Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 456–462 УДК 514

О связи между жесткостью порядка $k > 3$ и аналитической неизгибаемостью поверхностей

Н.Г. Перлова

*Ростовский государственный университет,
Россия, 344711, г. Ростов-на-Дону, ГСП-11, ул. Б.Садовая, 105*

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Доказывается, что если любое C^1-гладкое бесконечно малое изгибание 1-го порядка регулярной поверхности класса C^1 может быть продолжено в бесконечно малое изгибание $(k-1)$-го порядка $(k > 3)$, то из жесткости k-го порядка этой поверхности следует ее аналитическая неизгибаемость.

И.Х. Сабитов доказал [1], что если любое C^1-гладкое бесконечно малое (б.м.) изгибание 1-го порядка регулярной поверхности класса C^1 допускает продолжение в б.м. изгибание 2-го порядка, то из жесткости 3-го порядка этой поверхности следует ее аналитическая неизгибаемость. Это результат является обобщением теоремы Н.В. Ефимова [2] об аналитической неизгибаемости регулярной поверхности, обладающей жесткостью 3-го порядка при условии единственности ее б.м. изгибания 1-го порядка.

И.Х. Сабитов [1] высказал также предположение, что из жесткости k-го порядка $(k > 3)$ следует аналитическая неизгибаемость регулярной поверхности класса C^1, если любое C^1-гладкое б.м. изгибание 1-го порядка этой поверхности допускает продолжение в б.м. изгибание $(k-1)$-го порядка.

В настоящей работе приводится доказательство этого утверждения. Для поверхностей класса C^3 аналогичное утверждение доказано автором настоящей работы в [3].

Теорема. *Если любое C^1-гладкое б.м. изгибание 1-го порядка регулярной поверхности класса C^1 может быть продолжено в б.м. изгибание $(k-1)$-го порядка $(k > 3)$, то из жесткости k-го порядка следует аналитическая неизгибаемость этой поверхности.*

Доказательство. 1°. Как известно [2], аналитическое изгибание регулярной поверхности определяется решением бесконечной системы уравнений

$$d\bar r\, d\underset{i}{\bar z} + \sum_{l=1}^{i-1} d\underset{l}{\bar z}\, d\underset{i-l}{\bar z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

при условии равномерной сходимости ряда

$$\bar r^*(u, v, \varepsilon) = \bar r(u, v) + 2\varepsilon \underset{1}{\bar z}(u, v) + 2\varepsilon^2 \underset{2}{\bar z}(u, v) + \ldots + 2\varepsilon^i \underset{i}{\bar z}(u, v) + \ldots, \quad |\varepsilon| < 1.$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы любое решение системы (1) определяет аналитическое движение поверхности.

Так как по условию поверхность обладает жесткостью k-го порядка, из уравнений (1) при $i = 1, 2, \dots k$ следует $\bar z_1 = [\,\bar a\, \bar r\,] + b$, где $\bar a$ и $\bar b$ — постоянные векторы. Следовательно, поле вращений $\bar y_1 = \bar a$ постоянно на всей поверхности.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\bar y_1 = \bar 0$. В противном случае вместо аналитического изгибания $\bar r^{\,*}$ будем рассматривать композицию $\bar r^{\,*}$ и аналитического движения с полем вращений $-\bar y_1$. Как показано в [2], эта композиция является аналитическим изгибанием с полями вращений $\bar Y_1 = 0$, $\bar Y_2$, $\bar Y_3$, ... При этом разности $\bar Y_i - \bar y_i$ $(i \ge 2)$ зависят только от $\bar y_1, \bar y_2, \dots, \bar y_{i-1}$, а потому из постоянства $\bar Y_2, \bar Y_3, \dots$ следует постоянство $\bar y_2, \bar y_3, \dots$.

Будем рассматривать указанную композицию, сохраняя прежние обозначения. Таким образом, $\bar y_1 = \bar 0$.

Сделаем индуктивное предположение, что $\bar y_1 = \bar y_2 = \dots = \bar y_{n-1} = \bar 0$, и в этом предположении докажем, что $\bar y_n = \overline{\mathrm{const}}$.

Уравнения (1) в силу индуктивного предположения имеют вид

$$d\bar r\; d\bar z_i = 0, \quad n \le i \le 2n - 1; \tag{2}$$

$$d\bar r\; d\bar z_i + \sum_{l=n}^{i-n} d\bar z_l\; d\bar z_{i-l} = 0, \quad i \ge 2n. \tag{3}$$

Каждое из уравнений (2) определяет б.м. изгибание 1-го порядка. Решения уравнений (2) будем обозначать следующим образом:

$$\bar z_i = \overset{1}{\bar\varepsilon}_i, \quad n \le i \le 2n - 1.$$

2°. Рассмотрим уравнения (3) при $2n \le i \le 3n - 1$. Так как при этом $n \le l \le 2n - 1$, $n \le i - l \le 2n - 1$, то $\bar z_l = \overset{1}{\bar\xi}_l$, $\bar z_{i-l} = \overset{1}{\bar\xi}_{i-l}$, а потому уравнения (3) можно представить в виде

$$d\bar r\; d\bar z_i + \overset{2}{F}_i = 0,$$

где

$$\overset{2}{F}_i = \frac{1}{2} \sum_{r_1 + r_2 = i} \left(\left(d\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + d\overset{1}{\bar\xi}_{r_2}\right)^2 - d\overset{1}{\bar\xi}{}_{r_1}^{\,2} - d\overset{1}{\bar\xi}{}_{r_2}^{\,2} \right), \quad r_1, r_2 \ge n. \tag{4}$$

Отсюда следует, что любое решение уравнений (3) при $2n \le i \le 3n-1$ может быть представлено как

$$\underset{i}{\bar z} = \frac{1}{2}\sum_{r_1+r_2=i} \underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar Z}} + \underset{i}{\overset{1}{\bar \xi}}, \tag{5}$$

где

$$\underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar Z}} = \underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar \xi}} - \underset{r_1}{\overset{2}{\bar \xi}} - \underset{r_2}{\overset{2}{\bar \xi}},$$

$\underset{r_1}{\overset{2}{\bar \xi}}$, $\underset{r_2}{\overset{2}{\bar \xi}}$, $\underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar \xi}}$ суть продолжения 2-го порядка полей б.м. изгибаний 1-го порядка $\underset{r_1}{\overset{1}{\bar \xi}}$, $\underset{r_2}{\overset{1}{\bar \xi}}$, $\underset{r_1}{\overset{1}{\bar \xi}} + \underset{r_2}{\overset{1}{\bar \xi}}$.

В частности, при $i = 2n$ получаем

$$\underset{2n}{\bar z} = \underset{n}{\overset{2}{\bar \xi}} + \underset{2n}{\overset{1}{\bar \xi}}.$$

3°. Рассмотрим уравнения (3) при $3n \le i \le 4n-1$. Так как при этом из неравенств $n \le l \le i-2n$ следуют неравенства $2n \le i-l \le 3n-1$, а из неравенств $i-2n+1 \le l \le i-n$ следуют неравенства $n \le i-l \le 2n-1$, то

$$\sum_{l=n}^{i-n} d\underset{l}{\bar z}\, d\underset{i-l}{\bar z} = \sum_{l=n}^{i-2n} d\underset{i}{\bar z}\left(\frac{1}{2}\sum_{r_2+r_3=i-l} d\underset{r_2 r_3}{\overset{2}{\bar Z}} + d\underset{i-l}{\overset{1}{\bar \xi}}\right) + \sum_{l=i-2n+1}^{i-n} d\underset{l}{\bar z}\, d\underset{i-l}{\overset{1}{\bar \xi}}.$$

Учитывая, что $i-2n+1 \le 2n \le i-n$, получим

$$\sum_{l=n}^{i-n} d\underset{l}{\bar z}\, d\underset{i-l}{\bar z} = \underset{i}{\overset{2}{F}} + \underset{i}{\overset{3}{F}}, \tag{6}$$

где $\underset{i}{\overset{2}{F}}$ определяется формулой (4) при $3n \le i \le 4n-1$, а

$$\underset{i}{\overset{3}{F}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=n}^{i-2n} d\underset{l}{\overset{1}{\bar \xi}} \sum_{r_2+r_3=i-l} d\underset{r_2 r_3}{\overset{2}{\bar Z}} + \sum_{l=2n}^{i-n}\sum_{r_1+r_2=l} d\underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar Z}}\, d\underset{i-l}{\overset{1}{\bar \xi}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{r_1+r_2+r_3=i}\left(d\underset{r_1}{\overset{1}{\bar \xi}}\, d\underset{r_2 r_3}{\overset{2}{\bar Z}} + d\underset{r_2}{\overset{1}{\bar \xi}}\, d\underset{r_1 r_3}{\overset{2}{\bar Z}} + d\underset{r_3}{\overset{1}{\bar \xi}}\, d\underset{r_1 r_2}{\overset{2}{\bar Z}}\right), \quad r_1,\ r_2,\ r_3 \ge n.$$

В силу тождества

$$\left(d\underset{r_1}{\overset{1}{\bar \xi}} + d\underset{r_2}{\overset{1}{\bar \xi}} + d\underset{r_3}{\overset{1}{\bar \xi}}\right)^2 =$$

$$= \left(d\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + d\overset{1}{\bar\xi}_{r_2}\right)^2 + \left(d\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + d\overset{1}{\bar\xi}_{r_3}\right)^2 + \left(d\overset{1}{\bar\xi}_{r_2} + d\overset{1}{\bar\xi}_{r_3}\right)^2 - d\overset{1}{\bar\xi}{}^2_{r_1} - d\overset{1}{\bar\xi}{}^2_{r_2} - d\overset{1}{\bar\xi}{}^2_{r_3}$$

продолжение 2-го порядка поля б.м. изгибания $\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + \overset{1}{\bar\xi}_{r_2} + \overset{1}{\bar\xi}_{r_3}$ можно представить в виде

$$\overset{2}{\bar\xi}_{r_1 r_2 r_3} = \overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2} + \overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_3} + \overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_2 r_3} + \overset{2}{\bar\xi}_{r_1} + \overset{2}{\bar\xi}_{r_2} + \overset{2}{\bar\xi}_{r_3},$$

где $\overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2} = \overset{2}{\bar\xi}_{r_1 r_2} - \overset{2}{\bar\xi}_{r_1} - \overset{2}{\bar\xi}_{r_2}$ и т.д. Поэтому

$$\overset{3}{F}_i = \frac{1}{6} \sum_{r_1 + r_2 + r_3 = i} \; \sum_{l=1}^{2} \; \sum_{p=1}^{3} \; \sum_{\{t_1, t_2, \dots, t_p\}} (-1)^{3-p}\, d\overset{l}{\bar\xi}_{t_1 t_2 \cdots t_p}\, d\overset{3-l}{\bar\xi}_{t_1 t_2 \cdots t_p}, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{\{t_1, t_2, \dots, t_p\}}$ означает суммирование по всем возможным сочетаниям по p элементов из множества $\{r_1, r_2, r_3\}$.

Из (6),(4), (7) следует, что решение уравнений (3) при $3n \le i \le 4n-1$ можно представить в виде

$$\bar z_i = \frac{1}{6} \sum_{r_1 + r_2 + r_3 = i} \overset{3}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2 r_3} + \frac{1}{2} \sum_{r_1 + r_2 = i} \overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2} + \overset{1}{\bar\xi}_i, \quad r_1, r_2, r_3 \ge n;$$

здесь

$$\overset{3}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2 r_3} = \overset{3}{\bar\xi}_{r_1 r_2 r_3} - \overset{3}{\bar\xi}_{r_1 r_2} - \overset{3}{\bar\xi}_{r_1 r_3} - \overset{3}{\bar\xi}_{r_2 r_3} + \overset{3}{\bar\xi}_{r_1} + \overset{3}{\bar\xi}_{r_2} + \overset{3}{\bar\xi}_{r_3},$$

$\overset{3}{\bar\xi}_{r_1}$, $\overset{3}{\bar\xi}_{r_1 r_2}$, $\overset{3}{\bar\xi}_{r_1 r_2 r_3}$ и т.д. суть продолжения 3-го порядка полей б.м. изгибаний 1-го порядка $\overset{1}{\bar\xi}_{r_1}$, $\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + \overset{1}{\bar\xi}_{r_2}$, $\overset{1}{\bar\xi}_{r_1} + \overset{1}{\bar\xi}_{r_2} + \overset{1}{\bar\xi}_{r_3}$ и т.д.

В частности, при $i = 3n$ получаем

$$\bar z_{3n} = \overset{3}{\bar\xi}_n + \frac{1}{2} \sum_{r_1 + r_2 = 3n} \overset{2}{\bar{\mathrm{Z}}}_{r_1 r_2} + \overset{1}{\bar\xi}_{3n}.$$

4°. Рассмотрим уравнения (3) при $jn \le i \le (j+1)n - 1$ и любом $j \le k-1$. Осуществляя индукцию по j, нетрудно убедиться, что любое их решение можно представить в виде

$$\underset{i}{\bar z} = \sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m!}\sum_{r_1+r_2+\dots+r_m=i}\overset{m}{\underset{r_1 r_2\dots r_m}{\bar{\mathrm Z}}},$$

где

$$r_1, r_2,\dots, r_m \ge n,$$

$$\overset{m}{\underset{r_1 r_2\dots r_m}{\bar{\mathrm Z}}} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{\{t_1 t_2,\dots,t_p\}}(-1)^{m-p}\overset{m}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}},$$

$\overset{m}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}}$ — продолжение порядка m поля б.м. изгибания 1-го порядка $\overset{1}{\underset{t_1}{\bar\xi}} + \overset{1}{\underset{t_2}{\bar\xi}} + \dots + \overset{1}{\underset{t_p}{\bar\xi}}$; $\{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ — сочетание по p элементов из множества $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Для доказательства используются тождества:

$$\overset{s}{\underset{r_1 r_2\dots r_m}{\bar{\mathrm Z}}} = 0 \text{ при } s = 1, 2,\dots, k-1 \text{ и } m > s;$$

$$\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{p=1}^{j}\sum_{\{t_1, t_2,\dots,t_p\}}(-1)^{j-p}\, d\overset{l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}}\; d\overset{j-l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}} =$$

$$= \sum_{p=1}^{j-1} C_j^p\, d\overset{p}{\underset{(r_1 r_2\dots r_p}{\bar{\mathrm Z}}}\; d\overset{j-p}{\underset{r_{p+1}\dots r_j)}{\bar{\mathrm Z}}}$$

при $j = 2, 3,\dots, k$, $\{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ — сочетание из $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$. Доказательства аналогичных тождеств содержатся в [3].

5°. Положим в (3) $i = kn$. Тогда

$$\sum_{l=n}^{i-n} d\underset{l}{\bar z}\; d\underset{i-l}{\bar z} = \sum_{l=n}^{(k-1)n} d\underset{l}{\bar z}\; d\underset{i-l}{\bar z} = \sum_{j=2}^{k}\overset{j}{\underset{kn}{F}},$$

где

$$\overset{j}{\underset{kn}{F}} = \frac{1}{j!}\sum_{r_1+r_2+\dots+r_j=kn}\;\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{p=1}^{j}\sum_{\{t_1, t_2,\dots,t_p\}}(-1)^{j-p}\, d\overset{l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}}\; d\overset{j-l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}}.$$

В частности,

$$\overset{k}{\underset{kn}{F}} = \frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\{t_1, t_2,\dots,t_p\}}(-1)^{k-p}\, d\overset{l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}}\; d\overset{k-l}{\underset{t_1 t_2\dots t_p}{\bar\xi}},$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ — сочетание по p элементов из множества $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. Так как при этом $r_1 = r_2 = \dots = r_k = n$, то

$$\overset{k}{\underset{kn}{F}} = \frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{k-p}C_k^p p^k\, d\overset{l}{\underset{n}{\bar\xi}}\; d\overset{k-l}{\underset{n}{\bar\xi}} = \sum_{l=1}^{k-1} d\overset{l}{\underset{n}{\bar\xi}}\; d\overset{k-l}{\underset{n}{\bar\xi}}.$$

Следовательно, уравнения (3) при $i = kn$ можно записать в виде

$$d\bar{r}\,d\left(\underset{kn}{\bar{z}} - \sum_{m=2}^{k-1}\frac{1}{m!}\sum_{r_1+r_2+\ldots+r_m=kn}\underset{r_1r_2\ldots r_m}{\overset{m}{\bar{Z}}}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} d\underset{n}{\overset{l}{\bar{\xi}}}\; d\underset{n}{\overset{k-l}{\bar{\xi}}} = 0.$$

Это означает, что существует продолжение k-го порядка поля б.м. изгибания 1-го порядка $\underset{n}{\overset{1}{\bar{\xi}}} = \underset{n}{\bar{z}}$, определяемое векторным полем

$$\underset{n}{\overset{k}{\bar{\xi}}} = \underset{kn}{\bar{z}} - \sum_{m=2}^{k-1}\frac{1}{m!}\sum_{r_1+r_2+\ldots+r_m=kn}\underset{r_1r_2\ldots r_m}{\overset{m}{\bar{Z}}}.$$

Так как поверхность обладает жесткостью k-го порядка, это возможно лишь при тривиальном $\underset{n}{\overset{1}{\bar{\xi}}}$.

Итак, в предположении, что $\underset{1}{\bar{y}} = \underset{2}{\bar{y}} = \ldots = \underset{n-1}{\bar{y}} = \bar{0}$, доказано, что $\underset{n}{\bar{y}} = \overline{\mathrm{const}}$. Положим $n = 2$. Так как $\underset{1}{\bar{y}} = \bar{0}$, то $\underset{2}{\bar{y}} = \overline{\mathrm{const}}$. Налагая, как в пункте 1°, аналитическое движение, получим $\underset{2}{\bar{y}} = \bar{0}$ и т.д.

Таким образом, $\underset{n}{\bar{y}} = \overline{\mathrm{const}}$ при любом $n \geq 1$, т.е. любое аналитическое изгибание поверхности является движением.

Список литературы

1. *И.Х. Сабитов*, О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков.— Укр. геометр. сб. (1993), вып. 35, с. 118–124.
2. *Н.В. Ефимов*, Некоторые предположения о жесткости и неизгибаемости.— Успехи мат. наук (1952), т. 7, № 5/51, с. 215–224.
3. *Н.Г. Перлова*, О соотношении между жесткостью k-го порядка и аналитической неизгибаемостью поверхностей. — Реферат. журн. Математика (1991), № 3, 3А 516. Деп. в ВИНИТИ 05.11.90, № 5628-В90.

On the relation between the rigidity of order $k > 3$ and analytic nonformability of surfaces

N.G. Perlova

It is proved, that if every C^1-smooth 1 order infinitesimal deformation of the regular surface of C^1-class can be extended to the $(k-1)$ order infinitesimal deformation $(k > 3)$, then the k order rigidity of this surface implies its analytic nonbending.

Про зв'язок між жорсткістю порядку $k > 3$ і аналітичною незгинністю поверхонь

Н.Г. Перлова

Доводиться, що якщо довільне C^1-гладке нескінченно мале згинання 1-го порядку регулярної поверхні класу C^1 може бути продовжено в нескінченно мале згинання $(k-1)$-го порядку $(k > 3)$, то з жорсткості k-го порядку цієї поверхні випливає її аналітична незгинність.