Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 118–124

Многомерные k-геликоидальные поверхности в евклидовом пространстве E^m

В.Т. Лисица

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 апреля 1994 года

Определяются k-геликоидальные n-мерные поверхности в евклидовом пространстве E^m. Доказано, что не существует полной k-геликоидальной поверхности с отделенной от нуля отрицательной секционной кривизной в евклидовом пространстве E^m.

В работах [1-3] были изучены геликоидальные поверхности в евклидовых пространствах E^m $(m > 3)$. В [1] введено следующее определение двумерной геликоидальной поверхности: метрика двумерной поверхности называется метрикой вращения, если в некоторой полугеодезической системе координат она приводится к виду

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2. \tag{1}$$

Поверхность F называется геликоидальной, если она имеет метрику вращения и допускает такой выбор попарно ортогональных нормалей $N_1, \ldots, N_{m-2}$, что от параметра v не зависят все коэффициенты кручения $\mu_{\tau\sigma|k}$ и все коэффициенты вторых квадратичных форм $\Omega_{\sigma|ij}$. В работах [1, 2] доказано, что на всякой двумерной геликоидальной поверхности F в E^m $(m > 3)$ метрика (1) такова, что функция φ' ограничена. В [3] введены n-мерные геликоидальные поверхности.

Метрика поверхности F^n называется метрикой вращения, если в некоторой системе координат она имеет вид $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\, ds_1^2$, где ds_1^2 — метрика $(n-1)$-мерного пространства постоянной кривизны. Поверхность F^n называется геликоидальной, если она имеет метрику вращения и для некоторой системы попарно ортогональных нормалей коэффициенты кручения $\mu_{\tau\sigma|k}$, коэффициенты вторых квадратичных форм $\Omega_{\sigma|ij}$ и средние кривизны H_σ зависят только от переменной x_1 $(\sigma = 1, \ldots, m-n)$. В [3] доказаны теоремы, аналогичные сформулированым в [1,2].

А.А. Борисенко заметил, что в условиях теоремы метрика ds_2^2 будет плоской, а основные результаты [3] будут выполняться и без требования, наложенного на средние кривизны. Это следует из результатов данной работы.

Напомним основные определения и факты, используемые нами.

Метрика n-мерного многообразия называется полуприводимой, если в некоторой системе координат она имеет вид [4]

$$ds^2 = ds_1^2 + \varphi^2\, ds_2^2,$$

где компоненты метрики ds_1^2 и функция φ зависят только от переменных $x_1,\ldots,x_k$ $(k<n)$, а компоненты метрики ds_2^2 зависят только от $x_{k+1},\ldots,x_n$, $g_{is}=0$ $(i=1,\ldots,k;\ s=k+1,\ldots,n)$.

Поверхность F^n в E^m будем называть k-геликоидальной, если ее метрика полуприводима и для некоторой системы попарно ортогональных нормалей $N_1,\ldots,N_{m-n}$ коэффициенты кручения $\mu_{\tau\sigma|\alpha}$ и вторых квадратичных форм $\Omega_{\sigma|\alpha\beta}$ зависят только от переменных $x_1,\ldots,x_k$ $(\alpha,\beta=1,\ldots,n;\ \tau,\sigma=1,\ldots,m-n)$.

Обозначим через $K(X_\alpha;X_\beta)=K_{\alpha\beta}$ секционную кривизну поверхности по двумерной площадке, натянутой на векторы X_α, X_β. Условимся, что индексы будут пробегать значения $i,j,l=1,\ldots,k;\ r,s,t=k+1,\ldots,n;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta=1,\ldots,n$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *На всякой k-геликоидальной поверхности F^n в евклидовом пространстве $E^m(0<k<n<m)$ метрика* (2) *такова, что выполняются следующие условия*:

1) *если $\varphi_{i,j}=0$ для каких-либо i, j, то метрика ds_2^2 — плоская;*

2) $\|\operatorname{grad}\varphi\|_1\le M=\mathrm{const}$.

Теорема 2. *Если секционная кривизна k-геликоидальной поверхности F^n отрицательна, то*:

1) *координатные многообразия $x_r=\mathrm{const}$ $(r=k+1,\ldots,n)$ некомпактны*;

2) *если $K_{rs}\le -a^2<0$ $(a=\mathrm{const})$, то F^n не может быть полной.*

Перейдем к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Напомним, что уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи для поверхности F^n в E^m имеют вид [5]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sum_\sigma\left(\Omega_{\sigma|\alpha\gamma}\Omega_{\sigma|\beta\delta}-\Omega_{\sigma|\alpha\delta}\Omega_{\sigma|\beta\gamma}\right); \tag{3}$$

$$\Omega_{\sigma|\alpha\beta,\gamma}-\Omega_{\sigma|\alpha\gamma,\beta}=\sum_\tau\left(\mu_{\tau\sigma|\gamma}\Omega_{\tau|\alpha\beta}-\mu_{\tau\sigma|\beta}\Omega_{\tau|\alpha\gamma}\right); \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\tau\sigma|\alpha,\beta}-\mu_{\tau\sigma|\beta,\alpha}&+\sum_\rho\left(\mu_{\rho\tau|\alpha}\mu_{\rho\sigma|\beta}-\mu_{\rho\tau|\beta}\mu_{\rho\sigma|\alpha}\right)+\\&+g^{\gamma\delta}\left(\Omega_{\tau|\gamma\alpha}\Omega_{\sigma|\delta\beta}-\Omega_{\tau|\gamma\beta}\Omega_{\sigma|\delta\alpha}\right)=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Так как метрика геликоидальной поверхности полуприводима, то

$$\begin{gathered}g_{ij}=g_{ij}(x_1,\ldots,x_k);\quad g_{ir}=0;\quad g_{rs}=\varphi^2\tilde g_{rs}(x_{k+1},\ldots,x_n);\quad g^{ij}=g^{ij}(x_1,\ldots,x_k);\\ g^{is}=0;\quad g^{rs}=\tilde g^{rs}(x_{k+1},\ldots,x_n)/\varphi^2.\end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая (6), можно подсчитать

$$\Gamma_{ij,l}=\tilde\Gamma_{ij,l};\quad \Gamma_{ir,s}=-\Gamma_{rs,i}=\varphi\varphi_i\tilde g_{rs};\quad \Gamma_{is,j}=\Gamma_{ij,s}=0;\quad \Gamma_{rs,t}=\varphi^2\tilde\Gamma_{rs,t}; \tag{7}$$

$$\Gamma^{l}_{ij} = \widetilde{\Gamma}^{l}_{ij}; \quad \Gamma^{r}_{ij} = \Gamma^{j}_{ir} = 0; \quad \Gamma^{s}_{ir} = \frac{\varphi_i}{\varphi}\delta^{s}_{r}; \quad \Gamma^{i}_{rs} = -\widetilde{g}_{rs}\varphi\varphi_l\widetilde{g}^{li}\ ; \ \Gamma^{t}_{rs} = \widetilde{\Gamma}^{t}_{rs}, \tag{8}$$

где $\varphi_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\widetilde{\Gamma}_{ij,\,l}$, $\widetilde{\Gamma}_{rs,\,t}$ — символы Кристоффеля в метриках ds_1^2 и ds_2^2 соответственно. Компоненты тензора кривизны вычисляются по формуле [5]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta\,\partial x_\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\gamma}\right) +$$
$$+ g^{\mu\nu}\left(\Gamma_{\beta\gamma,\,\nu}\Gamma_{\alpha\delta,\,\mu} - \Gamma_{\beta\delta,\,\nu}\Gamma_{\alpha\gamma,\,\mu}\right). \tag{9}$$

Учитывая (6)-(9), найдем, что

$$R_{isjr} = -\widetilde{g}_{rs}\varphi\varphi_{i,\,j}, \tag{10}$$

где $\varphi_{i,\,j}$ — ковариантная производная φ_i по x_j в метрике ds_1^2. Из уравнений Гаусса (3) и (10) следует, что

$$-\widetilde{g}_{rs}\varphi\varphi_{i,\,j} = \sum_{\sigma}\left(\Omega_{\sigma|ij}\Omega_{\sigma|rs} - \Omega_{\sigma|ir}\Omega_{\sigma|js}\right).$$

Рассмотрим два случая:

1) $\varphi_{i,\,j} = 0$ $(i, j = 1,\dots, k)$. Пусть $\langle\ ;\ \rangle_1$ означает скалярное произведение в метрике ds_1^2, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \operatorname{grad}\varphi; \operatorname{grad}\varphi\rangle_1 = 2\langle \operatorname{grad}\varphi; \nabla_{x_i}\operatorname{grad}\varphi\rangle_1 = 2\,\widetilde{g}^{lj}\varphi_l\varphi_{i,\,j} = 0,$$

следовательно, $\|\operatorname{grad}\varphi\|_1^2 = \mathrm{const}$ и является величиной ограниченной.

2) $\varphi_{i,\,j} \neq 0$ для какой-нибудь пары индексов i, j. Рассмотрим

$$R_{irjs} = -\widetilde{g}_{rs}\varphi\varphi_{i,\,j} = \sum_{\sigma}\left(\Omega_{\sigma|ij}\Omega_{\sigma|rs} - \Omega_{\sigma|ir}\Omega^{\bullet}_{\sigma|js}\right), \quad r,\ s = k+1,\dots, n.$$

Правая часть этого равенства по определению геликоидальности есть функция только от $x_1,\dots, x_k$, слева $\varphi\varphi_{i,\,j}$ также функция только от $x_1,\dots, x_k$, значит, $\widetilde{g}_{rs}$ не должны зависеть от $x_{k+1},\dots, x_n$. Следовательно, метрика ds_2^2 — плоская, что доказывает первое утверждение теоремы 1.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения. Рассмотрим случай, когда $\varphi_{i,\,j} \neq 0$ хотя бы для одной пары индексов i и j. В этом случае метрика ds_2^2 является плоской и можно выбрать такие координаты $x_{k+1},\dots, x_n$, что $\widetilde{g}_{rs} = \delta_{rs}$. Тогда возможно подсчитать, что $\widetilde{\Gamma}^{t}_{rs} = 0$, и, кроме того,

$$R_{irst} = 0, \quad R_{rstf} = 0;$$

$$R_{rsrs} = -\widetilde{g}^{ij}\varphi^2\varphi_i\varphi_j, \quad i,\ j = 1,\dots, k, \quad r,\ s,\ t,\ f = k+1,\dots, n. \tag{11}$$

С учетом геликоидальности находим, что

$$\mu_{\tau\sigma|r,i} - \mu_{\tau\sigma|i,r} = \frac{\partial \mu_{\tau\sigma|r}}{\partial x_i}.$$

Если теперь учесть (5), мы придем к уравнению

$$\frac{\partial \mu_{\tau\sigma|r}}{\partial x_i} + \sum_\rho \left(\mu_{\rho\tau|r}\mu_{\rho\sigma|i} - \mu_{\rho\tau|i}\mu_{\rho\tau|r}\right) + g^{\alpha\beta}\left(\Omega_{\tau|\alpha r}\Omega_{\sigma|\beta i} - \Omega_{\tau|\alpha i}\Omega_{\sigma|\beta r}\right) = 0. \quad (12)$$

Умножим (12) на $\mu_{\tau\sigma|r}$ и просуммируем по τ и σ. Тогда (12) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + \sum_{\tau,\sigma} g^{jl}\left(\Omega_{\tau|jr}\Omega_{\sigma|li} - \Omega_{\tau|ji}\Omega_{\sigma|lr}\right)\mu_{\tau\sigma|r} +$$
$$+\frac{1}{\varphi^2}\sum_{\tau,\sigma}\sum_s\left(\Omega_{r|sr}\Omega_{\sigma|si} - \Omega_{\tau|si}\Omega_{\sigma|sr}\right)\mu_{\tau\sigma|r} = 0. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\tau|jr}\Omega_{\sigma|li}\mu_{\tau\sigma|r} = -\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\tau|jr}\Omega_{\sigma|li}\mu_{\sigma\tau|r} = -\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\sigma|jr}\Omega_{\tau|li}\mu_{\tau\sigma|r};$$

$$\sum_{\tau,\sigma}\left(\Omega_{\tau|sr}\Omega_{\sigma|si} - \Omega_{\tau|si}\Omega_{\sigma|sr}\right)\mu_{\tau\sigma|r} =$$
$$= 2\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\tau|sr}\Omega_{\sigma|si}\mu_{\tau\sigma|r} = -2\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\sigma|sr}\Omega_{\tau|si}\mu_{\tau\sigma|r} =$$
$$= -2\sum_\sigma\Omega_{\sigma|sr}\sum_\tau\left(\Omega_{\tau|si}\mu_{\tau\sigma|r} - \Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i} + \Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i}\right).$$

С учетом (4) и последних замечаний, (13) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + g^{jl}\left[\sum_\sigma\Omega_{\sigma|lr}\sum_\tau\left(\Omega_{\tau|jr}\mu_{\tau\sigma|i} - \Omega_{\tau|ij}\mu_{\tau\sigma|r} - \Omega_{\tau|jr}\mu_{\tau\sigma|i}\right) +\right.$$
$$\left.+\sum_\sigma\Omega_{\sigma|jr}\sum_\tau\left(\Omega_{\tau|lr}\mu_{\tau\sigma|i} - \Omega_{\tau|li}\mu_{\tau\sigma|r} - \Omega_{\tau|lr}\mu_{\tau\sigma|i}\right)\right] -$$
$$-\frac{2}{\varphi^2}\sum_\sigma\Omega_{\sigma|sr}\sum_\tau\left(\Omega_{\tau|si}\mu_{\tau\sigma|r} - \Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i} + \Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i}\right) = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + g^{jl}\left[\sum_\sigma\Omega_{\sigma|lr}\left(\Omega_{\sigma|jr,i} - \Omega_{\sigma|ji,r}\right) + \sum_\sigma\Omega_{\sigma|jr}\left(\Omega_{\sigma|lr,i} - \Omega_{\sigma|li,r}\right)\right] -$$
$$-g^{jl}\sum_{\sigma,\tau}\left(\Omega_{\sigma|lr}\Omega_{\tau|jr} + \Omega_{\sigma|jr}\Omega_{\tau|lr}\right)\mu_{\tau\sigma|i} -$$
$$-\frac{2}{\varphi^2}\sum_\sigma\Omega_{\sigma|sr}\left(\Omega_{\sigma|si,r} - \Omega_{\sigma|sr,i}\right) - \frac{2}{\varphi^2}\sum_{\tau,\sigma}\Omega_{\sigma|sr}\Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i} = 0. \quad (14)$$

Легко проверить, что

$$\sum_{\sigma,\tau}\left(\Omega_{\sigma|lr}\Omega_{\tau|jr} + \Omega_{\sigma|jr}\Omega_{\tau|lr}\right)\mu_{\tau\sigma|i} = 0;$$

$$\sum_{\sigma,\tau} \Omega_{\sigma|sr}\Omega_{\tau|sr}\mu_{\tau\sigma|i} = 0.$$

Найдем

$$\Omega_{\sigma|jr,\,i} - \Omega_{\sigma|ji,\,r} = \frac{\partial\,\Omega_{\sigma|jr}}{\partial x_i} - \Omega_{\sigma|rm}\widetilde{\Gamma}^{\,m}_{ij} + \Omega_{\sigma|ir}\frac{\varphi_j}{\varphi};$$

$$\Omega_{\sigma|lr,\,i} - \Omega_{\sigma|li,\,r} = \frac{\partial\,\Omega_{\sigma|lr}}{\partial x_i} - \Omega_{\sigma|rm}\widetilde{\Gamma}^{\,m}_{il} + \Omega_{\sigma|ir}\frac{\varphi_l}{\varphi};$$

$$\Omega_{\sigma|sr,\,i} - \Omega_{\sigma|si,\,r} = \frac{\partial\,\Omega_{\sigma|sr}}{\partial x_i} - \Omega_{\sigma|rs}\frac{\varphi_i}{\varphi} - \delta_{rs}\varphi\,\varphi_j\,\widetilde{g}^{jl}\,\Omega_{\sigma|il}.$$

Подставим последние выражения в (14):

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + 2\,\widetilde{g}^{jl}\sum_{\sigma}\left[\Omega_{\sigma|lr}\left(\frac{\partial\,\Omega_{\sigma|jr}}{\partial x_i} - \Omega_{\sigma|rm}\widetilde{\Gamma}^{\,m}_{ij}\right) + \Omega_{\sigma|lr}\Omega_{\sigma|ir}\frac{\varphi_j}{\varphi}\right] +$$

$$+\,2\sum_{\sigma,s}\left(\frac{1}{\varphi^2}\Omega_{\sigma|sr}\frac{\partial\,\Omega_{\sigma|sr}}{\partial x_i} - \Omega^2_{\sigma|sr}\frac{\varphi_i}{\varphi^3}\right) - 2\sum_{\sigma}\frac{\varphi_j}{\varphi}\Omega_{\sigma|rr}\Omega_{\sigma|il}\,\widetilde{g}^{jl} = 0. \qquad (15)$$

Заметим, что

$$\sum_{\sigma}\left(\Omega_{\sigma|lr}\Omega_{\sigma|ir} - \Omega_{\sigma|rr}\Omega_{\sigma|il}\right) = -\,R_{rirl} = \varphi\,\varphi_{l,\,i}.$$

Кроме того, если введем вектор $\Omega_{\sigma|r} = \left(\Omega_{\sigma|1r},\ldots,\Omega_{\sigma|kr}\right)$, то $\widetilde{g}^{jl}\,\Omega_{\sigma|lr}\Omega_{\sigma|jr} = \langle\,\Omega_{\sigma|r}\,;\,\Omega_{\sigma|r}\rangle_1$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\,\Omega_{\sigma|r};\,\Omega_{\sigma|r}\rangle_1 = 2\,\langle\,\Omega_{\sigma|r};\,\nabla_{x_i}\Omega_{\sigma|r}\rangle_1 = 2\,\widetilde{g}^{jl}\,\Omega_{\sigma|lr}\left(\frac{\partial\,\Omega_{\sigma|jr}}{\partial x_i} - \Omega_{\sigma|mr}\widetilde{\Gamma}^{\,m}_{ij}\right);$$

$$2\left(\frac{1}{\varphi^2}\Omega_{\sigma|sr}\frac{\partial\,\Omega_{\sigma|sr}}{\partial x_i} - \Omega^2_{\sigma|sr}\frac{\varphi_i}{\varphi^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Omega_{\sigma|sr}}{\varphi}\right)^2.$$

Преобразуем теперь (15):

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + \sum_{\sigma}\left(\langle\,\Omega_{\sigma|r};\,\Omega_{\sigma|r}\rangle_1\right)_{x_i} + \sum_{\sigma,s}\left(\frac{\Omega^2_{\sigma|rs}}{\varphi^2}\right)_{x_i} + \widetilde{g}^{jl}\varphi_j\varphi_{l,\,i} = 0.$$

Так как $\left(\|\operatorname{grad}\varphi\,\|^2_1\right)_{x_i} = \widetilde{g}^{jl}\varphi_j\varphi_{l,\,i}$, то из последнего равенства следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2_{x_i} + \sum_{\sigma}\left(\|\,\bar{\Omega}_{\sigma|r}\,\|^2_1\right)_{x_i} + \sum_{\sigma,s}\left(\frac{\Omega^2_{\sigma|rs}}{\varphi^2}\right)_{x_i} + \left(\|\operatorname{grad}\varphi\,\|^2_1\right)_{x_i} = 0$$

для всех x_i $(i = 1,\ldots,k)$, значит,

$$\frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma}(\mu_{\tau\sigma|r})^2 + \sum_{\sigma}\left(\|\,\bar{\Omega}_{\sigma|r}\,\|^2_1\right) + \sum_{\sigma,s}\left(\frac{\Omega^2_{\sigma|rs}}{\varphi^2}\right) + \|\operatorname{grad}\varphi\,\|^2_1 = \mathrm{const}.$$

Отсюда получаем, что $\|\operatorname{grad}\varphi\|_1 \le M = \mathrm{const}$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Возьмем произвольный вектор $X = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k, 0, \ldots, 0)$, а $Y_r = (0, \ldots, 0, \overset{r}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Тогда кривизна $K(X, Y_r) = \dfrac{R_{irjr}\lambda^i\lambda^j}{g_{ij}\lambda^i\lambda^j g_{rr}} < 0$. Учитывая формулу для R_{irjr}, находим, что

$$K(X, Y_r) = -\frac{\varphi\varphi_{i,j}\lambda^i\lambda^j}{g_{ij}\lambda^i\lambda^j g_{rr}} = -\frac{\varphi_{i,j}\lambda^i\lambda^j}{\|X\|_1^2\varphi} < 0,$$

следовательно, $\varphi_{i,j}\lambda^i\lambda^j > 0$ для любого вектора $X \ne 0$. Но это означает, что квадратичная форма, коэффициентами которой являются $\varphi_{i,j}$, положительно определена. Значит, $\Delta\varphi = \tilde{g}^{ij}\varphi_{i,j} > 0$. Если многообразия $x_{k+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$ компактны, то из $\Delta\varphi > 0$ следует, что $\varphi = \mathrm{const}$, и все многообразие не будет иметь строго отрицательную кривизну. Тем самым первое утверждение теоремы 2 доказано.

Пусть теперь $K(X_r, X_s) \le -a^2 < 0$, значит, $K(X_r, X_s) = -\dfrac{\tilde{g}^{ij}\varphi_i\varphi_j}{\varphi^2} \le -a^2 < 0$, и тогда

$$\langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle_1 \ge a^2\varphi^2. \tag{16}$$

Возьмем теперь в координатном многообразии $x_{k+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$ бесконечную геодезическую. Вдоль этой геодезической выберем римановы нормальные координаты. Без ограничения общности будем считать, что эта геодезическая является координатной линией x_1. Тогда вдоль этой геодезической $\varphi_{1,1} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}$. Из того, что квадратичная форма $(\varphi_{i,j})$ положительно определена, следует, что $\varphi_{1,1} > 0$, т.е. $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} > 0$, но тогда φ — неограничена, и из (16) будет следовать, что неограничена $\|\operatorname{grad}\varphi\|_1$. Это противоречит теореме 1, и тем самым теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Э.Р. Розендорн*, К вопросу о погружении двумерных римановых метрик в четырехмерное евклидово пространство.— Вестн. МГУ, Сер. Математика, механика (1979), № 2, с. 47–50.

2. *Л.А. Масальцев*, О геликоидальных поверхностях в евклидовом пространстве E^m.— Укр. геометр. сб. (1983), вып. 26, с. 100–103.

3. *В.Т. Лисица*, Об n-мерных геликоидальных поверхностях в евклидовом пространстве E^m.— Мат. заметки (1987), т. 41, № 4, с. 549–556.

4. *Н.Р. Камышанский, А.С. Солодовников*, Полуприводимые аналитические пространства "в целом". — Успехи мат. наук (1980), т. 36, № 5, с. 3–51.

5. *Л.П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, Гос.изд-во иностр. лит., Москва (1948), 316 с.

Multidimensional k-helical surfaces in the Euclidean space E^m

V.T. Lisitsa

k-helical n-dimensional surfaces in Euclidean space E^m are defined. It is proved that a complete k-helical surface separated from zero negative sectional curvature in the Euclidean space E^m does not exist.

Багатовимірні k-гелікоїдальні поверхні у евклідовому просторі E^m

В.Т. Лисиця

Визначаються k-гелікоїдальні n-вимірні поверхні в евклідовому просторі E^m. Доведено, що не існує повної k-гелікоїдальної поверхні з відокремленою від нуля від'ємною секційною кривиною в евклідовому просторі E^m.