Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 27–33

Слабо связанные системы эллиптических уравнений Монжа–Ампера и задача существования двумерной поверхности в E^{k+2} с данными кривизнами Киллинга–Липшица относительно k нормальных полей

Б.М. Верещагин, Б.Е. Кантор

Мурманский педагогический институт, Россия, 183720, г. Мурманск, ул. Егорова, 15

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

В $(k+2)$-мерном евклидовом пространстве рассматривается поверхность $z^i = u^i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, которая регулярно проектируется в область Ω плоскости x, y. Вводятся естественные единичные нормали ξ_i вдоль векторов $(u^i_x, u^i_y, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$, $i = 1, \dots, k$, где -1 стоит на $(2+i)$-том месте, и кривизна Киллинга–Липшица относительно этих нормалей — $K^i(x, y)$. Решается задача построения поверхности с заданными положительными функциями $K^i(x, y)$ и заданным краем $u^i\big|_{\partial\Omega} = \varphi^i(\sigma)$, где σ — параметр вдоль кривой $\partial\Omega$.

1. Геометрическая постановка задачи

Рассмотрим в $(k+2)$-мерном $(k \geq 1)$ евклидовом пространстве E^{k+2} с декартовыми координатами $x, y, z^1, \dots, z^k$ двумерную поверхность F класса C^2, заданную уравнениями

$$z^1 = u^1(x, y); \dots ; z^k = u^k(x, y), \tag{1}$$

где (x, y) — произвольная точка некоторой области Ω двумерной плоскости E^2: $z^i = 0$, $i = 1, \dots, k$. В частности, Ω может совпадать с E^2. Такое задание поверхности F называют непараметрическим. Пусть F: $\bar{r}(x, y) = (x; y; u^1(x, y); \dots ; u^k(x, y))$.

Для непараметрически заданных поверхностей в E^{k+2} введем k единичных нормальных поля специального вида, которые в дальнейшем будем называть естественными,

$$\bar{\xi}_i = \left(\frac{u^i_x}{\sqrt{1 + |\nabla u^i|^2}}; \frac{u^i_y}{\sqrt{1 + |\nabla u^i|^2}}; 0; \dots ; 0; \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla u^i|^2}}; 0; \dots ; 0 \right),$$

где $|\nabla u^i|^2 = (u^i_x)^2 + (u^i_y)^2$, а $\dfrac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u^i|^2}}$ — $(i+2)$-я координата вектора $\bar\xi_i$.

Поле $\bar\xi_i$ является нормальным, так как скалярное произведение $\bar\xi_i$ и касательных векторов $\bar r_x = (1; 0; u^1_x; \dots; u^i_x; \dots; u^k_x)$ и $\bar r_y = (0; 1; u^1_y; \dots; u^i_y; \dots; u^k_y)$ к F в той же точке равно нулю.

Естественные нормали $\bar\xi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, линейно независимы и образуют базис в k-мерной нормальной плоскости к поверхности F в точке $(x; y; u^1(x, y); \dots; u^k(x, y))$.

Вычислим кривизну Киллинга–Липшица поверхности F относительно поля $\bar\xi_i$. Так как

$\bar r_{xx} = (0; 0; u^1_{xx}; \dots; u^k_{xx})$, $\bar r_{xy} = (0; 0; u^1_{xy}; \dots; u^k_{xy})$ и $\bar r_{yy} = (0; 0; u^1_{yy}; \dots; u^k_{yy})$,

то коэффициенты второй квадратичной формы относительно $\bar\xi_i$ будут иметь вид

$$L(\bar\xi_i) = (\bar r_{xx}, \bar\xi_i) = \frac{\bar u^i_{xx}}{\sqrt{1+|\nabla u^i|^2}}; \qquad M(\bar\xi_i) = (\bar r_{xy}, \bar\xi_i) = \frac{u^i_{xy}}{\sqrt{1+|\nabla u^i|^2}};$$

$$N(\bar\xi_i) = (\bar r_{yy}, \bar\xi_i) = \frac{u^i_{yy}}{\sqrt{1+|\nabla u^i|^2}}.$$

Отсюда следует, что кривизна Киллинга–Липшица $K(\bar\xi_i)$ поверхности F относительно нормали $\bar\xi_i$ равна

$$K(\bar\xi_i) = \frac{L(\bar\xi_i)\,N(\bar\xi_i) - M^2(\bar\xi_i)}{EG - F^2} = \frac{u^i_{xx}u^i_{yy} - (u^i_{xy})^2}{(1+|\nabla u^i|^2)(\bar r_x^2 \bar r_y^2 - (\bar r_x, \bar r_y)^2)} =$$

$$= \frac{u^i_{xx}u^i_{yy} - (u^i_{xy})^2}{(1+|\nabla u^i|^2)\Big((1+\sum\limits_{j=1}^{k}(u^j_x)^2)(1+\sum\limits_{j=1}^{k}(u^j_y)^2) - (\sum\limits_{j=1}^{k}(u^j_x u^j_y)^2\Big)}. \tag{2}$$

Теперь сформулируем задачу. Пусть в ограниченной области $\Omega \subset E^2$ заданы k функций $K^i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, и пусть в E^{k+2} задана кривая Γ уравнениями $z^1 = \varphi^1(\sigma), \dots, z^k = \varphi^k(\sigma)$, где σ — параметр вдоль кривой $\partial\Omega$. Требуется найти такую двумерную поверхность F, заданную в Ω уравнениями (1), чтобы 1) кривизны $K(\bar\xi_i)$ поверхности F относительно естественных нормальных полей $\bar\xi_i(x, y)$ были равны функциям $K^i(x, y)$ при всех $i = 1, \dots, k$, 2) поверхность F имела бы своим краем кривую Γ, т.е. имели бы место равенства

$$u^i\big|_{\partial\Omega} = \varphi^i(\sigma), \; i = 1, \dots, k.$$

Эта задача является обобщением известной задачи о существовании E^3 поверхности, заданной уравнением $z = u^1(x, y)$, с данными гауссовой кривизной и краем.

Сформулированная выше задача сводится к доказательству существования решения $(u^1(x, y)); \ldots; u^k(x, y))$ задачи Дирихле для системы уравнений Монжа–Ампера

$$u^i_{xx} u^i_{yy} - (u^i_{xy})^2 =$$
$$= K^i(x, y)(1 + |\nabla u^i|^2)\Big(1 + \sum_{j=1}^{k} (u^j_x)^2\Big)\Big(1 + \sum_{j=1}^{k} (u^j_y)^2\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{k} (u^j_x u^j_y)^2\Big), \quad (3)$$

$$u^i\big|_{\partial\Omega} = \varphi^i(\sigma), \; i = 1, \ldots, k. \quad (4)$$

В уравнении (3) правая часть положительна тогда и только тогда, когда $K^i(x, y) > 0$. В этом случае все уравнения системы (3) будут иметь эллиптический тип, а решение системы $(u^1(x, y); \ldots; u^k(x, y))$ будет состоять из выпуклых функций.

Система уравнений (3) имеет одну очень важную особенность: в i-е уравнение системы вторые производные входят только от i-й искомой функции $u^i(x, y)$. Это обстоятельство позволяет нам назвать систему (3) слабо связанной. Оно сыграет важную роль при решении вопроса о разрешимости задачи Дирихле для этой системы.

Решение сформулированной выше задачи будет содержаться в теореме существования решения задачи Дирихле для более общей системы эллиптических уравнений, которую докажем в следующем разделе.

Здесь же отметим, что в дальнейшем нами будет использовано следующее неравенство, справедливость которого нетрудно установить,

$$\Big(1 + \sum_{j=1}^{k} (u^i_x)^2\Big)\Big(1 + \sum_{j=1}^{k} (u^i_y)^2\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{k} (u^j_x u^j_y)^2\Big) \le \prod_{j=1}^{k} (1 + |\nabla u^j|^2). \quad (5)$$

2. Существование решения задачи Дирихле для слабо связанной системы эллиптических уравнений Монжа–Ампера

В этом разделе будем считать, что Ω — выпуклая область в R^3, $\partial\Omega \in C^{m+2,\lambda}$, $m \ge 2$, $0 < \lambda < 1$, и $\varphi(\sigma) = (\varphi^1(\sigma); \ldots; \varphi^k(\sigma))$, $\sigma \in \partial\Omega$ — векторная функция. Пусть считать, что $\varphi(\sigma) \in C^{m+2,\lambda}(\partial\Omega)$. Через $W^+(\Omega)$ обозначим совокупность векторных функций $u(x, y) = (u^1(x, y); \ldots; u^k(x, y)$ таких, что $u\,|_{\partial\Omega} = \varphi(\sigma)$ и для любого $i = 1, \ldots, k$ в подпространстве R^3 с координатами (x, y, z^i) пространства R^{k+2} функция $u^i(x, y)$ равномерно выпукла в сторону $z^i < 0$.

Для вектор-функции $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ используем обозначения

$$Du = (u^1_x(x, y); u^1_y(x, y); \ldots; u^k_x(x, y); u^k_y(x, y));$$

$$\det D^2 u^i = u^i_{xx}(x, y)\, u^i_{yy}(x, y) - (u^i_{xy}(x, y))^2;$$

$$G[u] = (\det D^2 u^1; \ldots; \det D^2 u^k);$$

$$f[u] = (f^1[u]; \ldots; f^k[u]) = (f^1(x, y, Du); \ldots; f^k(x, y, Du)),$$

где $f^i[u] > 0$ при всех $i = 1, \ldots, k$.

Рассмотрим в $W^+(\Omega)$ систему эллиптических уравнений Монжа–Ампера

$$\mathrm{G}[\mathrm{u}] = \mathrm{f}[\mathrm{u}]. \tag{6}$$

Напомним, что в определении семейства функций $W^+(\Omega)$ участвует краевое условие, т.е. решение системы (6) из $W^+(\Omega)$ есть на самом деле решение задачи Дирихле.

Введем следующее понятие. Барьером решений системы (6) называется вектор-функция $\bar{\mathrm{u}}(x, y) = (\bar{u}^1(x, y); \dots ; \bar{u}^k(x, y)) \in W^+(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, у которой модули градиентов координатных функций ограничены сверху положительными числами ($|\nabla \bar{\mathrm{u}}^i| \le \alpha_i$) и для которых при всех $i = 1, \dots, k$ выполняются неравенства

$$\det \mathrm{D}^2 u^i > \sup_{\bar{\Omega} \times \varepsilon} f^i(x; y; p^1; q^1; \dots ; p^k; q^k), \tag{7}$$

где ε — множество точек в R^{2k}, заданное неравенствами

$$(p^1)^2 + (q^1)^2 \le \alpha_1^2, \dots, (p^k)^2 + (q^k)^2 \le \alpha_k^2.$$

Будем говорить, что функция $\tilde{\mathrm{u}}(x, y) = (\tilde{u}^1(x, y); \dots ; \tilde{u}^k(x, y) \in W^+$ ограничена барьером $\bar{\mathrm{u}}(x, y)$, если для всех $i = 1, \dots, k$ имеет место неравенство

$$\tilde{u}^i(x, y) \ge \bar{u}^i(x, y).$$

Через $V(\bar{\mathrm{u}})$ обозначим совокупность функций из W^+, ограниченных барьером $\bar{\mathrm{u}}(x, y)$. Отметим, что если $\bar{\mathrm{u}}(x, y)$ — барьер решений системы (6), то для любой функции $\tilde{\mathrm{u}}(x, y) \in V(\bar{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$ из неравенства (7) следует неравенство

$$\det \mathrm{D}^2 u^i > f^i[\tilde{\mathrm{u}}] \tag{8}$$

при всех $i = 1, \dots, k$.

Лемма. *Пусть Ω — выпуклая ограниченная область класса $L_{m+2,\lambda}$, $\varphi \in C^{m+2,\lambda}(\partial\Omega)$, а $\mathrm{f}(x; y; p^1; q^1; \dots ; p^k; q^k)$ — положительная непрерывная функция в $\bar{\Omega} \times R^{2k}$ и система (6) имеет барьер решений $\bar{\mathrm{u}}(x, y)$. Тогда система*

$$\mathrm{G}[\mathrm{u}] = \mathrm{f}[\tilde{\mathrm{u}}] \tag{9}$$

для каждого $\tilde{\mathrm{u}} \in V(\bar{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$ имеет и притом единственное обобщенное решение, принадлежащее $V(\bar{\mathrm{u}})$.

Доказательство. Фиксируем функцию $\tilde{\mathrm{u}} \in V(\bar{u}) \cap C^1(\Omega)$. Тогда каждое уравнение системы (9) является уравнением относительно одной координатной функции искомой вектор-функции $\mathrm{u}(x, y)$.

Рассмотрим последовательность вектор-функций $\mathrm{f}_1(x, y), \dots \mathrm{f}_n(x, y), \dots$ класса $C^\infty(\bar{\Omega})$, равномерно сходящуюся к $\mathrm{f}[\tilde{\mathrm{u}}]$. Так как функция $\mathrm{f}[\tilde{\mathrm{u}}]$ определена на компактном множестве, то, начиная с некоторого номера, все координаты функции $\mathrm{f}_n(x, y)$ будут положительными и из (8) следует, что для них выполняются неравенства

$$\det D^2 \bar{u}^i > f_n^i(x, y), \tag{10}$$

где $\overline{u}^{\,i}$ и f_n^i являются i-ми координатами соответственно функций $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{f}_n$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что все функции $\mathbf{f}_n(x, y)$ обладают этими свойствами.

Из [1] (теорема 87) следует, что задача Дирихле

$$\mathbf{G}[\mathbf{u}] = \mathbf{f}_n(x, y) \tag{11}$$

разрешима в классе $C^{n+2,\lambda'}(\Omega) \cap W^+(\Omega)$, $\lambda' < \lambda$. Решение системы (11) обозначим через $\mathbf{u}_n(x, y)$.

Докажем, что при любом натуральном n функции $\mathbf{u}_n$ ограничены барьером $\overline{\mathbf{u}}(x, y)$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что для i-й координаты $\mathbf{u}_n$ существует такая точка, в которой $u_n^i < \overline{u}^{\,i}$. Тогда в области Ω существует точка (x_0, y_0), где функция $\overline{u}^{\,i} - u_n^i$ достигает максимума. В R^3 с координатами (x, y, z^i) рассмотрим поверхности $F_n^i : z^i = u_n^i(x, y)$, $\overline{F}^{\,i} : z^i = \overline{u}^{\,i}(x, y)$ и $\overline{F}^{\,i*} : z^i = \overline{u}^{\,i}(x, y) - \overline{u}^{\,i}(x_0, y_0) + u_n^i(x_0, y_0)$.

Точка $M_0(x_0, y_0, u_n^i(x_0, y_0))$ — точка касания поверхностей F_n^i и $\overline{F}^{\,i*}$, так как она у них общая и на $\overline{F}^{\,i*}$ нет точек, лежащих выше точек поверхности F_n^i в направлении оси z^i. Это следует из выбора точки (x_0, y_0). Отсюда вытекает, что гауссова кривизна поверхности F_n^i в точке M_0 не меньше гауссовой кривизны поверхности $\overline{F}^{\,i*}$ в этой точке, а значит, и поверхности $\overline{F}^{\,i}$ в точке $(x_0, y_0, \overline{u}^{\,i}(x_0, y_0))$.

Итак, в точке (x_0, y_0) имеем $u_{nx}^i = \overline{u}_x^{\,i}$, $u_{ny}^i = \overline{u}_y^{\,i}$ и $\det D^2 u_n^i \geq \det D^2 \overline{u}^{\,i}$. Но u_n^i — решение i-го уравнения системы (11). Поэтому

$$f_n^i(x_0, y_0) \geq \det D^2 \overline{u}^{\,i}(x_0, y_0).$$

Однако последнее неравенство противоречит (10). Отсюда вытекает, что $\mathbf{u}_n \in V(\overline{\mathbf{u}})$.

Рассмотрим теперь последовательность $\mathbf{u}_n$. Из того, что вектор-функции $\mathbf{u}_n$ являются решениями систем (11), функции $\mathbf{f}_n$ равномерно сходятся к функции $\mathbf{f}[\tilde{\mathbf{u}}]$ и из неравенства (10) следуют равномерные по n оценки (начиная с некоторого n_0, которое можем считать равным единице)

$$\inf_{\Omega} f^i[\tilde{\mathbf{u}}] - \varepsilon_i \leq \det D^2 u_n^i < \sup_{\Omega} \det D^2 \overline{u}^{\,i},$$

где ε_i — достаточно малые положительные постоянные такие, чтобы левая часть неравенства оставалась положительной. Тогда согласно теореме Хайнца [3] существуют равномерные по n локальные оценки

$$\| u_n^i \|_{C^{1,\beta_i}(\omega)} \leq M_{i\omega}, \ 0 < \beta_i < 1, \ \omega \subset \operatorname{int} \Omega. \tag{12}$$

Из последовательности $\mathbf{u}_n$ выделим сходящуюся в $C^0(\Omega)$ подпоследовательность. Из (12) следует, что предельная функция $\mathbf{u}(x, y)$ принадлежит классу $C^{1,\beta'}(\Omega)$, $\beta' < \beta = \inf \beta_i$, является обобщенным решением системы (9) и для ее координат справедливы локальные оценки

$$\| \mathrm{u}^i \|_{C^{1,\beta'}(\omega)} \le M_{i\omega}, \quad \beta' < \inf \beta_i. \tag{13}$$

Единственность обобщенного решения системы (9) следует из теоремы 58 [1]. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть выполнены все условия леммы. Тогда система (6) имеет обобщенное решение.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathrm{u}}(x, y)$ — барьер решений системы (6). Тогда для любой функции $\widetilde{\mathrm{u}}(x, y) \in V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$ по лемме существует единственная функция $\mathrm{u}(x, y) \in V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^{1,\beta}(\Omega)$, являющаяся решением системы (9). Тем самым определено отображение Φ из $V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$ в $V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^{1,\beta}(\Omega)$, при котором вектор-функция $\widetilde{\mathrm{u}}(x, y)$ переходит в решение задачи Дирихле системы (9). Решение уравнения

$$\Phi(\mathrm{u}) = \mathrm{u} \tag{14}$$

или, что все равно, неподвижная точка отображения Φ является обобщенным решением системы (6).

Для доказательства разрешимости уравнения (14) воспользуемся теоремой Шаудера о существовании неподвижной точки оператора Φ. Легко видеть, что все условия этой теоремы выполняются. Действительно, во-первых, множество $V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$ выпукло в $C^1(\Omega)$, во-вторых, из теоремы устойчивости [2] следует непрерывность оператора Φ, и, наконец, в-третьих, из (13) следует, что множество $\Phi(V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega))$ секвенциально компактно в $V(\overline{\mathrm{u}}) \cap C^1(\Omega)$.

Таким образом, доказано существование решения уравнения (14), а значит, и обобщенного решения уравнения (6). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть Ω — выпуклая ограниченная область класса $L_{m+2,\lambda}$, $\varphi \in C^{m+2,\lambda}(\partial\Omega)$, а $\mathrm{K}(x, y) = (K^1(x, y); \dots ; K^k(x, y))$ — непрерывная вектор-функция, заданная в $\overline{\Omega}$, $K^i(x, y) > 0$, $i = 1, \dots, k$. Пусть далее существуют поверхности $\overline{F}^i : z^i = \overline{u}^i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, в R^3 с координатами (x, y, z^i), где*

$$\overline{\mathrm{u}}(x, y) = (u^1(x, y); \dots ; u^k(x, y)) \in W^+(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$$

такие, что:

1) *существуют положительные числа α_i, для которых $\sup\limits_{\partial\Omega} |\nabla \overline{\mathrm{u}}^i| \le \alpha_i$ при всех $i = 1, \dots, k$,*

2) *гауссовы кривизны $\overline{K}^i(x, y)$ поверхностей $\overline{F}^i$ связаны с функциями $K^i(x, y)$ неравенствами $K^i(x, y) \prod\limits_{j=1, j\ne i}^{k} (1 + \alpha_j^2) < \overline{K}^i(x, y)$. Тогда задача Дирихле* (3)-(4) *имеет обобщенное решение.*

Доказательство следует из теоремы и неравенства (5).

Список литературы

1. *И.Я. Бакельман*, Геометрические методы решения эллиптических уравнений. Наука, Москва (1965), 280 с.
2. *И.Я. Бакельман*, Об устойчивости решения уравнения Монжа–Ампера эллиптического типа. — Успехи мат. наук (1960), т. 15, № 1, с. 20–23.
3. *E. Heiz*, Über die Differentialungleichung $0 < \alpha \le rt - s^2 \le \beta < \infty$.— Math. Zeitschr. (1959), v. 2, S. 41–45.

Weakly connected systems of Monge–Amper elliptic equations and the problem of existence of 2-surface in E^{k+2} with given Killing–Lipschitz curvatures with respect to k normal vectors

V.M. Vereshchagin, B.E. Kantor

A surface $z^i = u^i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, projected regularly onto a domain Ω of the (x, y)-plane is considered in a $(k + 2)$-dimensional Euclidean space. We introduce natural unit vectors ξ_i directed along the vectors $(u^i_x, u^i_y, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$, $i = 1, \dots, k$, where -1 is in the $(2 + i)$-coordinate place, and the Killing–Lipschitz curvatures $K^i(x, y)$ with respect to these normal vectors. The problem of construction of a surface with given positive functions $K^i(x, y)$ and a given boundary value $u^i|_{\partial\Omega} = \varphi^i(\sigma)$, where σ is the parameter in the curve $\partial\Omega$, is solved.

Слабко зв'язані системи еліптичних рівнянь Монжа–Ампера і задача існування двовимірної поверхні у E^{k+2} з даними кривинами Кіллінга–Ліпшиця відносно k нормальних полів

В.М. Верещагін, Б.Е. Кантор

В $(k + 2)$-вимірному евклідовому просторі розглянуто поверхню $z^i = u^i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$, яка регулярно проектується на область Ω у площині x, y. Вводяться природні одиничні нормалі ξ_i вздовж векторів $(u^i_x, u^i_y, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$, $i = 1, \dots, k$, де -1 стоїть на $(i + 2)$-місці, і кривина Кіллінга–Ліпшиця відносно цих нормалей — $K^i(x, y)$. Розв'язується задача побудови поверхні з заданими позитивними функціями $K^i(x, y)$ і заданим краєм $u^i|_{\partial\Omega} = \varphi^i(\sigma)$, де σ — параметр вздовж кривої $\partial\Omega$.