Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 34–45

Объемы клеток Шуберта грассмановых многообразий

В.А. Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Многообразия Грассмана обладают известным клеточным разбиением Шуберта. В статье вычисляются объемы некоторых клеток Шуберта, стандартно вложеных в многообразие Грассмана с естественной римановой структурой.

Грассманово многообразие $G(l, p)$ l-мерных плоскостей в евклидовом пространстве E^p, проходящих через фиксированную точку, обладает известным клеточным разбиением на клетки Шуберта. Это разбиение используется для изучения топологического строения грассмановых многообразий (например, с помощью клеток Шуберта вычислены гомологии грассмановых многообразий [1, 2]).

В настоящий момент больший интерес представляет вопрос о дифференциально-геометрических свойствах грассмановых многообразий, что обусловлено проблемой изучения грассманова образа подмногообразий. На многобразии Грассмана $G(l, p)$ естественным образом можно ввести метрику, а именно: расстоянием между l-плоскостями π_1 и π_2 в E^p называют величину ρ такую, что

$$\rho^2(\pi_1, \pi_2) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i^2,$$

где β_i — стационарные значения углов между векторами из π_1 и π_2 [3].

Основываясь на результатах Л. Сантало [4] и используя изометрическое вложение $G(2, n)$ в евклидово пространство с помощью плюккеровых координат, мы рассмотрели вопрос об объемах клеток Шуберта многообразия $G(2, 5)$. Клеточный комплекс Шуберта $G(2, 5)$ имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & C_{14} \arrow[r] \arrow[dr] & C_{15} \arrow[r] & C_{25} \arrow[dr] & & \\
C_{12} \arrow[r] & C_{13} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{35} \arrow[r] & C_{45}, \\
 & & C_{23} \arrow[r] & C_{24} \arrow[r] \arrow[ur] & C_{34} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

где C_{ij} – клетка Шуберта, а $A \to B$ означает, что A лежит на границе B. Доказана

Теорема 1. *Объемы клеток Шуберта многообразия $G(2, 5)$ есть следующие:*

Клетка	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{23}	C_{15}	C_{24}	C_{25}	C_{34}	C_{35}	C_{45}
Размерность	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6
Объем	1	π	2π	2π	π^2	$\frac{\pi^3}{2}$	$\frac{8\pi^2}{3}$	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^3}{3}$	$\frac{4\pi^3}{3}$

Теорему 1 обобщает теорема 2.

Теорема 2.

а) $V_{k-2}(C_{1k}) = \frac{1}{2} \cdot V_{k-2}(S^{k-2})$;

б) $V_{k-1}(C_{2k}) = \frac{(k-3)\cdot(k-5)\ldots}{(k-4)\cdot(k-6)\ldots} A_k \frac{1}{2} \cdot V_{k-1}(S^{k-1})$, $k \geq 5$, *числитель и знаменатель включают только положительные множители, $A_k = 1$ при k нечетном и $A_k = \pi/2$ при k четном*;

в) $V_{2(k-2)}(C_{k-1\,k}) = \frac{(2k-5)\cdot(2k-7)\ldots3\cdot1}{(k-2)\,!} \frac{1}{2} \cdot V_{2(k-2)}(S^{2(k-2)})$, $k \geq 3$.

(V_t — *t-мерный объем, S^t — t-мерная сфера единичного радиуса.*)

Предваряя доказательство этих утверждений, рассмотрим некоторые свойства многообразия $G(2, p+2)$ и его клеточного разбиения Шуберта.

1. Пусть в евклидовом пространстве E^{p+2} выделена возрастающая последовательность подпространств $E^0 \subset E^1 \subset \ldots \subset E^{p+1} \subset E^{p+2}$. Многообразие $G(2, p+2)$ состоит из плоскостей в E^{p+2}, содержащих E^0. Клеткой Шуберта клеточного разбиения $G(2, p+2)$, соответствующего выделенной последовательности подпространств, называют множество

$$C_{i_1 i_2} = \left\{ \pi^2 \subset E^{p+2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \dim(\pi^2 \cap E^0) = 0 \ldots \dim(\pi^2 \cap E^{i_1 - 1}) = 0 \\ \dim(\pi^2 \cap E^{i_1}) = 1 \ldots \dim(\pi^2 \cap E^{i_2 - 1}) = 1 \\ \dim(\pi^2 \cap E^{i_2}) = 2 \end{array} \right\},$$

где $1 \leq i_1 < i_2 \leq p+2$. Размерность клетки $C_{i_1 i_2}$ равна $i_1 + i_2 - 3$. Многообразие $G(2, p+2)$ обладает единственной клеткой Шуберта максимальной размерности — $C_{p+1\,p+2}$ [1]. Легко видеть, что объемы клеток Шуберта не зависят от того, относительно какой последовательности подпространств рассматривается клеточное разбиение грассманова многообразия. Очевидно также, что объем клетки $C_{i_1 i_2}$ не зависит от того, относительно какого грассманова многообразия $G(2, t)$, ($t \geq i_2$), ее рассматривать.

2. Рассмотрим в E^{p+2} некоторую систему декартовых координат: точка O — начало координат, $\{e_i\}_{i=1}^{p+2}$ — ортонормированный базис. Любая плоскость π в E^{p+2}, проходящая через O, задается в декартовых координатах $\{x^i\}_{i=1}^{p+2}$ в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1\,p+2} \\ \cdot \qquad \cdot \\ a_{p\,1} \dots a_{p\,p+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ x^{p+2} \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $\pi_0 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$. Введем множество U 2-плоскостей в E^{p+2}, проходящих через начало координат и проектирующихся на π_0 без вырождения. Для каждой такой плоскости

$$\det \begin{pmatrix} a_{13} \dots a_{1\,p+2} \\ \cdot \qquad \cdot \\ a_{p\,3} \dots a_{p\,p+2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому каждая плоскость $\pi \in U$ задается в виде

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ \cdot \\ x^{p+2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{13} \dots a_{1\,p+2} \\ \cdot \qquad \cdot \\ a_{p\,3} \dots a_{p\,p+2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1\,p+2} \\ \cdot \qquad \cdot \\ a_{p\,1} \dots a_{p\,p+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \dots u^{p+1} \\ \cdot \qquad \cdot \\ u^p \dots u^{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

т.е. для каждой плоскости $\pi \in U$ существует единственный базис из векторов $\varepsilon_1 = (1, 0, u^1, \dots, u^p)$ и $\varepsilon_2 = (0, 1, u^{p+1}, \dots, u^{2p})$. Такое соответствие между плоскостями из U и наборами $(u^1, \dots, u^{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ – гомеоморфизм [1]. Таким образом, $\{u^i\}_{i=1}^{2p}$ — координаты в U. Будем называть U клеткой с центром в π_0 и обозначать $U(\pi_0)$. Эту терминологию объясняет

Лемма. *$U(\pi_0)$ — клетка Шуберта $C_{p+1\,p+2}$ некоторого клеточного разбиения многообразия $G(2, p+2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим возрастающую последовательность подпространств $E^0 \subset E^1 \subset \dots \subset E^{p+1} \subset E^{p+2}$, относительно которой строится требуемое клеточное разбиение. Возьмем

$$E^0 = O,\ E^1 = \operatorname{span}(e_3),\ \dots,\ E^p = \operatorname{span}(e_3, \dots, e_{p+2}),$$
$$E^{p+1} = \operatorname{span}(e_1, e_3, \dots, e_{p+2}),\quad E^{p+2} = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_{p+2}).$$

Тогда получаем

$$C_{p+1\,p+2} = \left\{ \pi \subset E^{p+2} \;\middle|\; \begin{matrix} \dim(\pi \cap E^0) = 0, \dots, \dim(\pi \cap E^p) = 0, \\ \dim(\pi \cap E^{p+1}) = 1,\ \dim(\pi \cap E^{p+2}) = 2 \end{matrix} \right\}.$$

Так как $\dim(\pi \cap E^{p+1}) = 1$, $\dim(\pi \cap E^{p}) = 0$, то в π существует вектор $\varepsilon_1 = (1, 0, f^1, \dots, f^p)$. Поскольку $\dim(\pi \cap E^{p+2}) = 2$, $\dim(\pi \cap E^{p+1}) = 1$, то в π существует вектор $\varepsilon_2 = (b, 1, f^{p+1}, \dots, f^{2p})$. Тогда в π существует базис из векторов $\varepsilon_1 = (1, 0, f^1, \dots, f^p)$ и $\varepsilon_2 - b\,\varepsilon_1 = (0, 1, f^{p+1} - bf^1, \dots)$, поэтому $\pi \subset U$. Таким образом, $C_{p+1\,p+2} \subseteq U$. Очевидно, $U \subseteq C_{p+1\,p+2}$, что проверяется непосредственно из определения U. Поэтому $U = C_{p+1\,p+2}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что так как $C_{p+1\,p+2}$ — единственная клетка максимальной размерности в клеточном разбиении $G(2, p+2)$, то

$$G(2, p+2) = U(\pi_0) \cup \Gamma,$$

где $\dim \Gamma < \dim U(\pi_0) = \dim G(2, p+2)$.

Пусть M — некоторое k-мерное подмногообразие в $G(2, p+2)$, задаваемое системой алгебраических уравнений R. Рассмотрим подмножество $M_1 \subset M$, задаваемое в M условием вырожденности проекций составляющих M 2-плоскостей на 2-плоскость π_0 в E^{p+2}. Это условие имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} a_{13} & \cdots & a_{1\,p+2} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{p\,3} & \cdots & a_{p\,p+2} \end{pmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Если R и условие (1) независимы, то M_1 — подмногообразие в $G(2, p+2)$ размерности меньше k. Поэтому $V(M) = V(M - M_1)$. Отметим, что $M - M_1 = M \cap U(\pi_0)$.

3. Грассманово многообразие $G^+(2, p+2)$ ориентированных 2-плоскостей в евклидовом пространстве E^{p+2}, проходящих через фиксированную точку O, является двулистной накрывающей для $G(2, p+2)$. Проекция $G^+(2, p+2) \to G(2, p+2)$ состоит в лишении 2-плоскостей в E^{p+2} ориентации. Каждой клетке Шуберта в клеточном разбиении $G(2, p+2)$ соответствуют две клетки Шуберта в $G^+(2, p+2)$. Пусть π_0^+ — это π_0, снабженная положительной ориентацией, π_0^- — отрицательной ориентацией. По аналогии с $U(\pi)$ можно ввести множества: $U(\pi_0^+)$ — 2-плоскости в E^{p+2}, проходящие через O и проектирующиеся на π_0^+ без вырождения с сохранением ориентации; тогда $U(\pi_0^-)$ состоит из 2-плоскостей в E^{p+2}, проходящих через O и проектирующихся на π_0^+ без вырождения с изменением ориентации. Аналогично полученному выше

$$G^+(2, p+2) = U(\pi_0^-) \cup \Gamma \cup U(\pi_0^+),$$

где $\dim \Gamma < \dim U(\pi_0^+) = \dim U(\pi_0^-) = \dim G^+(2, p+2)$.

Многообразию $M - M_1$, вложенному в $G(2, p+2)$, соответствует подмногообразие в $G^+(2, p+2)$, которое можно разбить на две непересекающихся компоненты

$$(M - M_1)^+ = \widetilde{M} \cap U(\pi_0^+),\ (M - M_1)^- = \widetilde{M} \cap U(\pi_0^-),$$

где $\widetilde{M}$ — k-мерное подмногообразие в $G^+(2, p+2)$, являющееся двулистной накрывающей подмногообразия $M \subset G(2, p+2)$. Очевидно, что объемы $(M - M_1)^+$, $(M - M_1)^-$ в $G^+(2, p+2)$ и $M - M_1$ в $G(2, p+2)$ совпадают.

4. Для $G^+(2, p+2)$ существует вложение с помощью плюккеровых координат в $S^{C^2_{p+2} - 1} \subset E^{C^2_{p+2}}$, описанное, например, в работе [5]. Оно имеет вид

$$r(\pi) = \frac{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]}{|[\varepsilon_1, \varepsilon_2]|},$$

где $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ — базис в π, задающий ориентацию в π, а $[*, *]$ — простой бивектор.

Рассмотрим произвольную плоскость $\pi_0 \subset E^{p+2}$. Введем в E^{p+2} систему координат так, что $\pi_0 = \mathrm{span}\,(e_1, e_2)$, где $\{e_i\}_{i=1}^{p+2}$ — ортонормированный базис в E^{p+2}. Будем считать, что положительная ориентация в π_0 задается упорядоченным базисом $\{e_1, e_2\}$. Введем в $U(\pi_0^+)$ координаты $(u^1, \ldots, u^{2p})$ по аналогии с указанным в п.2. Тогда вложение $U(\pi_0^+)$ в $E^{C^2_{p+2}}$ задается в виде

$$r(\pi) = r(u^1, \ldots, u^{2p}) = \frac{r^*(u^1, \ldots, u^{2p})}{|r^*(u^1, \ldots, u^{2p})|},$$

где

$$r^*(u^1, \ldots, u^{2p}) =$$

$$= \left(1, u^{p+1}, \ldots, u^{2p}, -u^1, \ldots, -u^p, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ u^{p+1} & u^{p+2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} u^{p-1} & u^p \\ u^{2p-1} & u^{2p} \end{vmatrix}\right);$$

это обусловлено указанным в п. 2 видом базисных векторов ε_1, ε_2 для плоскостей из $U(\pi_0^+)$ и тем, что ориентации в π_0, задаваемые базисом $\{e_1, e_2\}$ и проекцией базиса $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ на π_0, совпадают.

Заметим, что каждой неориентированной 2-плоскости в E^{p+2} соответствуют по плюккерову вложению две диаметрально противоположные точки на $S^{C^2_{p+2} - 1}$, отвечающие двум различным ориентациям в плоскости.

В [5] указано, что плюккерово вложение $G^+(2, p+2)$ изометрическое. Поэтому объемы подмногообразий в $G^+(2, p+2)$ и их образов при плюккеровом вложении совпадают. В дальнейшем множества из $G^+(2, p+2)$ и их образы будем обозначать одинаковыми символами.

Доказательство теорем 1 и 2.

а). Рассмотрим клетку вида C_{1k}. Так как $\dim_k C_{1k} = k - 2$, то $\dim_k C_{1t} < \dim C_{1k}$ при $t < k$. Поэтому $V_{k-2}(C_{1k}) = V_{k-2}\left(\bigcup_{t=1} C_{1t}\right)$. А множество $M = \bigcup_{t=1} C_{1t}$ в силу определения клеток Шуберта является множеством 2-плоскостей некоторого евклидова пространства E^k, содержащих некоторую фиксированную прямую E^1. Объем множества p-мерных подпространств в E^q, содержащих фиксированное s-мерное подпространство, вычисляется по доказанной в [4, с. 174] формуле

$$V = \frac{V_{q-s-1}(S^{q-s-1}) \cdot \ldots \cdot V_{q-p}(S^{q-p})}{V_{p-s-1}(S^{p-s-1}) \cdot \ldots \cdot V_1(S^1) \cdot 2};$$

при $p = 2$, $q = k$, $s = 1$ получаем

$$V_{k-2}(C_{1k}) = \frac{1}{2} V_{k-2}(S^{k-2}). \tag{2}$$

Это результат подтверждается тем, что образ плюккерова вложения двулистной накрывающей M-множества $\widetilde{M} \subset G^+(2, p+2)$ является вполне геодезической $(k-2)$-мерной сферой в $G^+(2, p+2)$ [6, с. 84]. Учитывая двулистность накрытия, убеждаемся в справедливости полученного результата.

Подставляя в (2) $k = 2, 3, 4, 5$, получаем объемы клеток Шуберта C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15} в клеточном разбиении многообразия $G(2, 5)$.

б). Рассмотрим клетку Шуберта $C_{2\,k+2}$, которую будем считать находящейся в клеточном разбиении многообразия $G(2, p+2)$. Так как $\dim C_{2n} = n-1$, то $\dim C_{2n} < \dim C_{2\,k+2}$ при $n < k+2$; так как $\dim C_{1q} = q-2$, то $\dim C_{1q} < \dim C_{2\,k+2}$ при $q < k+3$. Поэтому

$$V_{k+1}(C_{2\,k+2}) = V_{k+1}\left(\left[\bigcup_{n=3}^{k+2} C_{2n}\right] \cup \left[\bigcup_{q=3}^{k+2} C_{1q}\right]\right).$$

Используя определение клеток Шуберта, легко показать, что множество $M = \left[\bigcup_{n=3}^{k+2} C_{2n}\right] \cup \left[\bigcup_{q=3}^{k+2} C_{1q}\right]$ — это множество 2-плоскостей в E^{k+2}, проходящих через фиксированную точку O и пересекающих фиксированную 2-плоскость π_0 по прямой ($\pi_0 \not\subset M$). Множество M задается в терминах a_{ij} (см. п. 2) в следующем виде: существует ненулевое решение системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{p\,p+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

при $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \neq 0$, что суть условие на a_{ij}, $i = \overline{1, p}$, $j = 1, 2$, и очевидно, что разрешимость (3) не зависит от условия (1) вырожденности проекции 2-плоскости на 2-плоскость π_0. Поэтому, учитывая вывод п.2, получаем

$$V_{k+1}(M) = V_{k+1}\left(M \cap U(\pi_0)\right).$$

Рассматривая ориентированные 2-плоскости в E^{k+2} и принимая во внимание вывод п. 3, получаем, что

$$V_{k+1}(M) = V_{k+1}(\widetilde{M} \cap U(\pi_0^+)),$$

где $\widetilde{M} \subset G^+(2, k+2)$ — двулистная накрывающая для множества $M \subset G(2, k+2)$. С учетом п. 4, определим плюккерово вложение $\widetilde{M} \cap U(\pi_0^+)$ в $E^{C_k^2+2}$. Пусть $\pi \in U(\pi_0^+)$ соответствуют координаты $(u^1, \dots, u^{2k})$: это означает, что в π существует базис из векторов $\varepsilon_1 = (1, 0, u^1, \dots, u^k)$ и $\varepsilon_2 = (0, 1, u^{k+1}, \dots, u^{2k})$, т.е. π задается в евклидовом пространстве системой

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ \cdot \\ x^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u^k & \dots & u^{2k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Если $\pi \in \widetilde{M}$, то существует единственное $\alpha \in [0, \pi)$ такое, что π пересекает π_0 по прямой с направляющим вектором $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0, \dots, 0)$. Тогда $\widetilde{M} \cap U(\pi_0^+)$ задается в $U(\pi_0^+)$ системой

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u^k & \dots & u^{2k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

или в параметрическом виде

$$\begin{cases} u^1 = -v^1 \sin\alpha, & u^{k+1} = v^1 \cos\alpha, \\ \cdot & \cdot \\ u^k = -v^k \sin\alpha, & u^{2k} = v^k \cos\alpha \end{cases}, \qquad \begin{matrix} \alpha \in [0, \pi) \\ v^i \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, k} \end{matrix}$$

и с помощью плюккеровых координат вкладывается в $E^{C_k^2+2}$ в виде

$$r = r(v^1, v^2, \dots, v^k, \alpha) = \frac{(1, v^1\cos\alpha, \dots, v^k\cos\alpha, v^1\sin\alpha, \dots, v^k\sin\alpha, 0, \dots, 0)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{k} (v^i)^2}}.$$

Так как плюккерово вложение изометрическое, то объем $\widetilde{M} \cap U(\pi_0^+)$ совпадает с объемом его образа, который можно посчитать по формуле

$$V = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\det g}\, dv^1 \dots dv^k\, d\alpha,$$

где g — матрица метрического тензора подмногообразия в $E^{C_k^2+2}$, заданного радиус-вектором (4). Не составляет труда показать, что

$$g=\begin{pmatrix} \frac{s-(v^1)^2}{s^2} & \frac{-v^1v^2}{s^2} & \cdot & \cdot & \frac{-v^1v^k}{s^2} & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \frac{s-(v^k)^2}{s^2} & 0 \\ & & & & & \frac{s-1}{s} \end{pmatrix},$$

где $s = 1 + \sum\limits_{i=1}^{k}(v^i)^2$. Отсюда $\det g = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}(v^i)^2}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{k}(v^i)^2\right)^{k+2}}$, и поэтому

$$V=\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Sigma\,(v^i)^2}}{\left(1+\Sigma\,(v^i)^2\right)^{(k+2)/2}}\,dv^1\dots dv^k\,d\alpha=\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Sigma\,(v^i)^2}\,dv^1\dots dv^k}{\left(1+\Sigma\,(v^i)^2\right)^{(k+2)/2}}.$$

При $k = 1$ имеем

$$V=\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,v^1\,|}{(1+(v^1)^2)^{3/2}}\,dv^1=2\pi.$$

Итак, $V(C_{23})=2\pi$.

При $k \geq 2$ перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} v^1 &= r\cos\alpha_1\cdot\ldots\cdot\cos\alpha_{k-1},\\ v^2 &= r\cos\alpha_1\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_{k-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v^k &= r\sin\alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &r\in[0,+\infty),\\ &\alpha_i\in[-\pi/2,\pi/2],\ i=\overline{1,k-2},\\ &\alpha_{k-1}\in[0,2\pi] \end{aligned}$$

и получим

$$V=\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^k\,dr}{(1+r^2)^{(k+2)/2}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\alpha_1)^{k-2}\,d\alpha_1\cdot\ldots\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\alpha_{k-2})\,d\alpha_{k-2}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha_{k-1}=$$

$$=\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^k\,dr}{(1+r^2)^{(k+2)/2}}J.$$

Замечая, что $J=kV_k(T^k)$, где T^k — k-мерный шар единичного радиуса, получаем

$$V=\pi\,kV_k(T^k)\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^k\,dr}{(1+r^2)^{(k+2)/2}}.$$

Легко показать (интегрируя по частям, например), что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^k\,dr}{(1+r^2)^{(k+2)/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

где Γ — эйлеров интеграл второго рода. Учитывая, что $V_k(T^k)=\frac{1}{2\pi}V_{k+1}(S^{k+1})$, получаем

$$V=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}V_{k+1}(S^{k+1}).$$

При $k=2,3$ имеем

$$V(C_{24})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)}\,V(S^3)=\pi^3/2;$$

$$V(C_{25})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}\,V(S^4)=8/3\,\pi^2.$$

В общем случае

$$V(C_{2k})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}V_{k-1}(S^{k-1})$$

и, используя свойства эйлерова интеграла, приходим к формуле, указанной в п. б) теоремы 2.

в) Рассмотрим клетку $C_{k-1\,k}$. Так как $C_{k-1\,k}$ — единственная клетка максимальной размерности в клеточном разбиении многообразия $G(2,k)$, то

$$V_{2(k-2)}(C_{k-1\,k})=V_{2(k-2)}(G(2,k)).$$

Из приведенной при доказательстве п. а) теоремы 2 формулы из [4] получаем

$$V_{2(k-2)}(C_{k-1\,k}) = \frac{V_{k-1}(S^{k-1})\,V_{k-2}(S^{k-2})}{2V_1(S^1)}, \tag{5}$$

положив $s = 0$, $p = 2$, $q = k$.

Подставляя в (5) $k = 2, 3, 4, 5$, определим объемы клеток Шуберта C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{45} в клеточном разбиении многообразия $G(2, 5)$. Учитывая, что $V(S^{t-1}) = 2\pi^{\frac{t}{2}}/\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)$, имеем

$$V_{2(k-2)}(C_{k-1\,k}) = \frac{\Gamma(k-3/2)}{\Gamma(k/2)\,\Gamma((k-1)/2)}\,\frac{1}{2}\,V_{2(k-2)}(S^{2(k-2)}).$$

Используя свойства эйлерова интеграла, приходим к указанной в п. в) теоремы 2 формуле.

К сожалению, автору не удалось определить объем клетки Шуберта C_{35} в силу неудачной параметризации этой клетки как подмногообразия в $G(2, 5)$, повлекшей за собой необходимость вычисления достаточно сложного интеграла. Однако при подготовке этой статьи к печати Ю.А. Николаевским было предоставлено автору доказательство утверждения, позволяющего завершить вычисление объемов клеток Шуберта многообразия $G(2, 5)$.

Лемма. *Объем клетки Шуберта C_{35} многообразия $G(2, 5)$ равен $8\pi^3/3$.*

Доказательство. Легко видеть, что объем клетки C_{35} равен объему подмногообразия $A \subset G(2, 5)$, которое состоит из двумерных подпространств, имеющих с данным фиксированным $E^3 \subset E^5$ одномерное пересечение — они отличаются на множество меньшей размерности. Выберем декартовы координаты $\{x^i\}_{i=1}^{5}$ в E^5 так, чтобы отмеченное подпространство E^3 было $x^4 = x^5 = 0$. Для каждого $\pi \in A$ однозначно с точностью до замены каждого из векторов на противоположный определен ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ такой, что $\pi = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ и $e_1 \subset E^3$. Пусть

$$e_1 = (\cos u^1, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2, 0, 0).$$

Для вектора e_2 обозначим через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ длины его проекций на E^3 и на $E^2 = (E^3)^{\perp}$ соответственно. Проекция e_2 на E^2 есть произвольный вектор длины $\sin\varphi$, т.е. вектор

$$(\sin\varphi \cos w, \sin\varphi \sin w)$$

при некотором w; проекция на E^3 — вектор длины $\cos\varphi$, ортогональный вектору $(\cos u^1, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2)$, т.е. вектор

$$(\cos\varphi \sin u^1 \cos u^3, \cos\varphi\,(-\cos u^1 \cos u^2 \cos u^3 + \sin u^2 \sin u^3),$$

$$\cos\varphi\,(-\sin u^2 \cos u^1 \cos u^3 - \cos u^2 \sin u^3) =$$

$$= \cos\varphi\,(\cos u^3\,(\sin u^1, -\cos u^1\cos u^2, -\sin u^2\cos u^1) + \sin u^3\,(0, \sin u^2, -\cos u^2))$$

при некотором u^3. Таким образом,

$$e_2 = (\cos\varphi\sin u^1\cos u^3, \cos\varphi\,(-\cos u^1\cos u^2\cos u^3 + \sin u^2\sin u^3),$$

$$\cos\varphi\,(-\sin u^2\cos u^1\cos u^3 - \cos u^2\sin u^3), \sin\varphi\cos w, \sin\varphi\sin w).$$

Мы получили, фактически, параметризацию подмногообразия A. Определим интервалы изменения параметров u^1, u^2, u^3, φ, w так, чтобы сопоставление точкам множества A набора $(u^1, u^2, u^3, \varphi, w)$ было биективным (за исключением, возможно, меры ноль).

Вектор e_1 определен подпространством π с точностью до знака. Будем выбирать его так, чтобы его первая координата была неотрицательна. Тогда $u^1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $u^2 \in [0, 2\pi]$. Далее, по выбору, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Аналогично будем из двух возможностей для вектора e_2 выбирать ту, для которой пятая координата неотрицательна. Получаем $w \in [0, \pi]$, $u^3 \in [0, 2\pi]$.

Теперь вычислим индуцированную метрику на $A \subset G(2, 5)$. Вкладывая $A \subset G(2, 5)$ в евклидово пространство E^{10} с помощью плюккеровых координат, получаем (после некоторых выкладок), что первая квадратичная форма на A равна

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,dw^2 + (\sin^2\varphi + \cos^2\sin^2 u^3)(du^1)^2 - \\ & - 2\cos^2\varphi\sin u^1\sin u^3\cos u^3 du^1 du^2 + \\ & + (\sin^2\varphi\sin^2 u^1 + \cos^2\varphi\,(\cos^2 u^3 + \sin^2 u^3\cos^2 u^1)(du^2)^2 + \\ & + 2\cos^2\varphi\cos^2 u^1 du^2 du^3 + \cos^2\varphi\,(du^3)^2. \end{aligned}$$

Поэтому элемент объема на подмногообразии A равен

$$dv = \sin^2\varphi\cos\varphi\,|\sin u^1|\,d\varphi\,dw\,du^1 du^2 du^3.$$

Отсюда

$$V(C_{35}) = V(A) = \int_A dv = 4\pi^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin u^1|\,du^1 = 8\pi^3/3,$$

что и требовалось доказать.

Текст доказательства изложен в точности в том виде, в каком он был предложен Ю.А. Николаевским. Отметим лишь, что $A = C_{14} \cup C_{15} \cup C_{24} \cup C_{25} \cup C_{34} \cup C_{35}$.

Содержание теоремы 2 удобно сформулировать в следующей форме:

а) $V_{k-2}(C_{1k}) = \pi^{\frac{k-1}{2}}/\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)$;

б) $V_{k-1}(C_{2k}) = \pi^{\frac{k+1}{2}}/\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)/\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)\right]$;

в) $$V_{2(k-2)}(C_{k-1\,k}) = \pi^{k-\frac{3}{2}} / \left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\right].$$

Эти формулы можно получить из формул теоремы 2, если учесть, что $V(S^t) = 2\pi^{\frac{t+1}{2}}/\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)$.

В заключение хотелось бы выразить благодарность Ю.А. Аминову за постановку проблемы и внимание к ходу ее решения, а также Ю.А. Николаевскому за сообщение доказательства последней леммы.

Список литературы

1. *Дж. Шварц*, Дифференциальная геометрия и топология. Мир, Москва (1977), 223 с.
2. *Д.Б. Фукс*, Классические многообразия . В сб: Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 12. Топология-1. ВИНИТИ, Москва (1986), с. 253–314.
3. *Y.C. Wong*, Differential geometry of Grassman manifolds.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1967), v. 57, pp. 589–594.
4. *Л. Сантало*, Интегральная геометрия и геометрические вероятности. Наука, Москва (1983), 360 с.
5. *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий.— Успехи мат. наук (1991), т. 46, вып.2, с. 41–83.
6. *Ю.А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. I.— Укр.геометр. сб. (1991), вып. 34, с. 83–98.

Volumes of Shubert blocks of Grassmann manifolds

V. Gorkaviy

Grassman manifolds have the well-known Shubert block decomposition. Here the volumes of some Shubert blocks standardly embedded into a Grassmann manifold with a natural Riemann structure are calculated.

Об'єми клітин Шуберта грасманових многовидів

В.О. Горькавий

Многовиди Грасмана мають відоме клітинне розбиття Шуберта. У статті обчислюються об'єми деяких клітин Шуберта, які стандартно занурені у многовид Грасмана з натуральною рімановою структурою.