P(z)$ является делителем целой периодической функции $f$, то $\hat{S} \subset Z_f$. Следовательно, $\hat{S}$ — дивизор и по теореме 1 соответствующие $A$ и $Q$ обладают нужными свойствами. Наоборот, пусть дано, что $A$ и $Q$ удовлетворяют условиям теоремы 1, тогда $\hat{S}$ — периодический дивизор. Обозначим через $D\hat{S}$ дивизор, равный сумме всех дивизоров, которые получены из $\hat{S}$ попарной перестановкой координат. Этот дивизор инвариантен относительно перестановок координат, и согласно цитированному утверждению из [3] существует целая периодическая функция $F(z)$ с $Z_F = D\hat{S}$. Очевидно, что $Z_p \subset Z_F$ и, значит, полином $P(z)$ является делителем функции $F(z)$.

**Следствие.** *Пусть $P(z)$ — гипоэллиптический полином. Тогда, какова бы ни была линейно независимая система векторов $\tilde{\omega}_1 \in \mathbf{R}^n, \ldots, \tilde{\omega}_n \in \mathbf{R}^n$, существует целая периодическая с периодами $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n$ функциия $f(z)$, для которой $P(z)$ является делителем.*

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться теоремой 2, заметив при этом, что свойство гипоэллиптичности сохраняется при любой линейной замене переменных в $\mathbf{C}^n$ с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим теперь вопрос о порядке алгебраического периодического дивизора. Напомним, что порядком дивизора $Z \subset \mathbf{C}^n$ называют величину

$$\rho_Z = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln n_Z(t)}{\ln t},$$

где $n_Z(t)$ — проективный объем дивизора $Z$ в шаре $|z| < t$ *. Если $f(z)$ — целая функция с дивизором $Z_f = Z$, то (см., например, [5])

$$\rho_Z = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln N_f(t, \ldots, t)}{\ln t},$$

где

$$N_f(r_1, \ldots, r_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \ln |f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})| \, d\varphi_1, \ldots, \varphi_n .$$

**Теорема 3.** *Если $Z$ — алгебраический периодический дивизор в $\mathbb{C}^n$, то $\rho_Z \le n$.*

Доказательство. Пусть целая функцияя $f(z)$ такова, что $Z_f = Z$. Обозначим через $n_f^{(j)}(t, z^{(j)})$, где $z^{(j)} = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$, подсчитанное с учетом кратности число корней функции $\varphi_{z^{(j)}}(z_j) = f(z)$ в круге $|z_j| < t$. Так как $Z$ — алгебраический периодический дивизор, то множество $\chi_j = \chi_j(z^{(j)}) = \{ z_j : \varphi_{z^{(j)}}(z_j) = 0 \}$ для любого $z^{(j)} \in \mathbb{C}^{n-1}$ является периодическим, причем, если $\chi_j(z^{(j)}) \ne \mathbb{C}$, число точек пересечения $\chi_j \cap \{ z_j : 0 \le \operatorname{Re} z_j \le 1 \}$ конечно. Отсюда, ввиду периодичности множества $\chi_j$, следует, что порядок функции $n_f^{(j)}(t, z^{(j)})$ по переменной $t$ равен 1 (если, конечно, $\varphi_{z^{(j)}}(z_j) \not\equiv \text{const}$). Поэтому (см. [4]) порядок функции $N_f(r_1, \ldots, r_n)$ по любой переменной $r_j$ равен 1, а поскольку порядок функции $N_f(r_1, \ldots, r_n)$ по совокупности переменных, как известно (см. [5]), не превосходит суммы ее порядков по каждой переменной в отдельности, то он не превосходит $n$. Следовательно, $\rho_Z \le n$. Теорема доказана.

В [3] было доказано, что если целая периодическая функцияя $f(z)$ имеет дивизор конечного порядка $\rho$, то существует целая периодическая функция $F(z)$, порядок которой

$$\rho_F \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{z \to \infty}} \frac{\ln \ln |F(z)|)}{\ln |z|}$$

равен $\rho$, а $Z_F = Z_f$. Отсюда и из теоремы 3 вытекает

**Следствие.** *Если алгебраический периодический дивизор $Z \subset \mathbb{C}^n$ таков, что существует целая периодическая функция $f$ с $Z_f = Z$, то существует и периодическая целая функция $F(z)$ конечного порядка не выше $n$, имеющая дивизор $Z_F = Z$.*

---

* Определение и свойства функции $n_Z(t)$ см., например в [4, 5] .

Проведение исследования, описанного в данной статье, в определенной степени стало возможным благодаря поддержке Международного научного фонда Сороса (грант № U2X000).

## Список литературы

1. *C.A. Berenstein, A. Yger,* Ideals generated by exponential polynomials.— Adv. Math. (1986), v. 60, pp. 1–80.
2. *Л. Хермандер,* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Мир, Москва (1986), 463 с. (Пер. с англ. яз.: L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators. II. Differential operators with constant coefficients. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo (1983), 392 p.
3. *Л.И. Ронкин,* Периодические целые функции и периодические дивизоры.— Мат. физика, анализ, геометрия (1995), т. 2, № 1, с. 108–122.
4. *Л.И. Ронкин,* Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, Москва (1971), 422 с.
5. *П. Лелон,* Л. Груман, Целые функции многих переменных. Мир, Москва (1989), 350 с. (Пер. с англ. яз.: P. Lelong, L. Gruman, Entire functions of several complex variables. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo (1986), 272 p.

## Periodic algebraic divisors

L.I. Ronkin

A general form of polynomials of several variables is found which can be divisors of periodic entire functions.

## Періодичні алгебраічні дивізори

Л.І. Ронкін

Знайдено загальний вигляд поліномів від $n$ змінних, що можуть бути дільниками цілих періодичних функцій.