Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 18–26

Факторизация радиусов предельного круга Вейля в вырожденной интерполяционной задаче Шура

С.С. Бойко, В.К. Дубовой

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 13 марта 1995 г.

Доказана факторизация радиусов предельного круга Вейля в вырожденной интерполяционной задаче Шура через дефектные функции соответствующей голоморфной сжимающей матрицы-функции.

Обозначим через $S_{p,q}$ совокупность голоморфных внутри единичного круга $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ сжимающих матриц-функций $\theta(\zeta)$ с p строками и q столбцами. Сжимаемость $\theta(\zeta)$ означает выполнение одного из двух следующих равносильных условий:

$$I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) \geq 0,\ I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta) \geq 0,\ \zeta \in D.$$

Интерполяционная проблема Шура в этом классе ставится так.

Заданы $n+1$ постоянных прямоугольных матриц $c_0, c_1, \dots, c_n$ размерности $p \times q$. Требуется:

1) найти необходимые и достаточные условия, при которых существует матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, имеющая $c_0, c_1, \dots, c_n$ первыми коэффициентами разложения в ряд $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots$;

2) при существовании таких матриц-функций дать их полное описание.

Эта задача впервые поставлена и изучена в скалярном случае ($p = q = 1$) И. Шуром в [1]. В дальнейшем данной тематике было посвящено достаточно много работ. Здесь нас будет интересовать подход к этой задаче, предложенный В. П. Потаповым и основанный на применении j-растягивающих матриц-функций.

Построим по коэффициентам $c_0, c_1, \dots, c_n$ матрицу

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & & & \\ c_1 & c_0 & & 0 & \\ \dots & \dots & \cdot & & \\ \dots & \dots & & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \dots & \dots & c_0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Как известно (см., например, [1-3]), для разрешимости задачи Шура необходимо и достаточно, чтобы матрица C_n была сжимающей, т.е. $I - C_n C_n^* \geq 0$. В случае, если матрица

$$A_n = I - C_n C_n^* \tag{2}$$

является обратимой, соответствующая задача Шура называется невырожденной. В противном случае задачу называют вырожденной. Подходу В. П. Потапова к задаче Шура в невырожденной ситуации посвящены работы [2; 3, ч. I-III, V, VI; 4]. Наиболее полно этот подход изложен в [4]. Вырожденной ситуации посвящены работы [3, ч. IV; 5-9].

Пусть E_+ и E_- — унитарные пространства размерности p и q соответственно. Обозначим через $S[E_-, E_+]$ класс сжимающих голоморфных внутри D оператор-функций, значениями которых являются операторы, действующие из E_- в E_+. Очевидно, выбор в E_- и в E_+ ортонормированных базисов позволяет отождествить функции класса $S[E_-, E_+]$ с функциями класса $S_{p,q}$. В дальнейшем мы предполагаем, что этот выбор сделан.

Далее для нас будет существенной связь функций класса $S_{p,q}$ с теорией унитарных узлов [10]. А именно, справедлива ([10, 11])

Теорема 1. *Характеристическая оператор-функция произвольного унитарного узла*

$$\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S) \tag{3}$$

с конечномерными пространствами E_- и E_+ принадлежит классу $S[E_-, E_+]$.

Обратно, для любой функции $\theta(\zeta) \in S[E_-, E_+]$ существует такой простой унитарный узел (3), *для которого $\theta(\zeta)$ является характеристической, т.е. имеет место представление*

$$\theta(\zeta_0) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F; \tag{4}$$

при этом узел Δ определяется по функции $\theta(\zeta)$ с точностью до унитарной эквивалентности.

Пусть $\theta(\zeta) \in S[E_-, E_+]$ и (3) — простой унитарный узел, для которого функция $\theta(\zeta)$ является характеристической. Обозначим через L и L^* порождающие подпространства для максимальных односторонних сдвигов, входящих в T и в T^* соответственно ([3, ч. III]). Пусть P_0 и Q_0 — ортопроекторы в H на L и L^* соответственно. Как показано в [3, ч. VI; 12], функции

$$\varphi(\zeta) = P_0 (I - \zeta T)^{-1} F, \; \psi(\zeta) = G (I - \zeta T)^{-1} Q_0, \quad \zeta \in D,$$

значения которых являются операторами, действующими соответственно из E_- в L и из L^* в E_+, принадлежат классам $S[E_-, L]$ и $S[E^*, E_+]$. Следуя работам [3, ч. VI; 12], будем называть эти функции дефектными функциями функции $\theta(\zeta)$.

Разложим $\theta(\zeta)$ в ряд

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \ldots + c_n \zeta^n + \ldots .$$

Первые $n+1$ коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n$ порождают задачу Шура, множеству решений которой принадлежит, очевидно, и функция $\theta(\zeta)$. Допуская возможность вырожденной ситуации, отметим следующие результаты [9].

Теорема 2. *Множество решений порождаемой коэффициентами* $c_0, c_1, \dots, c_n$ *задачи Шура в фиксированной точке* $\zeta_0 \in D$ $(\zeta_0 \neq 0)$ *образует матричный круг*

$$K_n(\zeta_0) = \{ w : w = \sigma_n(\zeta_0) + \rho_{g,n}(\zeta_0) v \rho_{d,n}(\zeta_0), v^* v \leq I \}$$

с центром $\sigma(\zeta_0)$, *левым радиусом* $\rho_{g,n}(\zeta_0)$ *и правым радиусом* $\rho_{d,n}(\zeta_0)$. *При этом для* $\rho_{g,n}(\zeta_0)$ *и* $\rho_{d,n}(\zeta_0)$ *имеют место формулы*

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = \max_{w \in K_n(\zeta_0)} \{ I - ww^* - (1 - |\zeta_0|^2) X^* A_n X \}, \tag{5}$$

$$\rho_{d,n}(\zeta_0) = \max_{w \in K_n(\zeta_0)} \{ I - w^* w - (1 - |\zeta_0|^2) \widetilde{X} A_n \widetilde{X} \}, \tag{6}$$

где X *и* $\widetilde{X}$ *являются решениями уравнений*

$$A_n X = B_n^{(1)}(\zeta_0, w), \; A_n \widetilde{X} = \widetilde{B}_n^{(1)}(\zeta_0, w);$$

при этом A_n *имеет вид* (2),

$$B_n^{(1)}(\zeta, w) = \Lambda_{p,n}^*(\zeta) - C_n \Lambda_{q,n}^*(\zeta) w^*,$$

$$\widetilde{B}_n^{(1)}(\zeta, w) = \frac{1}{\zeta}\left(\Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right) - C_n \Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right),$$

$$\Lambda_{p,n}(\zeta) = [I_p, \zeta I_p, \dots, \zeta^n I_p].$$

В дальнейшем нам понадобится и левый нормированный радиус ([3, ч. II; 9]):

$$r_{g,n}(\zeta) = |\zeta|^{-2n-2} \rho_{g,n}(\zeta), \; \zeta \neq 0.$$

Учитывая, что в рассматриваемой ситуации коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n$ порождены функцией $\theta(\zeta)$, можно n устремить к ∞. Как известно ([3, ч.II; 9]), радиусы $r_{g,n}(\zeta)$ и $\rho_{d,n}(\zeta)$ с ростом n монотонно убывают. Это позволяет ввести в рассмотрение радиусы предельного круга Вейля

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \lim_{n \to \infty} \rho_{d,n}(\zeta), \; \zeta \neq 0; \tag{7}$$

$$r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \lim_{n \to \infty} r_{g,n}(\zeta), \; \zeta \neq 0. \tag{8}$$

Отметим, что радиусы $\rho_{d,n}(\zeta)$ и $r_{g,n}(\zeta)$ имеют предел при $\zeta \to 0$. Это позволяет ([3, ч. II; 9]) рассмотреть пределы (7), (8) и при $\zeta = 0$.

Цель данной работы состоит в доказательстве следующего утверждения

Теорема 3. *Имеют место факторизации*

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \varphi^*(\zeta) \varphi(\zeta), \; \zeta \in D; \tag{9}$$

$$r_{g,\infty}(\zeta,\theta)=\psi(\zeta)\psi^*(\zeta),\ \zeta\in D, \tag{10}$$

где $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — дефектные функции для $\theta(\zeta)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в работах [3, ч. V, VI] этот результат доказан для невырожденного случая, что и будет использовано в дальнейшем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Прежде всего отметим, что факторизация (10) является следствием формулы (9). Действительно ([3, ч. II; 9]), $r_{g,\infty}(\zeta,\theta)=\rho_{d,\infty}(\bar\zeta,\hat\theta)$, где $\hat\theta(\zeta)=\theta^*(\bar\zeta)\in S_{p,q}$. Учитывая теперь, что функции $\hat\theta(\zeta)$ соответствует сопряженный унитарный узел, находим связь между дефектными функциями для $\theta(\zeta)$ и $\hat\theta(\zeta)$:

$$\varphi^*_{\hat\theta}(\bar\zeta)=\psi_\theta(\zeta),\quad \psi^*_{\hat\theta}(\bar\zeta)=\varphi_\theta(\zeta).$$

Поэтому факторизация (10) является факторизацией (9) для функции $\hat\theta(\zeta)$.

Для доказательства факторизации (9) докажем два неравенства

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)\le\varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta), \tag{11}$$

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)\ge\varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta). \tag{12}$$

Вначале получим неравенство (11). Так как круг $K_n(\zeta_0)$ с ростом n стягивается в точку, равную $\theta(\zeta_0)$, то, переходя в (6) к пределу при $n\to\infty$ и учитывая произвольность точки ζ_0, находим

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)\le I-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta),\ \zeta\in D. \tag{13}$$

Как показано в [9], имеет место следующее равенство:

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)=a^*(\zeta)\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta^{(1)})a(\zeta),\ \zeta\in D.$$

где $a(\zeta)$ — голоморфная в D матрица-функция, $\theta^{(1)}(\zeta)\in S_{p_1,q_1}$; при этом "бесконечная" задача Шура для $\theta^{(1)}(\zeta)$ невырождена, т.е. все матрицы (2), построенные по коэффициентам Тейлора для $\theta^{(1)}(\zeta)$, невырождены. Поэтому, учитывая замечание к теореме, имеем $\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta^{(1)})=\varphi_1^*(\zeta)\varphi_1(\zeta)$, где $\varphi_1(\zeta)$ — соответствующая дефектная функция для $\theta^{(1)}(\zeta)$. Следовательно,

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)=b^*(\zeta)b(\zeta),\ \zeta\in D. \tag{14}$$

где $b(\zeta)=\varphi_1(\zeta)a(\zeta)$ голоморфна в D, при этом согласно (13)

$$b^*(\zeta)b(\zeta)\le I-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta),\ \zeta\in D. \tag{15}$$

Воспользуемся теперь следующим экстремальным свойством дефектных функций [12]:

Если $v(\zeta)$ — произвольная голоморфная в D матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$v^*(\zeta)v(\zeta)\le I-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta),\ \zeta\in D,$$

то

$$v^*(\zeta)v(\zeta) \leq \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta), \ \zeta \in D.$$

Таким образом, (11) является следствием соотношений (14), (15) и этого свойства.

Докажем теперь неравенство (12). Для этого рассмотрим формулу (6) в точке $\zeta \neq 0$. При этом положим $w = \theta(\zeta) \in K_n(\zeta)$, а в качестве $\widetilde{X}$ возьмем решение вида $\widetilde{X} = A_n^{-1}\widetilde{B}^{(1)}(\zeta, \theta(\zeta))$. Под A_n^{-1} в вырожденной ситуации мы, как и раньше [3, ч. IV], понимаем оператор, действующий по правилу

$$A_n^{-1} f = \begin{cases} 0, & f \in \operatorname{Ker} A_n, \\ Q_n f, & f \in \Delta_{A_n}, \end{cases}$$

где Q_n — оператор, действующий на образе Δ_{A_n} оператора A_n и являющийся обратным к сужению A_n на Δ_{A_n}. Из формулы (6) тогда следует

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geq I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\widetilde{B}_n^{(1)*}(\zeta, \theta(\zeta))\, A_n^{-1}\widetilde{B}_n^{(1)}(\zeta, \theta(\zeta)). \quad (16)$$

Это неравенство приобретает простой вид, если правую часть переписать в терминах унитарного узла, соответствующего $\theta(\zeta)$. Представив для этого функцию $\theta(\zeta)$ в виде (4), находим

$$\theta(\zeta) = S + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k G^* T^{k-1} F,$$

то есть

$$c_0 = S, \ c_k = G^* T^{k-1} F, \quad k = 1, 2, \ldots . \quad (17)$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в [3, ч. III], получаем

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} G \\ GT \\ \ldots \\ GT^n \end{bmatrix} \left(I - T^{*^{n+1}} T^{n+1}\right)^{-2} \left[G^*, T^* G^*, \ldots, T^{*^n} G^*\right],$$

где оператор $\left(I - T^{*^{n+1}} T^{n+1}\right)^{-1}$ определяется, как и оператор A^{-1}. Из подстановки выражения для A_n^{-1} в (16) видим, что

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geq I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\, d_n^*(\zeta)\, d_n(\zeta); \quad (18)$$

при этом

$$d_n(\zeta) = \left(I - T^{*^{n+1}} T^{n+1}\right)^{-1} \left[G^*, T^* G^*, \ldots, T^{*^n} G^*\right] \widetilde{B}_n^{(1)}(\zeta, \theta(\zeta)).$$

Учитывая вид $\widetilde{B}_n^{(1)}(\zeta, w)$ (теорема 2), имеем

$$d_n(\zeta) = \left(I - T^{*^{n+1}} T^{n+1}\right)^{-1} \left(d_n^{(1)}(\zeta) + d_n^{(2)}(\zeta)\right), \quad (19)$$

где

$$d_n^{(1)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta}\left[G^*,T^*G^*,\ldots,T^{*n}G^*\right]\Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right)\theta(\zeta),$$

$$d_n^{(2)}(\zeta)=-\frac{1}{\zeta}\left[G^*,T^*G^*,\ldots,T^{*n}G^*\right]C_n\Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{20}$$

Упростим выражения для $d_n^{(1)}(\zeta)$ и $d_n^{(2)}(\zeta)$. Для $d_n^{(1)}(\zeta)$ получаем

$$d_n^{(1)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta}\left(I+\frac{1}{\zeta}T^*+\ldots+\frac{1}{\zeta^n}T^{*n}\right)G^*\theta(\zeta).$$

Принимая во внимание соотношение [10]

$$G^*\theta(\zeta)=-(T^*-\zeta I)(I-\zeta T)^{-1}F,$$

приходим к выражению

$$d_n^{(1)}(\zeta)=\left(I+\frac{1}{\zeta}T^*+\ldots+\frac{1}{\zeta^n}T^{*n}\right)\left(I-\frac{1}{\zeta}T^*\right)(I-\zeta T)^{-1}F=$$

$$=\left(I-\frac{1}{\zeta^{n+1}}T^{*n+1}\right)(I-\zeta T)^{-1}F. \tag{21}$$

Теперь упростим выражение для $d_n^{(2)}(\zeta)$. Прежде всего заметим, что из соотношений (17) следует

$$C_n=\mathrm{diag}_{n+1}(S)+$$

$$+\,\mathrm{diag}_{n+1}(G)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0\\ T & I & 0 & \ldots 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ T^{n-1} & T^{n-2} & T^{n-3} & \ldots T & I & 0\end{bmatrix}\mathrm{diag}_{n+1}(F), \tag{22}$$

где

$$\mathrm{diag}_n(S)=\begin{bmatrix}S & & & \\ & S & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & S\end{bmatrix},$$

при этом S повторено на главной диагонали n раз.

Подставляя выражение (22) для C_n в (20) и учитывая условия узла [10], после простых преобразований получаем

$$d_n^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^{n+1}}T^{*n+1}(I-\zeta T)^{-1}F-T^{*n+1}T^{n+1}(I-\zeta T)^{-1}F. \tag{23}$$

Возвращаясь к выражению (19) и принимая во внимание выражения (21), (23), находим

$$d_n(\zeta)=P_n(I-\zeta T)^{-1}F,$$

где P_n — ортопроектор на подпространство $\bigvee_{k=0}^{n} T^{*k} G^{*}(E_{+})$. Следовательно, неравенство (18) можно записать как

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geq I - \theta^{*}(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)F^{*}(I - \bar{\zeta}T^{*})^{-1}P_n(I - \zeta T)^{-1}F.$$

Устремляя n к ∞, получаем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta) \geq I - \theta^{*}(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)F^{*}(I - \bar{\zeta}T^{*})^{-1}P_{\infty}(I - \zeta T)^{-1}F, \quad (24)$$

при этом P_{∞} — ортопроектор на подпространство

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^{*}(E_{+}).$$

Заметим, что [10]

$$I - \theta^{*}(\zeta)\theta(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)F^{*}(I - \bar{\zeta}T^{*})^{-1}(I - \zeta T)^{-1}F.$$

Поэтому неравенство (24) можно переписать в виде

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta) \geq (1 - |\zeta|^2)F^{*}(I - \bar{\zeta}T^{*})^{-1}(I - P_{\infty})(I - \zeta T)^{-1}F. \quad (25)$$

Для завершения доказательства неравенства (12) осталось заметить, что правая часть неравенства (25), как показано в [3, ч. VI; 12], совпадает с выражением $\varphi^{*}(\zeta)\varphi(\zeta)$. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 позволяет дать операторную трактовку тому факту, что $\operatorname{rang}\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)$ есть величина постоянная в D.

Действительно, если $\theta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1}F$, то непосредственно проверяется, что аналогичное представление для функции

$$\theta_a(\zeta) = \theta\left(\frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}\right) \in \Sigma_{p,q}, \quad a \in D,$$

имеет вид $\theta_a(\zeta) = S_a + \zeta G_a(I - \zeta T_a)^{-1}F_a$, где

$$T_a = (T - \bar{a}I)(I - aT)^{-1}, \quad F_a = \sqrt{1 - |a|^2}\,(I - aT)^{-1}F,$$
$$G_a = \sqrt{1 - |a|^2}\,G(I - aT)^{-1}, \quad S_a = S + aG(I - aT)^{-1}F.$$

Как показано в [11], такое дробно-линейное преобразование переводит изометрический оператор в изометрический, а унитарный — в унитарный. Учитывая также, что

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} T_a^{*k} G_a^{*}(E_{+}) = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^{*}(E_{+}),$$

можно утверждать, что максимальный односторонний сдвиг, содержащийся в T, переходит в максимальный односторонний сдвиг, содержащийся в T_a; при этом подпространства, в которых действуют эти сдвиги, и их кратности совпадают.

Далее, принимая во внимание, что $\varphi^{*}(\zeta)\varphi(\zeta)$ совпадает с правой частью неравенства (25), имеем

$$\rho_{d,\infty}(a,\theta) = (1 - |a|^2) F^* (I - \bar{a} T^*)^{-1} (I - P_\infty)(I - aT)^{-1} F =$$
$$= F_a^* (I - P_\infty) F_a = \rho_{d,\infty}(0,\theta).$$

Известно ([3, ч.III; 9]), что rang $\rho_{d,\infty}(0,\theta_a)$ совпадает с кратностью максимального одностороннего сдвига, входящего в T_a. Следовательно, тот факт, что rang $\rho_{d,\infty}(a,\theta)$ есть величина постоянная в D, является отражением того, что кратность максимального одностороннего сдвига, входящего в T_a, есть величина постоянная в D.

Список литературы

1. *I. Schur*, Über Potenzreihen, die Innern des Einheitskreises beschränkt sind.— J. f. Math. (1917), v. 147, pp. 205–232; (1918) v. 148, pp. 122–145.
2. *Л.А. Галстян*, Аналитические j-растягивающие матрицы-функции и проблема Шура.— Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. (1977), т. XII, № 3, с. 205–228.
3. *В.К. Дубовой*, Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций.— В сб.: Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1982), № 37, с. 14–26; (1982), № 38, с.32–40; (1984), № 41, с. 55–64; (1984), № 42, с. 46–57; (1986), № 45, с. 16–26; (1987), № 47, с. 112–119.
4. *V.K. Dubovoj, B. Fritzsche, B. Kirstein*, Matricial version of the classical Schur problem. Teubner, Stuttgart–Leipzig (1992), p. 355 (Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 129).
5. *В.К. Дубовой*, Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга.— В сб. научн. тр.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Наукова думка, Киев (1983), с. 54–68.
6. *Л.А. Галстян, В.К. Дубовой*, О вырожденной проблеме Шура.— Докл. АН Арм. ССР (1986), т. XXXIII, № 4, с. 158–160.
7. *В.К. Дубовой, С.Н. Зиненко*, Пошаговое построение кругов Вейля в вырожденной интерполяционной проблеме Шура.— Деп. в УкрНИИНТИ 3.06.87, № 1708-Ук87.
8. *В.К.Дубовой, С.Н. Зиненко*, О связи между элементарным кратным множителем неполного ранга и вырожденной задачей Шура.— В сб.: Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1989), № 51, с. 72–77.
9. *С.Н. Зиненко*, Круги Вейля в вырожденной интерполяционной проблеме Шура. — В сб.: Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1991), № 55, с. 58–68.
10. *М.С. Бродский*, Унитарные операторные узлы и их характеристические функции.— Успехи мат. наук (1978), т. 33, № 4 (202), с. 144–168.
11. *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970), 325 с.
12. *V.K. Dubovoj, R.K. Mohammed*, Defect functions of holomorphic contractive natrix functions, regular extensions and open systems.— Math. Nachr. (1993), v. 160, pp. 69–110.

Factorization of the radii of the Weyl limit ball in the degenerate interpolation Schur problem

S.S. Boiko, V.K. Dubovoj

The factorization of the radii of the Weyl limit ball in the degenerate interpolation Schur problem through the defect functions of the corresponding contractive matrix function is proved.

Факторизація радіусів граничного круга Вейля у виродженій інтерполяційній задачі Шура

С.С. Бойко, В.К. Дубовий

Доведено факторизацію радіусів граничного кругу Вейля у виродженій інтерполяційній задачі Шура через дефектні функції відповідної голоморфної стискаючої матриці-функції.