Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 399–407

УДК 533

Звуковые волны в среде переменной массы

Б.Е. Бурнаев, И.Е. Тарапов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 22 февраля 1995 года

Получены уравнения, описывающие процесс распространения малых возмущений в среде с источниками массы. Предложен аналитический метод решения этих уравнений при модельной зависимости интенсивности источников массы от времени. Проведена аналогия между звуковыми волнами в среде переменной массы, распространением звука в газе между подвижными пластинами и волнами при гидравлическом ударе.

1. Распространение малых возмущений

Рассмотрим неограниченную невязкую сплошную однокомпонентную сжимаемую среду с источниками (стоками) массы, интенсивность q которых считается известной функцией времени, и источниками импульса вида $\mathbf{j} = \gamma\, q\, \mathbf{v}$, где $\gamma = 0$ или 1 (отсутствие источников импульса или наличие "реактивного" источника, обусловленного выбросом (подсоединением) массы с другой скоростью). Процессы образования источников будем предполагать обратимыми, хотя рассматриваемая термодинамическая система будет открытой вследствие возможного обмена массой с другими системами.

В этих предположениях система уравнений, описывающая движение сплошной среды с источниками ([1]), принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q(t),$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (1-\gamma) q\, \mathbf{v} = -\nabla p,$$

$$\rho \frac{ds}{dt} + qs = 0,$$

$$p = p(\rho, s), \tag{1.1}$$

где ρ — плотность, t — время, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, s — энтропия, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$.

Примем, что невозмущенная среда, по которой распространяется звук, характеризуется параметрами $\rho_0 = \rho_0(t)$, $s_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$, $p_0 = p(\rho_0, s_0)$, причем ρ_0 и p_0 согласно (1.1) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho_0}{dt} = q, \quad \nabla p_0 = 0,$$

так что

$$\rho_0 = \int_0^t q(\tau)d\tau + \rho_{00}\ , \tag{1.2}$$

где $\rho_{00} = \rho_0(0)$. Таким образом, предполагая, что источники массы распределены однородно, мы фактически исследуем распространение звуковых волн по однородной среде переменной со временем массы, т.е. когда в каждой частице среды есть источник (сток) массы, мощность которого зависит от времени.

Введем малые возмущения $\rho'(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$, $s'(\mathbf{r}, t)$, $p'(\mathbf{r}, t)$ параметров ρ_0, $\mathbf{v}_0$, s_0, p_0 соответственно, так что

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad s = s', \quad p = p_0 + p'.$$

Подставляя эти выражения в систему (1.1) и проводя линеаризацию, получим уравнения для возмущений

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \tag{1.3a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (1-\gamma)\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\mathbf{v}' = -\nabla p', \tag{1.3b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 s') = 0. \tag{1.3c}$$

Пусть в начальный момент времени $s' = 0$. Тогда в силу уравнения (1.3c) $s' \equiv 0$. Следовательно,

$$p' = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0,\, s=0}\rho' + \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho=\rho_0,\, s=0} s' = c^2(t)\rho',$$

где

$$c^2 = (\partial p/\partial \rho)\big|_{\rho=\rho_0,\, s=0}\,. \tag{1.4}$$

С учетом этого уравнение (1.3b) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (1-\gamma)\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\mathbf{v}' = -c^2(t)\nabla \rho'. \tag{1.5}$$

Используя соотношение Гиббса, которое для рассматриваемой среды имеет обычный вид ([1]), и теорему Кельвина, имеем для циркуляции скорости Г

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \oint \left(T\nabla s + \frac{(\gamma-1)q\mathbf{v}}{\rho}\right)d\mathbf{l}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}'d\mathbf{l}$$

(Γ' — возмущение циркуляции скорости), получаем

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = (\gamma - 1)\Gamma' \frac{d}{dt} \ln \rho_0 ,$$

откуда

$$\Gamma' = \Gamma'(0) \left(\frac{\rho_0}{\rho_{00}} \right)^{\gamma - 1} .$$

Следовательно, если в начальный момент времени движение было безвихревым, оно будет таковым и в любой другой момент времени. В этом случае из уравнений (1.3а) и (1.5) можно получить уравнения для возмущений, которые имеют одинаковую структуру:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u - \alpha \frac{d \ln a^2}{dt} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Значения функций u и $a(t)$ для всех рассматриваемых случаев приведены в табл. 1.

Таблица 1. **Значения величин, входящих в задачу (1.6), (1.7)**

	$\mathbf{j} = 0 \quad (\gamma = 0)$		$\mathbf{j} = q\mathbf{v} \quad (\gamma = 1)$	
u	ρ'	$\rho_0 \mathbf{v}'$	ρ'	$\mathbf{v}'$
a	1	c^2	ρ_0	c^2/ρ_0
α	0	1	$1/(\kappa - 1)$	$-(2 - \kappa)/(\kappa - 1)$

В случае плоских волн ($\rho' = \rho'(x, t)$, $\mathbf{v}' = (v'(x, t), 0, 0)$) уравнения для возмущений можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{d \ln a^2}{dt} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{1.6}$$

Начальные условия для уравнения (1.6) таковы:

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{dt}\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{1.7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — известные функции.

Наличие непрерывно распределенных источников в среде существенно изменяет картину распространения звуковых волн: переменная масса частиц приводит к изменению как скорости, так и амплитуды волн. Как оказывается, некоторые малые возмущения могут при этом увеличиваться с течением времени по амплитуде, так что линеаризация исходных уравнений может быть справедлива только на начальном отрезке времени.

В связи с этим интерес представляют модели с различными зависимостями интенсивности источников от времени.

В уравнении (1.6) представляется возможным для модельных случаев $c = c(t)$ отделить влияние источников массы $q(t)$ на величину амплитуды от их влияния на скорость волны. Для этого будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \lambda(t)\, v(x, t), \tag{1.8}$$

где $v(x, t)$ — общее решение (1.6) при $\alpha = 0{,}5$. Нетрудно показать, что это решение имеет вид

$$v(x, t) = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

где

$$\xi = x + \int_0^t c(\tau)\, d\tau, \quad \eta = x - \int_0^t c(\tau)\, d\tau,$$

а F_1 и F_2 — произвольные функции.

Подстановка (1.8) в (1.6) дает уравнения, которым должны удовлетворять $\lambda(t)$ и $c(t)$ при заданных α и $a(t)$. Таким образом, мы найдем скорость той волны, амплитуда которой меняется как $\lambda(t)$:

$$\left(\lambda'' - 2\alpha \frac{a'}{a} \lambda'\right) v + \left(2\lambda' - 2\alpha \frac{a'}{a}\lambda + \frac{c'}{c}\lambda\right) v_t = 0.$$

Отсюда

$$\lambda'' = 2\alpha \frac{a'}{a} \lambda', \quad \lambda' = \left(\alpha \frac{a'}{a} - \frac{c'}{2c}\right)\lambda. \tag{1.9}$$

Решая систему (1.9) относительно λ и c, находим

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_0' \int_0^t \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2\alpha} dt, \quad c = \frac{(a/a_0)^{2\alpha}}{\lambda/\lambda_0}, \tag{1.9a}$$

здесь $\lambda_0 = \lambda(0)$, $\lambda_0' = \lambda'(0)$, $a_0 = a(0)$. Будем считать для определенности $\lambda_0 > 0$. Из (1.9) следует, что

$$\lambda_0' = \left(\alpha \frac{a_0'}{a_0} - \frac{c_0'}{2}\right)\lambda_0,$$

где $a_0' = a'(0)$, $c_0' = c'(0)$. Таким образом, при

$$\alpha \frac{a_0'}{a_0} - \frac{c_0'}{2} > 0$$

амплитуда решения $u(x, t)$ со временем монотонно нарастает, что следует из (1.9а). В противном случае — убывает, и только при $\alpha\, a_0'/a_0 = c_0'/2$ мы имеем обычные звуковые волны. В случае политропного газа ($p/p_{00} = (\rho/\rho_{00})^{\kappa}$, $\kappa > 1$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме)

$$c^2 = (\rho_0/\rho_{00})^{\kappa - 1}, \tag{1.10}$$

и функция $a(t)$ может быть выражена через $c(t)$. Поэтому мы вправе параметры в уравнении (1.6) выбрать следующим образом: $a = c$ и коэффициент α соответственно зависимости (1.10) (табл. 1). В этом случае из уравнений (1.9) однозначно определяются зависимости $\lambda(t)$ и $c(t)$, а именно

$$c(t) = [1 - c_0'(\alpha + 0{,}5)t]^{-2/(1+2\alpha)}, \tag{1.11a}$$

$$\lambda(t) = \lambda_0\,[1 - c_0'(\alpha + 0{,}5)t]^{(1-2\alpha)/(1+2\alpha)}. \tag{1.11b}$$

Формула (1.11a) в совокупности с выражением (1.10) позволяют определить зависимость интенсивности источника массы от времени, для которой существует решение вида (1.8):

$$q(t) = \frac{2c_0'}{\kappa - 1}\left[1 - \frac{c_0'(2\alpha - 1)}{2}\,t\right]^{-\frac{4 + (\kappa - 1)(2\alpha + 1)}{(\kappa - 1)(2\alpha + 1)}}. \tag{1.12}$$

Используя выражение (1.11b) и связь между функциями c и ρ_0 (1.10), можно найти зависимость от времени амплитуды величин ρ'/ρ_0 и v':

$$\lambda_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(t)}{\rho_0(t)} = \lambda_0\,[1 - c_0'(\alpha + 0{,}5)t\,]^{\frac{4 - (2\alpha - 1)(\kappa - 1)}{(2\alpha + 1)(\kappa - 1)}}, & \alpha \neq \dfrac{2 - \kappa}{\kappa - 1}, \\ \lambda(t) = \lambda_0\,[1 - c_0'(\alpha + 0{,}5)t\,]^{-\frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 1}}, & \alpha = \dfrac{2 - \kappa}{\kappa - 1}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Параметр α в последней формуле принимает значения 0, 1, $1/(\kappa - 1)$, $-(2-\kappa)/(\kappa - 1)$, что соответствует величинам ρ'/ρ_0 (j = 0), v' (j = 0), ρ'/ρ_0 (j = qv), v' (j = qv). Анализ выражения (1.13) при показателе политропы κ, равном 1,4, что соответствует одноатомному газу, показывает, что в случае источников массы (при этом $c_0' > 0$ и $dc/dt > 0$, так что волны — ускоряющиеся) амплитуда величин ρ'/ρ_0 и v' со временем убывает, а в случае стоков ($c_0' < 0$ и $dc/dt < 0$, волны замедляющиеся) — растет. Это сразу видно, если решение исходной задачи представить в виде $u(x,t) = c^{\alpha - 0,5}\,v(x,t)$.

Таким образом, в среде без диссипации, но с изменяющейся массой звуковые волны либо затухают, либо должны превращаться в ударные волны. Только при "удачном стечении обстоятельств", т.е. в нашем случае при $\alpha = 1/2$, можно говорить о незатухающих звуковых волнах.

2. Газодинамическая и гидравлическая аналогии

Интересно, что к системе уравнений движения среды с непрерывно распределенными источниками массы могут быть сведены уравнения некоторых обычных задач механики жидкости и газа. Два таких примера приводятся ниже.

1. Рассмотрим следующую задачу газовой динамики. Между двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными в плоскостях $y = 0$ и $y = h$, находится невязкий нетеплопроводный газ. В начальный момент времени одна из пластин начинает равномерно двигаться в направлении оси y. Движение пластины вызывает одномерное ("фоновое") движение газа, при котором возникает разрежение или сжатие. Рассмотрим распространение малых возмущений газа в плоскостях, параллельных пластинам.

Уравнения движения, не зависящего от координаты z, для рассматриваемой газовой среды имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0,$$

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$p=p(\rho). \tag{2.1}$$

Движение газа, определяемое функциями

$$\rho^0=\frac{\rho_{00}h_0}{h_0+v_0t},\quad v_x^0=0,\quad v_y^0=\frac{v_0y}{h_0+v_0t},\quad p^0=p(\rho^0), \tag{2.2}$$

где $\rho_{00}=\rho^0(0)$, $v_0=\mathrm{const}$ — скорость движения пластины вдоль оси y, $h_0=h(0)$ — расстояние между пластинами в начальный момент времени, составляет тот фон, на котором исследуется распространение малых возмущений вдоль оси x. Полагая $\rho=\rho^0(t)+\rho'(x,t)$, $v_x=v'_x(x,t)$, $v_y=v_y^0(y,t)+v'_y(x,t)$ и линеаризуя систему (2.1), получаем

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho^0\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y^0}{\partial y}\rho'=0,$$

$$\rho^0\frac{\partial v'_x}{\partial t}+c^2\frac{\partial\rho'}{\partial x}=0, \tag{2.3}$$

здесь $c^2=\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho^0}$. Для политропного газа $p/p_0=(\rho/\rho_{00})^\kappa$, где $p_0=p^0(0)$, и, следовательно, $c^2=c_0^2(\rho^0/\rho_{00})^{\kappa-1}$, где $c_0^2=\kappa p_0/\rho_{00}$. Учитывая первое равенство из (2.2), находим выражение для безразмерной скорости звука

$$c^2=(1+At)^{1-\kappa}. \tag{2.4}$$

В последней формуле $A=v_0T/h_0$, T — характерный масштаб времени.

Из третьего уравнения системы (2.1) следует, что $v'_y\equiv 0$, если $v'_y|_{t=0}=0$.

Из системы уравнений (2.3) при помощи стандартных приемов получаем уравнения для возмущений плотности и скорости:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho'}{\rho^0}\right)-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\rho'}{\rho^0}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2}-\frac{\partial\ln c^2}{\partial t}\frac{\partial v'_x}{\partial t}=0. \tag{2.5}$$

Обезразмерирование системы (2.5) не изменяет ее вида, поэтому входящие в нее уравнения далее будут считаться безразмерными.

Уравнения (2.5) и (1.6) при $a = c$ и $\gamma = 0$ (случай, когда источники импульса отсутствуют) имеют одинаковую структуру. Для полной аналогии требуется лишь совпадение функций $c(t)$ в обоих случаях. Для этого достаточно выбрать зависимость интенсивности источников массы от времени в виде

$$q = -\frac{A}{(1 + At)^2}. \tag{2.6}$$

Таким образом, величинам ρ' и $\rho_0 v'$ в среде со стоками (источниками) массы вида (2.6) соответствуют величины ρ'/ρ_0 и v' в расширяющейся (сжимаемой) среде. Установленное соответствие позволяет применить метод аналогии для экспериментального изучения процессов в среде с источниками массы.

Для того чтобы выяснить, как эволюционируют начальные возмущения в среде с источниками массы, которые задаются формулой (2.6), проведен численный эксперимент, состоявший в том, что при различных значениях параметра A в формуле (2.6) (как положительных, так и отрицательных, что соответствует стокам и источникам) методом характеристик решались уравнения (1.6) на начальном отрезке времени. По результатам расчета строились графики зависимости максимального значения величин ρ'/ρ_0 и v' от времени. Анализ этих зависимостей подтвердил вывод, сделанный на основе модельного примера в конце предыдущего параграфа: в среде с источниками массы начальные возмущения величин ρ'/ρ_0 и v' со временем затухают, тогда как в среде со стоками — растут. Графики, приведенные на рис. 1, иллюстрируют этот вывод.

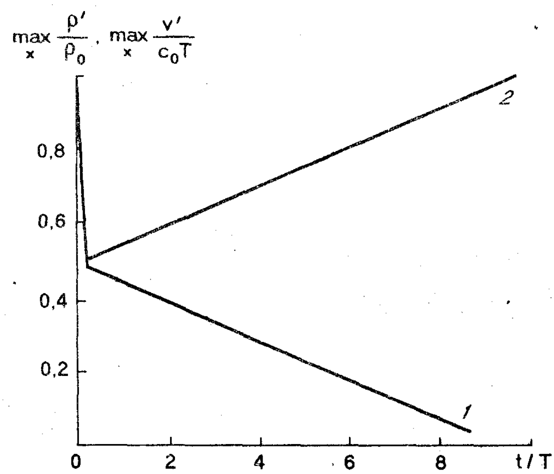

Рис. 1. Эволюция максимальных возмущений: 1 — зависимость $\max\limits_x \rho'/\rho_0$ от t/T при $A = -0{,}1$; 2 — зависимость $\max\limits_x \frac{v'}{c_0 T}$ от t/T при $A = 0{,}1$. T — характерное время задачи, c_0 — скорость звука в среде без источников.

2. Отметим еще одну весьма неожиданную аналогию уравнения (1.6) с уравнениями Н.Е. Жуковского, описывающими явление гидравлического удара в трубах с учетом трения ([2]):

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \zeta \rho_0 v,$$

$$- \frac{\partial p}{\partial t} = \lambda^2 \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.7}$$

где ρ_0 — плотность воды до удара, $\lambda = \left(\frac{\rho_0}{k} + \frac{2R_0 \rho_0}{Ee} \right)^{-1/2}$, k — модуль упругости воды, e — толщина стенок трубы, E — модуль упругости ее материала, R_0 — внутренний радиус трубы до удара, а v — скорость центра тяжести массы воды между двумя смежными сечениями x_1 и x_2, ограничивающими расширяющийся участок трубы, p — давление жидкости после удара, так что $p - p_0 = (1 - \rho_0/\rho)k$. В уравнениях Н.Е. Жуковского отброшены нелинейные члены и введена сила трения, причем экспериментальный коэффициент трения ζ определяет силу трения, приложенную к рассматриваемой массе воды, равную $\zeta \int\limits_{x_1}^{x_2} S \rho v \, dx$, где S — площадь внутреннего поперечного сечения трубы.

Из (2.7) имеем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Из сравнения этого уравнения с (1.6) для случая $a = c$, которое запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{c'}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

становится ясным, что при $\alpha > 0$ в ускоряющихся волнах ($c'(t) > 0$) мы будем иметь возрастание амплитуды, а в замедляющихся ($c' < 0$) получаем затухание амплитуды волн. В наших уравнениях существование "отрицательной силы трения", которая возникает в случае стоков массы, термодинамически оправдано условием положительности источника энтропии в исходной системе ([1]).

3. Заключение

Исследование распространения малых возмущений в идеальном газе с объемными источниками массы и импульса на модельном примере выявило качественно новые особенности этого процесса по сравнению с классическим случаем, когда источники отсутствуют:

1) в случае источников массы скорость распространения волн со временем растет, а амплитуда возмущений затухает, т.е. объемные источники массы порождают эффект, аналогичный диссипации;

2) в случае стоков массы наблюдается противоположная картина - скорость волн со временем убывает, а амплитуда возмущений растет, что можно трактовать как

результат действия некой "отрицательной диссипации". Это явление подчеркивает принципиальность того факта, что рассматриваемая система является открытой, ибо только в таком контексте понятие "отрицательной диссипации" имеет смысл: этот процесс представляет собой обмен энергией в рассматриваемой открытой подсистеме с другими подсистемами, образующими вместе с ней некоторую замкнутую систему;

3) существуют довольно наглядные гидро- и газодинамическая аналогии явления распространения звуковых волн по среде с однородно распределенными источниками массы, которые могут быть использованы для экспериментальных исследований.

Список литературы

1. *I. Ye. Tarapov*, The motion of a continuum with sources of mass, impulse and energy continuously distributed.— Proc. of Int. Congress of the Mech., Egypt, 1995 (1995), pp. 1287–1295.
2. *Н.Е. Жуковский*, О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Избранные сочинения. Т. 2. Гостехтеоретиздат, Москва-Ленинград, (1948), с. 3–73.

Sound waves in a variable mass medium

B. Burnayev and I.Ye. Tarapov

Equations describing the process of propagating small perturbations in the medium with sources of mass are derived. An analytical method of solving these equations is offered, a certain model form of mass source intensity-time dependence being implied. An analogy between sound waves in the variable mass medium, sound propagation in gas between movable plates and waves arising during hydraulic impact is conducted.

Звукові хвилі у середовищі змінної маси

Б.Є. Бурнаєв, І.Є. Тарапов

Одержано рівняння, які описують процес поширення малих збурень у середовищі з джерелами маси. Запропоновано аналітичний метод розв'язку цих рівнянь при модельній залежності інтенсивності джерел маси від часу. Проведено аналогію між звуковими хвилями у середовищі змінної маси, поширенням звука у газі поміж рухомими пластинами і хвилями при гідравлічному ударі.