Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с.338–346

УДК 514

Сопряженные точки геодезических

М.А. Улановский

Харьковский государственный университет, Украина, 310007, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

В работе изучаются множества, составленные из "первых" сопряженных точек вдоль "нулевых" геодезических по отношению к некоторой фиксированной точке.

Изучаются свойства множества точек, сопряженных с фиксированной точкой лоренцева V_n вдоль геодезических лучей, исходящих из этой точки. Предполагается, что V_n хронологически ориентировано, класс гладкости многообразия и фундаментальной формы — C^∞. Простая конструкция, упомянутая в заметке [1], позволяет перенести результаты на римановы пространства.

Пусть O — фиксированная точка лоренцева V_n, $T_0(V_n)$ — касательное пространство, $K_0 \subset T_0(V_n)$ — конус изотропных векторов, направленных в "будущее". Имеют место следующие утверждения.

А) Множество изотропных лучей $\gamma \subset K_0$, содержащих сопряженные точки, открыто в K_0 (разумеется, в естественной топологии K_0 — топологии $(n-2)$-сферы).

Б) Множество "первых" сопряженных точек лучей $\gamma \subset K_0$ замкнуто.

Пусть S_0 — множество первых сопряженных точек лучей $\gamma \subset K_0$ (экспоненциальный образ S_0, $\exp_0 S_0$ — множество первых точек, сопряженных с точкой $O \in V_n$ вдоль изотропных геодезических, исходящих из O и направленных в будущее). Из утверждений А) и Б) следует, что компоненты S_0 — C^0-гиперповерхности (в конусе K_0), расположенные таким образом, что каждый луч, исходящий из векторного нуля $O \in T_0(V_n)$, пересекает S_0 не более, чем в одной точке. Заметим, что здесь и далее допускается некоторая двусмысленность: векторный нуль в $T_0(V_n)$ и точка $O \in V_n$ обозначены одной и той же буквой.

Утверждения А) и Б) доказаны в заметке [2]. В настоящей работе будет доказано, что компоненты S_0 "почти всюду" гладкие (C^∞ — гиперповерхности). Более точно результат будет сформулирован ниже). Будут также более подробно изучены свойства S_0 для многообразий, уже рассмотренных в заметке [1].

З а м е ч а н и е. Так как каждая точка S_0 есть особая точка отображения $\exp_0$, то утверждение о гладкости $\exp_0 S_0$, вообще говоря, несправедливо.

Все упомянутые утверждения о сопряженных точках (и дополнительно к ним — теорема об изолированности сопряженных точек, см. [2]) в действительности не обусловлены геометрическими свойствами лоренцевых или римановых многообразий. Они непосредственно вытекают из соответствующих свойств некоторого класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а именно:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t;\xi)x, \tag{1}$$

где $x = (x^1,\ldots, x^p)$ — вектор вещественного E_p, $a(t;\xi)$ — квадратная $(p\times p)$-матрица, зависящая от скалярного аргумента t и параметров $\xi = (\xi^1,\ldots,\xi^q)$; предполагается, что $a(t;\xi) \in C^\infty$ (как функция от t, ξ; $(t;\xi) \in [0; d)\times\omega_\varepsilon$, $d \le \infty$, $\omega_\varepsilon = (\xi; \sum \xi^{i^2} < \varepsilon)$). Существенное условие, определяющее рассматриваемый класс уравнений: при всех допустимых значениях t, ξ матрица $a(t;\xi)$ симметрична (если угодно, $a(t;\xi)$ — оператор, симметричный относительно скалярного произведения $(x;y) = x^1y^1 + \ldots + x^py^p$; $(ax;y)(x;ay))$. Докажем прежде всего, что уравнения Якоби вдоль изотропного геодезического луча $\gamma(t)$, исходящего из некоторой точки O лоренцева V_n, приводимы к виду (1); точнее, к этому виду приводима та часть уравнений Якоби, которая необходима для определения сопряженных точек.

Пусть O — произвольная точка V_n, $\gamma(t)$ — изотропный луч касательного $T_0(V_n)$, исходящий из "начала" $O \in T_0(V_n)$ и направленный в будущее: $\gamma(t) \subset K_0$. Сопоставим с $\gamma(t)$ некоторый базис $e_1,\ldots, e_n$ касательного $T_0(V_n)$. Именно, в качестве e_1 выберем изотропный вектор, касательный к $\gamma(t)$. В качестве e_2 выберем любой изотропный вектор, не колинеарный e_1. Таким образом, $e_1^2 = |\langle e_1; e_1\rangle| = e_2^2 = 0$; как легко видеть, можно дополнительно предположить, что $\langle e_1; e_2\rangle = 1$ (здесь $\langle\,;\,\rangle$ — лоренцево скалярное произведение в $T_0(V_n)$. Пусть H_i, $i = 1, 2$ — касательные гиперплоскости к конусу K_0 вдоль e_i, $H = H_1 \bigcap H_2$. Очевидно, H — пространственно-подобная $(n-2)$-плоскость. В качестве $e_3,\ldots, e_n$ возьмем произвольный ортонормированный базис H. Векторы базиса $e_1,\ldots, e_n$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered} e_1^2 = e_2^2 = 0, \quad \langle e_1; e_2\rangle = 1, \quad e_i^2 = -1, \\ \langle e_i; e_j\rangle = \langle e_1; e_i\rangle = \langle e_2; e_i\rangle = 0 \ \ (i \ne j, \quad i, j = 3,\ldots, n). \end{gathered} \tag{2}$$

Фундаментальная квадратичная форма в этом базисе имеет вид

$$\varphi(\xi) = 2\,\xi^1\,\xi^2 - \sum_{i=3}^{n} \xi^{i^2}, \tag{3}$$

где $\xi^1,\ldots,\xi^n$ — компоненты вектора. Компоненты вектора ξ_0, касательного к лучу $\gamma(t)$, можно взять равными

$$\xi_0^1 = 1, \quad \xi_0^\alpha = 0 \ \ (\alpha = 2,\ldots, n). \tag{4}$$

Окрестность ω_ε вектора ξ_0 определим условиями:

$$\xi^1 = 1, \quad 2\xi^2 = \sum_{i=3}^{n} \xi^{i^2} < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Каждому вектору $\xi \in \omega_\varepsilon$ (следовательно, каждому изотропному лучу) сопоставим свой базис $e_1(\xi),\ldots, e_n(\xi)$, считая, что определенный выше базис $e_1,\ldots, e_n$ соответствует вектору ξ_0. При этом потребуем, чтобы векторы $e_1(\xi),\ldots, e_n(\xi)$ удовлетворяли соотношениям (2), базис $e_\alpha(\xi)$ гладко зависел от ξ и вектор $e_1(\xi)$ совпадал с ξ: $e_1(\xi) = \xi$. В частности, можно положить $e_1(\xi) = \xi$, $e_2(\xi) = \mathrm{const} = e_2(\xi)$; выбор $e_3(\xi),\ldots, e_n(\xi)$ можно осуществить многими способами. Приведем один из возможных вариантов в явном виде

$$e_1(\xi) = (1; \xi^2;\ldots; \xi^n), \quad e_2(\xi) = (0; 1; 0,\ldots, 0), \quad e_3(\xi) = (0; \xi^3; 1; 0,\ldots, 0),$$
$$e_4(\xi) = (0; \xi^4; 0; 1; 0,\ldots, 0), \ \ldots \ ,e_n(\xi) = (0; \xi^n; 0; 0,\ldots, 0; 1) \tag{5}$$

(все компоненты — в базисе $e_\alpha(\xi_0)$. Очевидно, векторы $e_\alpha(\xi)$ суть функции от $\xi^3,\ldots, \xi^n$. Перенесем место действия из плоского $T_0(V_n)$ в лоренцево V_n. Теперь $\gamma(t; \xi)$ — луч изотропной геодезической, исходящей из точки $O \in V_n$ и определенный касательным вектором $\xi \subset T_0(V_n)$ (t — канонический параметр геодезической). Запишем уравнения Якоби в поле базисов, полученных из базиса $e_\alpha(\xi)$ параллельным переносом вдоль $\gamma(t; \xi)$:

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} = -R^1_{1,12}\,x^2 - R^1_{1,1i}\,x^i;$$
$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = -R^2_{1,12}\,x^2 - R^2_{1,1i}\,x^i;$$
$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -R^i_{1,12}\,x^2 - R^1_{1,1j}\,x^j, \tag{6}$$

где $i, j = 3,\ldots, n$, $R^i_{j,kl} = R^i_{j,kl}(t; \xi)$ — тензор кривизны.

Пусть $x(t; \xi) = (x^1(t; \xi),\ldots, x^n(t; \xi))$ — поле Якоби (решение уравнений (6)), колинеарное касательному вектору $\dot\gamma(t; \xi)$ геодезической $\gamma(t; \xi)$ в концах $t = 0$ и $t = t_0$ отрезка $[0; t_0]$ и нетривиальное (не колинеарное $\dot\gamma(t; \xi)$) во внутренних точках этого отрезка. Как известно, поле $x(t; \xi)$ в каждой точке $\gamma(t; \xi)$ принадлежит гиперплоскости, касающейся изотропного конуса вдоль вектора $\dot\gamma(t; \xi)$, т.е. гиперплоскости, натянутой на векторы $e_1, e_3,\ldots, e_n$. Другими словами, $x^2(t; \xi) = 0$, $t \in [0; t_0]$ (этот же результат можно получить из уравнений (6)). Очевидно, такое якобиево поле целиком определяется уравнениями

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -R^i_{1,1j}\,x^i, \quad i, j = 3,\ldots, n. \tag{7}$$

Эта система принадлежит к классу уравнений (1) и удовлетворяет условиям, сформулированным выше для уравнений этого типа. В частности, покажем, что матрица

$$a(t;\xi) = (-R^i_{1,1j})$$

симметрична. Действительно, поскольку из компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ отличны от нуля только

$$g_{12} = 1, \quad g_{ii} = -1,$$

то

$$R^i_{1,1j} = -R_{i1,1j} = -R_{j1,1i} = R^j_{1,1i}.$$

Итак, рассмотрим систему обыкновенных линейных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t;\xi)x,$$

где, как было сказано выше, $x = (x^1, \ldots, x^p) \in E_p$, $a(t;\xi) \in C^\infty$ — симметричная $(p \times p)$-матрица; $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^q)$ — параметры; $\omega_\varepsilon = (\xi;\ \sum_{i=1}^{q} \xi^{i^2} < \varepsilon$, $(x;y) = x^1y^1 + \ldots + x^py^p$ — скалярное произведение в E_p.

Точка $t_0 = t_0(\xi)$ — первая точка, сопряженная с точкой $t = 0$, если $t_0 > 0$ — минимальное значение t такое, что существует нетривиальное решение системы (1) — $x(t;\xi)$, для которого $x(0;\xi) = x(t_0;\xi) = 0$. Индекс $k(\xi)$ точки t_0 — размерность векторного пространства таких решений.

Утверждения А) и Б) представляют собой очевидные следствия теорем:

А′) Если при $\xi = 0$ $(\xi^1 = \ldots = \xi^q = 0)$ существует точка $t_0(0)$, сопряженная с точкой $t = 0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого $\xi \in \omega_\varepsilon$ существует точка $t_0(\xi)$, сопряженная с точкой $t = 0$ (другими словами, функция $t = t_0(\xi)$ корректно определена в некоторой окрестности точки $\xi = 0$).

Б′) Упомянутая в утверждении А′) функция $t_0(\xi)$ непрерывна в ω_ε.

Поскольку доказательства утверждений А) и Б) изложены в заметке [2],приведем лишь краткие указания на один из приемов доказательства А′) и Б′) (в отличие от изложенного в [2] это доказательство не связано с геометрической структурой лоренцева или риманова пространства).

Предлагается использовать так называемые матричное уравнение Рикатти и скалярное неравенство Рикатти. Множество решений уравнений (1), удовлетворяющих условию $x(0;\xi) = 0$, можно определить системой 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = Sx,$$

которому эти решения удовлетворяют на $(0;t_0)$. В свою очередь, матрица S удовлетворяет уравнению Рикатти

$$\frac{dS}{dt} = a - S^2. \tag{8}$$

Легко видеть, что матрица S симметрична, и ее след sp S удовлетворяет неравенству Рикатти

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Sp}\,S \le \mathrm{Sp}\,a - \frac{1}{p}(\mathrm{Sp}\,S)^2 \tag{9}$$

(см. [3, 4]). Можно показать, что точка t_0 тогда и только тогда служит сопряженной с точкой $t = 0$, когда $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} \mathrm{sp}\,S = -\infty$.

Интегрирование неравенства (9) позволяет получить оценки, из которых очевидным образом следуют одновременно А') и Б').

Теорема 1. *Если функция $t_0(\xi)$, упомянутая в утверждении А′, определена в окрестности ω_ε точки $\xi = 0$ и индекс $k(\xi)$ сопряженной точки в ω_ε постоянный, то $t_0(\xi)$ — гладкая функция $t_0(\xi) \in C^\infty$, $\xi \in \omega_\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $x_i(t;\xi) = (x_i^1(t;\xi),\ldots, x_i^p(t;\xi))$, $i = 1,\ldots, p$ — совокупность решений системы (1), удовлетворяющих начальным условиям:

$$x_i(0;\xi) = 0;\ \dot{x}_i(0;\xi) = \alpha_i\ \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right),$$

где α, $i = 1,\ldots, p$ — любые линейно независимые векторы (не зависящие от ξ). Функция $t_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} x_1^1,\ldots, x_1^p \\ \ldots \\ x_p^1,\ldots, x_p^p \end{vmatrix} = w(t;\xi) = 0,$$

причем $w(t;\xi) \in C^\infty$. Однако извлечь какую-либо информацию о гладкости $t_0(\xi)$ из этого факта вряд ли возможно, поскольку, по крайней мере при $k(\xi) \ge 2$, $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t_0} = 0$. Покажем, что существует уравнение

$$f(t,\xi) = 0,$$

которому удовлетворяет $t_0(\xi)$, причем $f(t,\xi) \in C^\infty$ и в точке $(t_0(0); 0)$ $\frac{df}{dt} \ne 0$.

Начальные условия в точке $t = 0$ можно выбрать так, что в точке $(t_0(0); 0)$ первые k-строк ($k = k(\xi) = \mathrm{const}$) определителя $w(t_0(0); 0)$ состоят из нулей, тогда как последние $(p-k)$-строк линейно независимы. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \dot{x}_k^1,\ldots, \dot{x}_k^p \\ x_{k+1}^1,\ldots, x_{k+1}^p \\ \ldots \\ x_p^1,\ldots, x_p^p \end{pmatrix}.$$

(Здесь в первую строку можно было бы записать производные от компонент любого из векторов $x_1, \ldots, x_k$: все величины вычислены в точке $(t_0(0); 0))$. Докажем, что ранг этой матрицы максимален, т.е. равен $(p - k + 1)$. Для этого воспользуемся хорошо известным приемом. Предположив противное, получим, что некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов $\dot{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_p$ равна нулю

$$C^k \dot{x}_k + (C^{k+1} x_{k+1} + \ldots + C^p x_p) = 0.$$

Положив $C^{k+1} x_k + \ldots + C^p x_p = y$, получим $C^k \dot{x}_k + y = 0$, откуда $C^k(\dot{x}_k; y) + (y; y) = 0$, где $(\, , \,)$ — скалярное произведение в E_p.

Легко видеть, что $(\dot{x}_k; y) = (x_k; \dot{y}) = 0$ (при $t = t_0(0)$). Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left((\dot{x}_k; y) - (x_k; \dot{y})\right) = (ax_k; y) - (x_k; ay) = 0;$$

в то же время $(\dot{x}_k; y) = (x_k; \dot{y}) = 0$ при $t = 0$, если x_t и y — решения системы (1), удовлетворяющие приведенным выше начальным условиям. Итак, в точке $(t_0(0); 0)$

$$(y; y) = 0,$$

откуда, поскольку $x_{k+1}, \ldots, x_p$ линейно независимы, $C^{k+1} = \ldots = C^p = 0$. Поскольку $\dot{x}_k(t_0(0); 0) \neq 0$, $C^k = 0$, что противоречит сделанному выше предположению.

Ранг матрицы A равен $p - k + 1$; не ограничивая общности, предположим, что отличен от нуля минор

$$\begin{vmatrix} \dot{x}^1_k, \ldots, \dot{x}^{p-k+1}_k \\ x^1_{k+1}, \ldots, x^{p-k+1}_{k+1} \\ \ldots \\ x^1_p, \ldots, x^{p-k+1}_p \end{vmatrix}.$$

Функция $t_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$f(t, \xi) = \begin{vmatrix} x^1_k, \ldots, x^{p-k+1}_k \\ x^1_{k+1}, \ldots, x^{p-k+1}_{k+1} \\ \ldots \\ x^1_p, \ldots, x^{p-k+1}_p \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку, согласно условиям теоремы, размерность пространства решений, равных нулю в точках $t_0(\xi)$, не зависит от ξ и равна k. В то же время

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0(0),\,\xi=0} = \begin{vmatrix} \dot{x}_k^1,\dots,\dot{x}_k^{p-k+1} \\ x_{k+1}^1,\dots,x_{k+1}^{p-k+1} \\ \dots \\ x_p^1,\dots,x_p^{p-k+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_k^1,\dots,x_k^{p-k+1} \\ \dots \\ \dot{x}_p^1,\dots,\dot{x}_p^{p-k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{x}_k^1,\dots,\dot{x}_k^{p-k+1} \\ \dots \\ x_p^1,\dots,x_p^{p-k+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для завершения доказательства теперь достаточно применить классическую теорему о неявной функции.

Вернемся теперь к касательному $T_0(V_n)$ лоренцева V_n. Для уравнений (7) параметры $\xi^3,\dots,\xi^n$ — координаты, определяющие направление изотропного луча $\gamma(t;\xi)$, $(\gamma(0;\xi)=0,\ \dot{\gamma}(0;\xi)=\xi)$, t — "радиальная" координата. Из теоремы 1 очевидным образом следует

Теорема 2. *Если в некоторой окрестности ω_ε каждый изотропный луч конуса K_0 содержит сопряженную точку и индекс первых сопряженных точек в ω_ε постоянный, то соответствующая этой окрестности часть множества первых сопряженных точек — гладкая (C^∞) гиперповерхность конуса K_0, которая может быть задана уравнением $t=t(\xi)$, $t(\xi)\in C^\infty$.*

Пусть U — множество лучей конуса K_0, содержащих сопряженные точки, S — множество первых сопряженных точек этих лучей. С помощью стандартных рассуждений легко получить утверждение:

Теорема 3. *Множество U представимо в виде $U=U^1\bigcup U^2$, где U^1 — открытое и плотное в U множество, причем U^1 представляет собой объединение связных открытых множеств U_α, в каждом из которых индекс первых сопряженных точек постоянный (следовательно, каждому U_α соответствует подмножество S_α множества S, представляющее собой гладкую гиперповерхность конуса K_0).*

Рассмотрим теперь свойства лоренцева V_n, удовлетворяющего некоторому специальному условию (см. [1]).

Условие В). Предполагается, что для некоторой точки $O\in V_n$ множества точек раздела и первых сопряженных точек лучей конуса K_0 совпадают.

Теорема 4. *Пусть лоренцево V_n удовлетворяет условию В). На каждой гиперповерхности S_α конуса K_0 (см. теорему 3) ядра экспоненциального отображения*

$dexp_0$ образуют касательное к S_α интегрируемое распределение. Экспоненциальный образ множества $S \subset K_0$ — пространственноподобное множество в V_n.

Примечание. Множество P в V_n по определению пространственноподобно, если никакие две его точки нельзя соединить непространственноподобной дугой.

Доказательство. Пусть $r(x)$ — ядро отображения $dexp_0$, $x \in S_\alpha$. Доказательство первой части теоремы по существу содержится в заметке [1]: если в некоторой точке $x \in S_\alpha$ ядро $r(x)$ не принадлежит касательной к S_α плоскости, то S_α содержит дугу $x(t)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1 в заметке [1], что противоречит условию B).

Докажем интегрируемость распределения $r(x)$. Пусть размерность ядра $r(x)$ равна k (k = const на S_α). Выберем k линейно независимых векторных полей $X_1,\ldots, X_k$, определяющих площадки $r(x)$. Предположим, что в некоторой точке $x \in S_\alpha$ одна из скобок Якоби от полей $X_1,\ldots, X_k$ не принадлежит $r(x_0)$. Пусть M — объединение интегральных линий полей вида $C^1 X_1 + \ldots + C^k X_k$ (C^1 = const), исходящих из точки x_0. (Легко показать, что локально M — гладкое подмногообразие S_α размерности k). Поскольку касательные к упомянутым интегральным линиям принадлежат ядрам $r(x)$, экспоненциальный образ M — точка в V_n. С другой стороны, согласно сделанному предположению в произвольной окрестности точки x_0 подмногообразие M содержит точки, в которых касательная к M k-плоскость не совпадает с ядром $r(x)$; следовательно, M содержит дугу, касательные к которой не принадлежат ядрам $dexp_0$; образ этой дуги в $\exp_0$ заведомо отличен от точки.

Последнее утверждение теоремы очевидно. Если две различных точки a, b множества $\exp_0 S$ можно соединить непространственноподобной дугой, ориентированной в "будущее", например от a к b, то точка b принадлежит открытому множеству — хронологическому будущему точки O, а потому не может быть точкой раздела на изотропной геодезической Ob. (Это справедливо и в том случае, когда упомянутая дуга ab — продолжение геодезической Oa, поскольку a — точка раздела этой геодезической).

Замечание. Как уже было отмечено выше, все теоремы этой работы обобщаются на римановы V_n; соответствующие формулировки очевидны (подробнее — см. заметку [1]).

Список литературы

1. *М.А. Улановский*, Точки раздела и сопряженные точки геодезических в лоренцевых и римановых пространствах.— Мат. физика, анализ, геометрия (1995), т. 2, вып. 1, с. 123–128.
2. *М.А. Улановский*, Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа.— Укр. геометр. сб. (1974), вып. 16, с. 97–118.
3. *М.А. Улановский*, Конформно полные лоренцевы многообразия.— Укр. геометр. сб. (1981), вып. 24, с. 122–129.
4. *H. Karcher*, Riemannian center of mass and mollifier smoothing.— Communs Pure Appl. Math. (1977), v. XXX, pp. 509–541.

Conjugate points of the geodesics

M.A. Ulanovskii

One considers sets formed of "first" conjugate points along nil geodesics with regard to some fixed point.

Спряжені точки геодезичних

М.О. Улановський

В роботі вивчаються множини, складені з "перших" спряжених точок вздовж "нульових" геодезичних по відношенню до деякої фіксованої точки.