Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 65–69

Метрика и мера пространства типов общих кривых второго порядка

В.И. Денисов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

По отношению эквивалентности, порожденному движениями плоскости и умножениями на ненулевую константу, рассматривается множество типов кривых второго порядка, т.е. множество классов троек вещественных чисел $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$. На нем вводится кинематически инвариантная риманова метрика и мера. Вычислена мера кривых эллиптического и гиперболического типов.

Рассмотрим множество общих кривых второго порядка. Каждая кривая этого множества определяется в декартовой системе координат уравнением

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0, \tag{0.1}$$

коэффициенты которого действительные числа, такие, что хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля. Кривую (0.1), в зависимости от знака числа $I_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, будем называть кривой эллиптического типа ($I_2 > 0$), гиперболического типа ($I_2 < 0$) и параболического типа, если $I_2 = 0$. Такая классификация кривых второго порядка инвариантна относительно преобразований движения плоскости

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi + \alpha, \\ y &= x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi + \beta. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Цель данной работы — определить пространство Γ типов кривых второго порядка и найти кинематически-инвариантную риманову метрику и меру, [1], этого пространства.

Условие кинематической инвариантности означает, что метрика и мера пространства Γ должны быть инвариантны относительно группы преобразований, индуцированной на Γ преобразованиями (0.2). Следует отметить, что определение меры на Γ подразумевает задание на Γ положительно-определенной, по крайней мере непрерывной, функции [2], которую назовем плотностью меры.

1. Определим пространство Γ. Так как тип кривой (0.1) определяется коэффициентами a_{11}, a_{22}, a_{12} ее уравнения, поставим в соответствие каждой такой кривой упорядоченную тройку чисел (a_{11}, a_{22}, a_{12}). Будем считать эту тройку чисел "декартовыми" координатами кривой (0.1) в Γ^*-пространстве упорядоченных троек чисел. Определенное таким образом пространство Γ^* обладает следующими свойствами.

Γ^* не содержит точку (0, 0, 0), так как среди чисел a_{11}, a_{22}, a_{12} хотя бы одно отлично от нуля.

Далее, так как уравнение (0.1) и уравнение, которое получено из (0.1) умножением на любое постоянное число λ, отличное от нуля, определяют одну и ту же кривую, то мы отождествляем точки (a_{11}, a_{22}, a_{12}) и $(\lambda a_{11}, \lambda a_{22}, \lambda a_{12})$ в Γ^*. Другими словами, две точки (a_{11}, a_{22}, a_{12}) и $(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{12})$ в Γ^* будем считать различными, если не существует такого $\lambda \neq 0$, что

$$\tilde{a}_{11} = \lambda a_{11}, \quad \tilde{a}_{22} = \lambda a_{22}, \quad \tilde{a}_{12} = \lambda a_{12}. \tag{1.1}$$

Отметим, что выше определенное соответствие между кривыми (0.1) и точками Γ^* по существу является соответствием между элементами факторизованного множества кривых (0.1) и точками Γ^*, если считать, что две кривые γ, $\tilde{\gamma}$ второго порядка принадлежат одному классу эквивалентности, если коэффициенты их уравнений связаны соотношением (1.1). Так определенное пространство Γ^* можно характеризовать следующими свойствами.

В пространстве Γ^* действует группа преобразований, индуцированная преобразованиями (0.2):

$$\begin{aligned} a^*_{11} &= a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\ a^*_{22} &= a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi, \\ a^*_{12} &= -a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Определим теперь Γ как множество различных точек Γ^*. Так как среди чисел a_{11}, a_{22}, a_{12} хотя бы одно отлично от нуля, то пространство Γ^* не содержит точку (0, 0, 0).

Далее, так как уравнение (0.1) и уравнение, которое получено из (0.1) умножением на любое постоянное число λ, отличное от нуля, определяют одну и ту же кривую, то мы отождествляем точки (a_{11}, a_{22}, a_{12}) и $(\lambda a_{11}, \lambda a_{22}, \lambda a_{12})$ $(\lambda \neq 0)$ в Γ^*. Другими словами, две точки (a_{11}, a_{22}, a_{12}) и $(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{12})$ в Γ^* будем считать различными, если не существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\tilde{a}_{11} = \lambda a_{11}, \quad \tilde{a}_{22} = \lambda a_{22}, \quad \tilde{a}_{12} = \lambda a_{12}. \tag{1.3}$$

Уточним строение множества Γ. Рассмотрим в связи с этим в Γ^* центральную поверхность F, уравнение которой имеет вид

$$a^2_{11} + a^2_{22} + 2a^2_{12} = 1. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что эта поверхность инвариантна относительно группы преобразований (1.1). Так как координаты кривой (0.1) определены с точностью до множителя λ, нормируем их, считая, что они удовлетворяют условию $a^2_{11} + a^2_{22} + 2a^2_{12} = 1$.

Последнее, в сущности, означает, что любой кривой (0.1) мы ставим в соответствие точку $\in F$, координаты которой равны

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2}} (a_{11}, a_{22}, a_{12}).$$

Теперь отождествим диаметрально-противоположные точки поверхности F. Полученное множество точек и есть Γ.

2. Найдем общий вид кинематически-инвариантных римановых метрик Γ. Для этого определим на Γ новую систему координат $\{ u, v \}$ следующим образом:

$$a_{11} = \frac{\sin u + \cos u \cos v}{\sqrt{2}},$$

$$a_{22} = \frac{\sin u - \cos u \cos v}{\sqrt{2}},$$

$$a_{12} = \frac{\cos u \sin v}{\sqrt{2}}; \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le \pi. \tag{2.1}$$

Эта система координат на Γ отличается тем свойством, что ее координатные линии $u = \mathrm{const}$ являются орбитами группы (1.2), действующей на Γ.

Приведенные ограничения на область изменения u, v определяются из того, что диаметрально-противоположные точки поверхности F отождествлены. В координатах (2.1) точка, диаметрально-противоположная точка (u, v), имеет координаты $(-u, v + \pi)$.

Далее, подставляя (2.1) в (1.1), после несложных преобразований убеждаемся, что группа преобразований (1.1) при переходе к переменным (u, v) определяется следующими выражениями:

$$u^* = u, \quad v^* = (v - 2\varphi) \bmod \pi. \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь произвольную регулярную риманову метрику Γ. В системе координат (2.1) такая метрика определяется соотношением

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{2.3}$$

где E, F, G — регулярные функции u, v, удовлетворяющие условию положительной определенности формы (2.3). Чтобы метрика (2.3) была кинематически-инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы вдоль векторного поля инфинитезимального оператора группы (2.2) производные Ли метрического тензора (2.3) были равны нулю [2].

Так как $\underset{\varphi}{X}$ инфинитезимальный оператор группы (2.2) равен $-2\frac{\partial}{\partial v}$, то условия равенства нулю производных Ли метрического тензора (2.3) вдоль векторного поля $\xi^i = (0, -2)$ имеют вид [2]

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$ds^2 = E(u)du^2 + 2F(u)dudv + G(u)dv^2 \tag{2.4}$$

— общий вид кинематически-инвариантной метрики Γ.

Теперь на Γ можно определить кинематически-инвариантную меру, которая индуцируется метрикой (2.4). Ее плотность равна $\sqrt{EG - F^2}$. Назовем такую меру римановой метрической мерой (РММ).

Нетрудно доказать, что любая кинематически-инвариантная мера Γ является РММ. Действительно, если m — функция плотности кинематически-инвариантной меры Γ, то она не зависит от переменной v. Тогда эта мера является РММ метрики

$$ds^2 = du^2 + m^2(u)dv^2.$$

3. Пусть $m(u)$ — кинематически-инвариантная мера Γ. Найдем меру множества точек Γ, каждая из которых определяет кривую (0.1) эллиптического типа. Из условия $I_2 > 0$ для таких кривых и (2.1) следует, что координаты (u, v) соответствующей точки Γ связаны условием $(\sin u)^2 - (\cos u)^2 > 0$, откуда следует: $|tg\, u| > 1$, т.е. $-\frac{\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{2}$. Тогда мера $\overset{+}{\mu}$ кривых эллиптического типа равна

$$\overset{+}{\mu} = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (m(u) + m(-u))du. \tag{3.1}$$

Аналогично находим меру $\bar{\mu}$ кривых гиперболического типа:

$$\bar{\mu} = \pi \int_{0}^{\pi/4} (m(u) + m(-u))du. \tag{3.2}$$

Определим теперь на Γ функцию плотности вероятности

$$P(u) = m(u)/(\overset{+}{\mu} + \bar{\mu}). \tag{3.3}$$

Возьмем теперь наудачу (с плотностью вероятности (3.1)!) точку из Γ. Тогда вероятность $\overset{+}{P}$ того, что эта точка определяет кривую эллиптического типа, равна

$$\overset{+}{P} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (P(u) + P(-u))du = \overset{+}{\mu}/(\overset{+}{\mu} + \bar{\mu}). \tag{3.4}$$

Вероятность того, что эта точка определяет кривую гиперболического типа, равна

$$\bar{P} = \bar{\mu}/(\overset{+}{\mu} + \bar{\mu}). \tag{3.5}$$

4. Среди кинематически-инвариантных метрик Γ выделяется "естественная", в определенном смысле, метрика. Она определяется на основании следующего замечания. Так как выражение $a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2$ инвариантно относительно преобразования (1.1), то квадратичная форма $da_{11}^2 + da_{22}^2 + 2(da_{12})^2$ кинематически-инварианта, и она может быть взята в качестве "естественной" метрики Γ. В переменных (2.1) эта метрика имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (\cos u)^2 dv^2. \tag{4.1}$$

Тогда в РММ метрики (4.1) меры кривых эллиптического и гиперболического типов (3.1) и (3.2) равны

$$\overset{+}{\mu} = \pi\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1), \quad \overset{-}{\mu} = \pi\sqrt{2}, \tag{4.2}$$

и вероятности $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ равны соответственно $(1 - 1/\sqrt{2})$ и $1/\sqrt{2}$. Из (4.2) следует, что в РММ метрики (4.1) кривых гиперболического типа больше, чем кривых эллиптического типа, и $\overset{-}{P} > \overset{+}{P}$.

Если на Γ задать метрику $ds^2 = du^2 + (\operatorname{ch} u)^2 dv^2$, то в РММ этой метрики ситуация противоположная предыдущей: $\overset{-}{\mu} < \overset{+}{\mu}$ и $\overset{-}{P} < \overset{+}{P}$.

Список литературы

1. *Л.А. Сантало*, Введение в интегральную геометрию.— Гос. изд-во иностр. лит., Москва (1956), 183 с.
2. *Л.П. Эйзенхарт*, Непрерывные группы преобразований. — Гос. изд-во иностр. лит., Москва (1947), 359 с.

The metric and measure of the space of types of second order curves

V.I. Denisov

The author has considered the space of types of second order curves, e.g. the set of classes of triples of real numbers $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$ generated by translations of plane and multiplications by a non-zero constant. On this set classes an invariant Riemannian metric and measure is defined. The measure of elliptic and hyperbolic curve types has been evaluated.

Метрика і міра простору типів загальних кривих другого порядку

В.І. Денісов

По відношенню еквівалентності, що породжена рухами площини та множеннями на ненульову константу, розглядається множина типів кривих другого порядку, тобто множина класів трійок дійсних чисел $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$. На ній вводиться кінематично інваріантна ріманова метрика і міра. Обчислено міру кривих еліптичного та гіперболічного типів.